УДК 517.9

ПРО ІСНУВАННЯ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ НЕРІВНОСТІ З МІШАНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Н. В. Задоянчук

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01601, Київ, вул. Володимирська, 60
e-mail: zadoianchuk.nv@gmail.com

The degenerate parabolic variational inequality with mixed boundary conditions and nongomogeneous initial data is investigated in the case where the related operator can lose properties of coercivity and continuity on the corresponding Sobolev spaces. By using the Hardy – Poincare inequality it is proved that the original evolution variational inequality has a unique solution, if the degenerate weight function is a function of potential type.

Исследуется вырожденное параболическое вариационное неравенство со смешаными краевыми условиями и неоднородными начальными условиями в случае, когда связанный с ней оператор может терять свойства коэрцитивности и непрерывности на соответствующих соболевских пространствах. С помощью неравенства Харди – Пуанкаре при условии, что вырожденная весовая функция является функцией потенциального типа, доказана однозначная разрешимость исходного эволюционного вариационного неравенства.

1. Вступ. У даній роботі досліджується проблема розв'язності виродженої параболічної задачі вигляду

$$\rho\dot{y} - \operatorname{div}(\rho(x)\nabla y) \geq f_0, \quad y \geq 0 \ \text{м.с. в} \ Q,$$

$$\rho\dot{y} - \operatorname{div}(\rho(x)\nabla y) = f_0 \ \text{м.с. в} \ [(x,t) \in Q : y(x,t) > 0]$$

з мішаними крайовими умовами та неоднорідними початковими умовами. Тут f_0 — задана функція, а ρ — невід'ємна вагова функція з властивостями $\rho \in L^1(\Omega)$, $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$ і $\rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$.

Відповідні задачі „без виродження” є математичними моделями, зокрема, однофазових задач Стефана та задач з вільною межею. Один із підходів, що використовується при вивченні таких задач, полягає в тому, що відповідна параболічна задача зводиться до варіаційної еволюційної нерівності, а потім до одержаної задачі застосовуються класичні результати щодо розв'язності одержаного еволюційного об'єкта (див., наприклад, [1, 3, 4]). У виродженому випадку, тобто коли розглядається нерівність з вагою ρ, локально інтегровною разом з оберненою, ситуація з розв'язністю ускладнюється. Оскільки функція ρ може бути необмеженою на області Ω або досягати нуля на підмножинах нульової міри Лебега, оператор, пов'язаний з нерівністю, може втрачати властивості обмеженості та коерцитивності на відповідному просторі Соболєва. В результаті може спостерігатись, наприклад, неєдиність постановки крайової задачі (так званий ефект Лаврентьєва).

Метою даної роботи є доведення розв'язності виродженої параболічної нерівності в залежності від властивостей функції ρ. Для цього вводиться поняття вагової функції потенціального типу, за допомогою якої вихідна задача зводиться до еквівалентної їй (в певному сенсі) задачі. Далі, з використанням нерівності типу Харді–Пуанкаре (див. [5]) досліджено проблему розв'язності отриманої варіаційної нерівності з необмеженими коефіцієнтами потенціального типу, а відтак і вихідної нерівності.

2. Допоміжні означення та факти. Нехай Ω — обмежена відкрита підмножина в $\mathbb{R}^N$ з достатньо регулярною межею і $0 \in \mathbb{R}^N$ — внутрішня точка множини Ω. Будемо вважати, що межа $\partial\Omega$ складається з трьох гладких частин: Γ_1, Γ_2 та Γ_3 , що попарно не перетинаються, Γ_1 та Γ_2 не мають спільної межі і лебегова міра множини Γ_1 є ненульовою. Нехай $Q = (0,T) \times \Omega$ — циліндр в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N$, де $T < +\infty$, та $\Sigma_i = (0,T) \times \Gamma_i$, $i = 1,2,3,$ — відповідні складові бічної поверхні.

Будемо вважати, що функція $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ задовольняє такі умови: $\rho > 0$ м.с. на Ω і при цьому

$$\rho, \rho^{-1} \in L^1(\Omega), \quad \nabla \ln \rho \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega). \tag{1}$$

Отже, функцію ρ можна ототожнити з мірою Радона на Ω, поклавши $\rho(E) = \int_E \rho(x)dx$ для довільної вимірної множини $E \subset \Omega$. Нагадаємо, що невід'ємною мірою Радона на Ω називають невід'ємну міру Бореля, яка є скінченною на кожній компактній множині. Далі будемо вважати, що існує замкнена підмножина Ω_* множини Ω така, що

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega_*, \partial\Omega) = \delta, \quad \rho > \sigma \ \text{ м.с. в } \ \Omega \setminus \Omega_* \ \text{ і } \ \rho \in L^\infty(\Omega \setminus \Omega_*) \tag{2}$$

для деяких $\delta > 0$ та $\sigma > 0$. Інакше кажучи, припускається, що умови (1) не є характерними для примежового шару множини Ω.

