УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ІЗ ВИРОДЖЕННЯМИ

С. П. Пафик

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
Україна, 01030, Київ, вул. Пирогова, 9

В. П. Яковець

Ун-т менеджменту освіти Нац. акад. пед. наук України
Україна, 01601, Київ, вул. Артема, 52-а

We consider a homogeneous system of linear singularly perturbed differential equations of order m with the matrix at higher derivatives becomes singular as the small parameter approaches zero. Using the Newton diagrams we study the structure of a general solution of the system under consideration and a possibility to find its asymptotics in the case where the corresponding characteristic polynomial of the matrix has multiple finite and infinite elementary divisors. The obtained results generalize those obtained for systems of first and second order equations.

Рассматривается однородная система линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений m-го порядка с матрицей при старших производных, которая вырождается при стремлении малого параметра к нулю. С помощью метода диаграмм Ньютона исследуются структура общего решения данной системы уравнений и возможность построения его асимптотики в случае, когда соответствующий матричный характеристический полином имеет кратный конечный и бесконечный элементарные делители.

Полученные результаты обобщают известные исследования, проведенные для аналогичных систем уравнений первого и второго порядков.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^{mh}A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m}+\varepsilon^{(m-1)h}A_{m-1}(t,\varepsilon)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\ldots+\varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+A_0(t,\varepsilon)x=0, \qquad (1.1)$$

де $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $A_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,m}$, — дійсні або комплекснозначні $(n\times n)$-матриці, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $h\in N$, $t\in[0;T]$.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1°) матриці $A_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,m}$, допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε:

$$A_i(t,\varepsilon)\sim\sum_{k\ge 0}\varepsilon^k A_i^{(k)}(t),\quad i=\overline{0,m};$$

2°) матриці $A_i^{(k)}(t)$, $i=\overline{0,m}$, $k=0,1,\ldots$, нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$;

3°) $\det A_m^{(0)}(t) = 0 \, \forall t \in [0;T]$;

4°) гранична в'язка матриць

$$P(t,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i^{(0)}(t) \tag{1.2}$$

системи (1.1) регулярна при всіх $t \in [0;T]$ і має один скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратності p і один нескінченний кратності $q = mn - p$.

Питання про побудову асимптотики загального розв'язку лінійних систем диференціальних рівнянь із малим параметром і матрицею при старших похідних, яка вироджується з прямуванням параметра до нуля, досить детально вивчено при $m = 1$ [1 – 4]. Що ж стосується аналогічних систем рівнянь вищих порядків, то, як правило, вони досліджувались лише при $m = 2$ [3]. Системи ж рівнянь порядку вище другого розглядались лише за умови, що матриця при старшій похідній є одиничною [5, 6].

Уперше систему рівнянь вигляду (1.1) було розглянуто в роботі [7], де передбачалось, що гранична в'язка матриць (1.2) має простий спектр. У роботі [8] досліджено більш складний випадок, коли гранична в'язка матриць має кратні скінченні і нескінченні елементарні дільники. З використанням теорії поліноміальних матричних в'язок у цій роботі було встановлено, що за виконання певних умов, які мають задовольняти коефіцієнти даної системи, її лінійно незалежні розв'язки можна побудувати у вигляді асимптотичних розвинень за степенями $\sqrt[k]{\varepsilon}$, де k — кратність відповідних елементарних дільників. Однак питання про те, яким чином будувати розв'язки системи (1.1) у випадку, коли знайдені умови не виконуються, залишилось відкритим.

Аналогічну проблему для систем рівнянь першого порядку було розв'язано в роботах [1 – 3] з використанням методу діаграм Ньютона. У даній роботі цей метод застосовано й до системи (1.1), що дозволило узагальнити результати, отримані в [3], на системи рівнянь вищих порядків.

2. Виведення рівняння розгалуження для розв'язків першої групи. Першу групу розв'язків системи (1.1), що відповідають скінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць $P(t,\lambda)$, будемо шукати у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t (\lambda_0(\tau) + \lambda(\tau,\varepsilon))\,d\tau\right), \tag{2.1}$$

де $u(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, а $\lambda(t,\varepsilon)$ — шукана скалярна функція.

Підставимо в систему рівнянь (1.1) вектор (2.1). Для цього скористаємося формулою [8]

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\sum_{\gamma=0}^{j} \varepsilon^{-jh} C_k^i C_j^\gamma D_{i-j}\left[\lambda_0^{j-\gamma}\lambda^\gamma\right] \times$$

$$\times \frac{d^{k-i}u(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}} \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t (\lambda_0(\tau) + \lambda(\tau,\varepsilon))\,d\tau\right), \quad k = \overline{0,m},$$

де $D_i[\lambda^j]$ — сума всіх можливих добутків i операторів диференціювання $D = \dfrac{d}{dt}$, які діють на вирази, розміщені справа від них, та j скалярних функцій $\lambda(t,\varepsilon)$, причому останнім множником у всіх доданках має бути $\lambda(t,\varepsilon)$. В результаті отримаємо

$$P(t,\lambda_0)u = -F(t,\lambda,\varepsilon)u, \tag{2.2}$$

де

$$F(t,\lambda,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \Gamma_k(t,\lambda,\varepsilon), \tag{2.3}$$

$\Gamma_k(t,\lambda,\varepsilon)$, $k = \overline{0,m}$, — оператори, які визначаються за формулами

$$\Gamma_0(t,\lambda,\varepsilon) = \sum_{s\geq 1} \varepsilon^s P^{(s)}(t,\lambda_0) + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-i} \varepsilon^{ih} D_i[\lambda_0^j] A_{i+j}(t,\varepsilon) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}\sum_{\gamma=1}^{m-i+1} \varepsilon^{ih} C_{i+\gamma-1}^{i+\gamma-j-1} D_{i-j}[\lambda_0^{\gamma-1}] A_{i+\gamma-1}(t,\varepsilon)\, \frac{d^j}{dt^j},$$

$$\Gamma_k(t,\lambda,\varepsilon) = \lambda^k \frac{\partial^k P(t,\lambda_0,\varepsilon)}{k!\partial\lambda^k} + \sum_{i=1}^{m-k}\sum_{j=1}^{m-k-i+1} \varepsilon^{ih} C_{j+k-1}^{k} D_i[\lambda^k \lambda_0^{j-1}] A_{i+j+k-1}(t,\varepsilon) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-k}\sum_{j=1}^{i}\sum_{\gamma=1}^{m-k-i+1} \varepsilon^{ih} C_{\gamma+k-1}^{k} C_{i+\gamma+k-1}^{i+\gamma+k-j-1} D_{i-j}[\lambda^k \lambda_0^{\gamma-1}] \times$$

$$\times A_{i+\gamma+k-1}(t,\varepsilon) \frac{d^j}{dt^j}, \quad k = \overline{1,m-1},$$

$$\Gamma_m(t,\lambda,\varepsilon) = \lambda^m \frac{\partial^m P(t,\lambda_0,\varepsilon)}{m!\partial\lambda^m},$$

$$P(t,\lambda,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i(t,\varepsilon).$$

Враховуючи умову 1°, оператори $\Gamma_k(t,\lambda,\varepsilon)$, $k = \overline{0,m}$, можна записати у вигляді рівномірних асимптотичних розвинень за степенями малого параметра:

$$\Gamma_0(t,\lambda,\varepsilon) = \sum_{s\geq 1} \varepsilon^s \Gamma_0^{(s)}(t),$$

$$\Gamma_k(t,\lambda,\varepsilon) = \sum_{s\geq 0} \varepsilon^s \Gamma_k^{(s)}(t,\