Далі невід'ємну функцію ρ з властивостями (1), (2) будемо називати виродженою ваговою функцією і пов'язуватимемо з нею вагові гільбертові простори $L^2(\Omega, \rho dx)$ та $L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$, де, зокрема, $L^2(\Omega, \rho dx)$ — гільбертів простір вимірних функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$, для яких

$$\|f\|_{L^2(\Omega,\rho dx)} = (f,f)_{L^2(\Omega,\rho dx)} = \int_\Omega f^2 \rho \, dx < +\infty.$$

Введемо до розгляду такі простори: $C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_2) = \{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) : \varphi = 0 \text{ на } \Gamma_2\}$, $W^{1,1}(\Omega; \Gamma_2)$ та $W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2)$ — замикання $C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_2)$ відносно норм

$$\|y\|_{W^{1,1}(\Omega;\Gamma_2)} = \|y\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla y\|_{L^1(\Omega)^N}$$

та

$$\|y\|_{W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)} = \left(\int_\Omega y^2 dx + \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx \right)^{1/2}$$

відповідно. Позначимо через $W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2, \rho dx)$ замикання $C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_2)$ за нормою

$$\|y\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx)} = \int_\Omega y^2 \rho dx + \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} \rho \, dx.$$

Нехай $\lambda_* = (N-2)^2/4$. Тоді для довільної відкритої обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$ знайдеться стала величина $C(\Omega) > 0$ така, що

$$\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda_* \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \geq C(\Omega) \int_\Omega y^2\, dx \quad \forall\, y \in W^{1,2}(\Omega, \Gamma_2). \tag{3}$$

Зазвичай співвідношення (3) називають нерівністю типу Харді – Пуанкаре (див. [5]). Як випливає з (3), для довільних $y \in W^{1,2}(\Omega, \Gamma_2)$ та $\lambda \in \mathbb{R}_+$ можна записати

$$\int_\Omega \left(|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} + y^2 \right) dx \geq \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx \geq \int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx =$$

$$= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*} \right) \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\, dx + \frac{\lambda}{\lambda_*} \int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda_* \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*} \right) \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx + \frac{\lambda\, C(\Omega)}{\lambda_*} \int_\Omega y^2\, dx. \tag{4}$$

Отже, у випадку, коли $0 < \lambda < \lambda_*$ вирази

$$\left(\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \right)^{1/2} \quad \text{і} \quad \left(\int_\Omega y^2 dx + \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx \right)^{1/2}$$

є еквівалентними нормами у просторі Соболєва $W^{1,2}(\Omega, \Gamma_2)$.

3. Постановка задачі. По аналогії з [6] розглянемо непорожню опуклу замкнену в $W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2, \rho dx)$ множину $K = \{v | v \in W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2, \rho dx),\ v \geq 0$ м.с. в $\Omega\}$, що є секвенційно замкненою відносно збіжності за нормою

$$\|y\|^2_\rho := \int_\Omega y^2 \rho\, dx + \int_\Omega \left| \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx. \tag{5}$$

Також розглянемо опуклу замкнену підмножину $\mathcal{K}$ простору $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2, \rho dx))$, що визначається таким чином:

$$\mathcal{K} = \{v |\, v \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2, \rho dx)),\ v(t) \in K \text{ м.с.}\} =$$

$$= \{v | v \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2, \rho dx)),\ v \geq 0 \text{ м.с. в } Q\}$$

і є також секвенційно замкненою відносно збіжності за нормою

$$\|y\|^2_{\rho_{(0,T)}} := \int_0^T \int_\Omega y^2 \rho\, dx dt + \int_0^T \int_\Omega \left| \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho dx dt. \tag{6}$$

Нехай $f_0 \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx))$, $y_0 \in W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)$, $y_0 \geq 0$ м.с. в Ω — задані функції.

Розглянемо в циліндрі Q параболічну задачу з мішаними крайовими умовами:

$$\rho\dot{y} - \operatorname{div}(\rho(x)\nabla y) \geq f_0, \quad y \geq 0 \ \text{м.с. в } Q, \tag{7}$$

$$\rho\dot{y} - \operatorname{div}(\rho(x)\nabla y) = f_0 \ \text{м.с. в } [(x,t) \in Q : y(x,t) > 0], \tag{8}$$

$$\frac{\partial y}{\partial n_A} + \rho y = u \ \text{м.с. в } \Sigma_1, \tag{9}$$

$$y = 0 \ \text{м.с. в } \Sigma_2, \tag{10}$$

$$\frac{\partial y}{\partial n_A} = 0 \ \text{м.с. в } \Sigma_3, \tag{11}$$

$$\sqrt{\rho}y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{12}$$

де $\dfrac{\partial y}{\partial n_A} = \sum_{i,j=1}^n \rho(x)\dfrac{\partial y}{\partial x_j}\cos(n,x_i)$, $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1,\rho^{-1}d\xi))$ така, що $u \geq 0$ м.с. в Σ_1.

Покажемо, що задачу (7) – (12) можна звести до виродженої еволюційної варіаційної нерівності. Для цього спочатку помножимо обидві частини співвідношення (7) на функцію $v \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_2,\rho dx))$ таку, що $v \geq 0$ м.с. в Q:

$$\int_0^T\int_\Omega \rho(x)\dot{y}v\,dxdt - \int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)dxdt \geq \int_0^T\int_\Omega f_0\,v\,dxdt.$$

Застосувавши формулу Гріна, одержимо

$$\int_0^T\int_\Omega \rho\dot{y}v\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \rho\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dxdt - \int_0^T\int_{\Gamma_1}\frac{\partial y}{\partial n_A}v\,d\xi dt -$$
$$- \int_0^T\int_{\Gamma_2}\frac{\partial y}{\partial n_A}v\,d\xi dt - \int_0^T\int_{\Gamma_3}\frac{\partial y}{\partial n_A}v\,d\xi dt \geq \int_0^T\int_\Omega f_0 v\,dxdt.$$

Врахувавши крайові умови (9) – (11), будемо мати

$$\int_0^T\int_\Omega \rho\dot{y}v\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \rho\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1}\rho y v\,d\xi dt \geq$$
$$\geq \int_0^T\int_\Omega f_0 v\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} uv\,d\xi dt. \tag{13}$$

Тепер помножимо співвідношення (8) на функцію $y \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_2,\rho dx))$ таку, що $y > 0$ м.с. в Q. Застосувавши формулу Гріна та використавши умови (9) – (11), отримаємо

$$\int_0^T\int_\Omega \rho\dot{y}y dxdt+\int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \rho\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j}dxdt+\int_0^T\int_{\Gamma_1}\rho yy d\xi dt=\int_0^T\int_\Omega f_0 y dxdt+\int_0^T\int_{\Gamma_1} uy d\xi dt. \quad (14)$$

Згідно з [4] (зауваження 1.6) та [1] (§ 6.2) одержимо, що співвідношення (15) для будь-якого $v \in \mathcal{K}$ та (14) рівносильні співвідношенню

$$\int_0^T\int_\Omega \rho\dot{y}(v-y)dxdt+\int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \rho\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial (v-y)}{\partial x_j}dxdt+\int_0^T\int_{\Gamma_1}\rho y(v-y)d\xi dt \ge$$

$$\ge \int_0^T\int_\Omega f_0(v-y)dxdt+\int_0^T\int_{\Gamma_1} u(v-y)d\xi dt. \quad (15)$$

З огляду на виконані перетворення задача (7) – (12) еквівалентна такій задачі:

$$\int_0^T\int_\Omega \rho\dot{y}(v-y)\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \rho\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial (v-y)}{\partial x_j}dxdt+\int_0^T\int_{\Gamma_1}\rho y(v-y)\,d\xi dt \ge$$

$$\ge \int_0^T\int_\Omega f_0(v-y)\,dxdt+\int_0^T\int_{\Gamma_1} u(v-y)\,d\xi dt \quad (16)$$

$$\forall v \in \mathcal{K}, \dot{y} \in L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx))^*),$$

$$y \in \mathcal{K}, \quad (17)$$

$$\sqrt{\rho}y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (18)$$

яка є сильною постановкою задачі (див. [3], розділ 9).

4. Попередній аналіз задачі (16) – (18). Для того щоб показати, що постановка задачі (16) – (18) є коректною, перейдемо у цих співвідношеннях до нових змінних, поклавши

$$y(x,t) = \frac{z(x,t)}{\sqrt{\rho}}.$$

В результаті формальних перетворень будемо мати $\nabla y = -1/2 z\rho^{-1/2-1}\nabla\rho + \rho^{-1/2}\nabla z$.

Отже,

$$-\mathrm{div}\,(\rho\nabla y) = -\mathrm{div}\,\left(-\frac{1}{2}\,z\rho^{-1/2}\nabla\rho + \rho^{-1/2+1}\nabla z\right) = \frac{1}{2}\,\rho^{-1/2}(\nabla z, \nabla\rho)_{\mathbb{R}^N} +$$

$$+\frac{1}{2}\,\rho^{-1/2}z\triangle\rho - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\rho^{-1/2-1}z|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N} -$$

$$-\left(1-\frac{1}{2}\right)\rho^{-1/2}(\nabla z, \nabla\rho)_{\mathbb{R}^N} - \rho^{-1/2+1}\triangle z =$$

$$= -\rho^{-1/2+1}\triangle z + \frac{1}{2}\,\rho^{-1/2-1}\left(\rho\triangle\rho - \frac{1}{2}\,|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}\right)z =$$

$$= -\sqrt{\rho}\triangle z - \frac{1}{2}\,\sqrt{\rho}V(x)z,$$

де $V(x) = -\triangle\ln\rho(x) - \dfrac{1}{2}|\nabla\ln\rho(x)|^2_{\mathbb{R}^N}$.

Застосувавши формальні перетворення до $\dfrac{\partial y}{\partial n_A}$, отримаємо

$$\frac{\partial y}{\partial n_A} = \sum_{i,j=1}^{N}\rho\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)\cos(n, x_i) = \sum_{i,j=1}^{N}\sqrt{\rho}\frac{\partial z}{\partial x_j}\cos(n, x_i) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\sqrt{\rho}\frac{\partial\ln\rho}{\partial x_j}\,z\cos(n, x_i) = \sqrt{\rho}\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{1}{2}\sqrt{\rho}z\frac{\partial\ln\rho}{\partial n}.$$

Взявши до уваги крайові умови (9) та (11), одержимо

$$\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{1}{2}\,z\frac{\partial\ln\rho}{\partial n} + z = \frac{u}{\sqrt{\rho}} \ \text{ в } \ \Sigma_1, \tag{19}$$

$$\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{1}{2}\,z\frac{\partial\ln\rho}{\partial n} = 0 \ \text{ в } \ \Sigma_3. \tag{20}$$

Крім того, для так введеної заміни змінних справедливим є наступний результат.

Твердження 1 (див. [6], твердження 1). *Для довільного* $y \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx))$ *має місце зображення* $y = \dfrac{z}{\sqrt{\rho}}$, *при цьому* $z = \sqrt{\rho}y \in L^2(0,T; W^{1,1}(\Omega;\Gamma_2)\cap L^2(\Omega))$.

Зауважимо, що відображення

$$\varphi\,:\,L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx)) \to L^2(0,T; W^{1,1}(\Omega;\Gamma_2)\cap L^2(\Omega)),$$

що визначається як $\varphi(y) = y\sqrt{\rho}$, не є сюр'єктивним. Проте у просторі $L^2(0,T; W^{1,1}(\Omega;\Gamma_2)\cap$ $\cap L^2(\Omega))$ множина його образів

$$\varphi(L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx)))$$

є щільною. Аналогічно [6] можемо бачити, що для довільного $z \in L^2(0,T;C_0^\infty(\mathbb{R}^N,\Gamma_2)) \subset$ $\subset L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega;\Gamma_2) \cap L^2(\Omega))$ маємо $\dfrac{z}{\sqrt{\rho}} \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx))$.

Таким чином, внаслідок встановленого результату та неперервності вкладення $L^2(0,T;$ $C_0^\infty(\mathbb{R}^N,\Gamma_2)) \subset L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)) \subset L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega;\Gamma_2) \cap L^2(\Omega))$ можемо стверджувати, що існує така щільна множина $\mathcal{D}_\rho \subset L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))$, що $\dfrac{z}{\sqrt{\rho}} \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,$ $\rho\, dx))$ $\forall z \in \mathcal{D}_\rho$.

Далі розглянемо лінійне відображення

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}_\rho \subset L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)) \to L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx)),$$

де $\mathcal{F}z = \dfrac{z}{\sqrt{\rho}}$. Оскільки область визначення $\mathcal{D}_\rho$ даного відображення є щільною множиною банахового простору $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))$, то для $\mathcal{F}$, як щільно визначеного оператора, існує спряжений оператор

$$\mathcal{F}^* : D(\mathcal{F}^*) \subset L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx))^*) \to L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))^*)$$

такий, що

$$\langle \mathcal{F}^* v, z\rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))} = \langle v, \mathcal{F}z\rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx))} \quad \forall\, z \in D_\rho \ \text{ і } \ \forall\, v \in D\left(\mathcal{F}^*\right),$$

де $D\left(\mathcal{F}^*\right)$ — множина елементів $v \in L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx))^*)$, для яких існує $C > 0$ таке, що для всіх $z \in D_\rho$ має місце співвідношенння

$$\left|\langle v, \mathcal{F}z\rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx))}\right| \le C\|z\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))}.$$

Зауважимо, що в загальному випадку спряжений оператор $\mathcal{F}^*$ не є щільно визначеним.

З огляду на отримані результати відмітимо наступну властивість для множини $\mathcal{K}$. Оскільки $\mathcal{K}$ є замкненою підмножиною простору $L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$, де $\mathcal{W}_\rho$ утворено як замикання простору фінітних функцій $C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_2)$ за нормою (5), то для будь-якого $y \in \mathcal{K}$ маємо $y = \mathcal{F}z = \dfrac{z}{\sqrt{\rho}}$, де $z \in L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega;\Gamma_2) \cap L^2(\Omega))$ та $\|y\|_{\rho(0,T)} = \left\|\dfrac{z}{\sqrt{\rho}}\right\|_{\rho(0,T)} < +\infty$ (за вихідними припущеннями). Звідси отримуємо, що $z \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))$. Дійсно, для будь-якого $y \in L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$ маємо

$$\|y\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)} = \int_0^T\int_\Omega y^2(x)\rho(x)\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \left|\nabla y(x) + \frac{y(x)}{2}\nabla\ln\rho(x)\right|^2_{\mathbb{R}^N}\rho(x)\,dxdt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega (y\sqrt{\rho})^2 dxdt + \int_0^T\int_\Omega \left|\sqrt{\rho}\nabla y + \frac{y}{2\sqrt{\rho}}\,\nabla\rho\right|^2_{\mathbb{R}^N} dxdt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega (y\sqrt{\rho})^2\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega |\nabla(\sqrt{\rho}\,y)|^2_{\mathbb{R}^N}\,dxdt = \|z\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))}.$$

Отже, $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}(\mathcal{D}_\rho)$.

Введемо до розгляду вагову функцію потенціального типу.

Означення 1. *Будемо казати, що $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ є ваговою функцією потенціального типу, якщо $\rho > 0$ м.с. на Ω, $\rho \in L^1(\Omega)$, $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$, $\nabla \ln \rho \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ та існують сталі $\hat{C}(\Omega) > 0$, $\tilde{C} > 0$ і підобласть $\Omega_* \subset \Omega$ така, що $\rho \in C^1(\overline{\Omega \setminus \Omega_*})$, де $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_*) > \delta$ при деякому $\delta > 0$, і при цьому виконуються нерівності*

$$\rho(x) \geq \sigma \quad \text{на} \quad \Omega \setminus \Omega_* \quad \text{при деякому} \quad \sigma > 0, \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \rho}{\partial n} < 1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{22}$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_3, \tag{23}$$

$$-\hat{C}(\Omega) \leq -\triangle \ln \rho(x) - \frac{1}{2}|\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N} < \frac{2\lambda_*}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} = \frac{(N-2)^2}{2|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{24}$$

У даному випадку функцію $V(x) = -\triangle \ln \rho(x) - \dfrac{1}{2}|\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N}$ будемо називати потенціалом Харді для вагової функції ρ (детальніше див. [2, 5]).

Утворимо множини

$$K_1 = \{\eta \in W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2) | \eta = \sqrt{\rho} y \; \forall y \in K \subset W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2, \rho dx)\}$$

та

$$\mathcal{K}_1 = \{\eta \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2)) | \eta(t) \in K_1 \text{ м.с. на } [0,T]\} =$$
$$= \left\{ \begin{array}{c} \eta \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2)) : \\ \eta = \sqrt{\rho} y \; \forall y \in \mathcal{K} \subset L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2, \rho dx)), \end{array} \right\},$$

які за побудовою та вихідними припущеннями є опуклими замкненими підмножинами просторів $W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2)$ та $L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2))$ відповідно.

Поряд з вихідною задачею (16) – (18) у випадку, коли функція $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ задовольняє умови означення 1, розглянемо таку задачу:

$$\int_0^T \int_\Omega \dot{z}(w-z)\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla z, \nabla w - \nabla z)_{\mathbb{R}^N}\; dxdt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega V(x) z(w-z)\, dxdt +$$
$$+ \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \rho}{\partial n}\right) z(w-z)\, d\xi dt \geq \int_0^T \int_\Omega \frac{f_0}{\sqrt{\rho}}(w-z) dxdt +$$
$$+ \int_0^T \int_{\Gamma_1} p(w-z) d\xi dt \;\; \forall z \in \mathcal{K}_1, \;\; \dot{z} \in L^2(0,T; (W^{1,2}(\Omega; \Gamma_2))^*), \tag{25}$$

$$z \in \mathcal{K}_1, \tag{26}$$

$$z(0,x) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{27}$$

де $p \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$ таке, що $p = \dfrac{u}{\sqrt{\rho}}$ і $p \geq 0$ м.с. в Σ_1, $V(x) = -\triangle \ln\rho(x) - \dfrac{1}{2}|\nabla \ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}$.

Розв'язність задачі (25) – (27). Тепер покажемо, що у випадку, коли за вагову функцію $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ взяти функцію потенціального типу, задача (25) – (27) матиме принаймні один розв'язок. Сформулюємо наступний результат.

Теорема 1. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу, $f_0 \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx))$, $p \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$, $y_0 \in W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)$, $y_0 \geq 0$ м.с. в Ω є заданими функціями і при кожному $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_2)$ має місце рівність*

$$\lim_{t\to 0+} \langle z(t),\varphi\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle y_0,\varphi\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Тоді множина розв'язків задачі (25) – (27) є одноточковою.

Доведення. Покладемо

$$V = \left\{ w \in W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2) : \int\limits_\Omega \left[|\nabla w|^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2}V(x)w^2 \right] dx < +\infty \right\}, \quad H = L^2(\Omega).$$

Використовуючи міркування з доведення теореми 3.2 з [2], легко показати, що простір V збігається з простором $W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)$. Тому, поклавши

$$\mathcal{V} = L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)),$$

згідно з теоремою Реліха – Кондрашова отримаємо такі компактні вкладення:

$$L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))^*). \tag{28}$$

Пов'яжемо із нерівністю (25) лінійний симетричний оператор $B : L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)) \to L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))^*)$, який означимо за правилом

$$\langle Bz,w\rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))} = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega (\nabla z,\nabla w)_{\mathbb{R}^N}\,dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega V(x)zw\,dxdt +$$

$$+ \int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_1} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial n}\right) zw d\xi dt \quad \forall z(t) \in W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2),\ t \in [0,T]. \tag{29}$$

Беручи до уваги означення вагової функції потенціального типу, нерівність Харді –

Пуанкаре (3) та теорему Соболєва про сліди, отримуємо

$$|\langle Bz, w\rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))}| \leq \left|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left((\nabla z, \nabla w)_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2}V(x)zw\right)dxdt\right| +$$

$$+ \left|\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_1}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial n}\right)zw\,d\xi dt\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^T\left(\int\limits_\Omega |\nabla z|^2_{\mathbb{R}^N}dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega |\nabla w|^2_{\mathbb{R}^N}dx\right)^{1/2} dt +$$

$$+ \hat{C}(\Omega)\int\limits_0^T\left(\int\limits_\Omega z^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega w^2dx\right)^{1/2} dt +$$

$$+ C\int\limits_0^T \|z\|_{W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)}\|w\|_{W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)}\,dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^T \|z\|_{W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)}\|w\|_{W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)}dt +$$

$$+ \hat{C}(\Omega)\int\limits_0^T \|z\|_{W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)}\|w\|_{W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)}dt +$$

$$+ C\int\limits_0^T \|z\|_{W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)}\|w\|_{W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)}dt \leq$$

$$\leq (1 + C_1)\|z\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))}\|w\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))},$$

де C — стала з теореми про сліди, $C_1 = \max\{C, \hat{C}(\Omega)\}$.

Таким чином, маємо обмеженість лінійного оператора B. Далі розглянемо

$$\langle Bz, z\rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))} = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega |\nabla z|^2_{\mathbb{R}^N}dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega V(x)z^2dxdt +$$

$$+ \int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_1}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial n}\right)z^2d\xi dt \geq \int\limits_0^T\int\limits_\Omega |\nabla z|^2_{\mathbb{R}^N}dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega V(x)z^2dxdt \geq C_2\|z\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))}, \tag{30}$$

де C_2 — стала з умови еквівалентності норм у просторі $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))$.

Оскільки умова $f_0 \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx))$ гарантує належність елемента $\dfrac{f_0}{\sqrt{\rho}}$ простору $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, а умова $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1,\rho^{-1}d\xi))$ гарантує, що $\dfrac{u}{\sqrt{\rho}} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)$, а простір $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ компактно вкладається у простір $L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))^*)$, то f, що задається таким чином:

$$\langle f,v\rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))} = \int_0^T\int_\Omega f_0v\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} uv\,d\xi dt, \quad v \in \mathcal{K}_1, \tag{31}$$

визначене в $L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))^*)$.

При виконанні умов (28), (30), (31) з урахуванням обмеженості лінійного оператора B для довільного $y_0 \in W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)$ такого, що $y_0 \geq 0$ м.с. в Ω, згідно з теоремою 4.6 з [1] задача (25) – (27) має єдиний розв'язок. Більш того, якщо $p_n \to p$ слабко в $L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$, $n\to\infty$, то $z_n \to z$ сильно в $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ і слабко в $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_2))$.

Теорему 1 доведено.

5. Розв'язність задачі (16) – (18).

Теорема 2. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу, $f_0 \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx))$, $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega;\Gamma_1,\rho^{-1}d\xi))$, $y_0 \in W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2)$, $y_0 \geq 0$ м.с. в Ω, є заданими функціями і при кожному $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_2)$ має місце рівність*

$$\lim_{t\to 0+}\langle z(t),\varphi\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle y_0,\varphi\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Тоді вихідна задача (16) – (18) має єдиний розв'язок.

Доведення. Спочатку покажемо, що задачі (16) – (18) та (25) – (27) є еквівалентними в певному сенсі, тобто покажемо, що z є розв'язком задачі (25) – (27) в тому і тільки в тому випадку, коли $y = \dfrac{z}{\sqrt{\rho}}$ — розв'язок задачі (16) – (18). Пов'яжемо з нерівністю (16) оператор $A : L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_2,\rho dx)) \to L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx))^*)$, що визначається за правилом

$$\langle Ay,v\rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2\rho dx))} = \int_0^T\int_\Omega (\nabla y,\nabla v)\rho\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1}\rho yv\,d\xi dt.$$

Доведемо, що

$$\langle A(\mathcal{F}z),\mathcal{F}w\rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_2,\rho dx))} = \langle Bz,w\rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_2))},$$

де $z,w \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_2))$.

Аналогічно [7] маємо, зокрема, що для z із $\mathcal{D}_\rho$, де $\mathcal{D}_\rho$ — деяка щільна підмножина у просторі $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))$, елемент $\dfrac{z}{\sqrt{\rho}} \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx))$ та $\nabla y = \nabla\left(\dfrac{z}{\sqrt{\rho}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\nabla z - \dfrac{z}{2}\nabla \ln\rho\right)$. Беручи до уваги ці перетворення, той факт, що для v та z із $\mathcal{D}_\rho \subset L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2))$

$$\mathcal{F}z, \mathcal{F}v \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_2,\rho dx)),$$

та враховуючи вигляд функції $V(x)$, отримуємо

$$\langle A(\mathcal{F}z), \mathcal{F}w\rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_2,\rho dx))} =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega (\nabla(\mathcal{F}z), \nabla(\mathcal{F}w))_{\mathbb{R}^N}\rho\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} \mathcal{F}z\,\mathcal{F}w\rho\,d\xi dt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega \left(\nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right), \nabla\left(\frac{w}{\sqrt{\rho}}\right)\right)_{\mathbb{R}^N}\rho\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} \frac{z}{\sqrt{\rho}}\,\frac{w}{\sqrt{\rho}}\,\rho\,d\xi dt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla z - \frac{z}{2\sqrt{\rho}}\nabla\ln\rho, \frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla w - \frac{w}{2\sqrt{\rho}}\nabla\ln\rho\right)_{\mathbb{R}^N}\rho\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} \frac{z}{\sqrt{\rho}}\,\frac{w}{\sqrt{\rho}}\rho\,d\xi dt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega \left(\nabla z - \frac{z}{2}\nabla\ln\rho, \nabla w - \frac{w}{2}\nabla\ln\rho\right)_{\mathbb{R}^N}\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} \frac{z}{\sqrt{\rho}}\,\frac{w}{\sqrt{\rho}}\rho\,d\xi dt =$$

$$= \int_0^T\int_{\Gamma_1} zw\,d\xi dt + \int_0^T\int_\Omega (\nabla z, \nabla w)_{\mathbb{R}^N}dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (w\nabla z, \nabla\ln\rho)_{\mathbb{R}^N}\,dxdt -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (\nabla\ln\rho, z\nabla w)_{\mathbb{R}^N}\,dxdt + \frac{1}{4}\int_0^T\int_\Omega (z\nabla\ln\rho, w\nabla\ln\rho)_{\mathbb{R}^N}\,dxdt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega (\nabla z, \nabla w)_{\mathbb{R}^N}dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (\nabla(z\cdot w), \nabla\ln\rho)_{\mathbb{R}^N}dxdt +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_0^T\int_\Omega (z\nabla\ln\rho, w\nabla\ln\rho)_{\mathbb{R}^N}\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} zw\,d\xi dt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega (\nabla z, \nabla w)_{\mathbb{R}^N}dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \left(-zw\triangle\ln\rho - \frac{1}{2}zw|\nabla\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}\right)\,dxdt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} zw \, d\xi dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} z \, w \, d\xi dt = \int_0^T \int_\Omega (\nabla z, \nabla w)_{\mathbb{R}^N} \, dx dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega V(x) zw \, dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} \right) zw \, d\xi dt = \langle Bz, w \rangle_{L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega, \Gamma_2))}.$$

Отже, оскільки для довільного $v \in \mathcal{K}$ існує елемент $w \in \mathcal{K}_1$ такий, що $v = \mathcal{F} w := \dfrac{w}{\sqrt{\rho}}$, то маємо

$$\int_0^T \int_\Omega \dot{y}(v - y) \rho \, dx dt = \int_0^T \int_\Omega \frac{\dot{z}}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{w}{\sqrt{\rho}} - \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right) \rho \, dx dt = \int_0^T \int_\Omega \dot{z}(w - z) \, dx dt,$$

$$\int_0^T \int_\Omega f_0 (v - y) dx dt = \int_0^T \int_\Omega f_0 \left(\frac{w}{\sqrt{\rho}} - \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right) dx dt = \int_0^T \int_\Omega \frac{f_0}{\sqrt{\rho}} (w - z) dx dt,$$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} u(v - y) \, d\xi dt = \int_0^T \int_{\Gamma_1} u \left(\frac{w}{\sqrt{\rho}} - \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right) \, d\xi dt = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{u}{\sqrt{\rho}} (w - z) \, d\xi dt.$$

Зауважимо, що при кожному $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_2)$ має місце рівність

$$\lim_{t \to 0+} \langle y(t), \varphi \rangle_{L^2(\Omega, \sqrt{\rho} dx)} = \lim_{t \to 0+} \langle z(t), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = (y_0, \varphi)_{L^2(\Omega)}.$$

Таким чином, використавши даний результат щодо еквівалентності задач (16) – (18) та (25) – (27) та результат про існування і єдиність розв'язку задачі (25) – (27) (теорема 1), отримаємо однозначну розв'язність вихідної задачі (16) – (18).

Теорему 2 доведено.

1. *Barbu V.* Optimal control of variational inequalities. — London: Pitman Adv. Publ. Program, 1984. — 298 p.
2. *Баланенко І. Г., Когут П. І.* Про одну задачу оптимального керування для виродженого параболічного рівняння // Вісн. ДНУ. Сер. Моделювання. — 2012. — **8 (4)**. — С. 3 – 18.
3. *Lions J.-L.* Some methods of solving non-linear boundary value problems. — Paris: Dunod-Gauthier-Villars, 1969. — 580 p.
4. *Lions J.-L.* Optimal control of systems governed by partial differential equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1971. — 400 p.
5. *Vazquez J. L., Zuazua E.* The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential // J. Funct. Anal. — 2000. — **173**. — P. 103 – 153.
6. *Задоянчук Н. В.* Задача оптимального керування для виродженої параболічної варіаційної нерівності: теорема існування // Журн. обчислюв. та прикл. математики. — 2014. — **1(115)**. — С. 17 – 38.
7. *Задоянчук Н. В., Купенко О. П.* Про розв'язність одного класу задач оптимального керування для вироджених еліптичних варіаційних нерівностей // Журн. обчислюв. та прикл. математики. — 2013. — **4(114)**. — С. 10 – 23.

Одержано 28.11.14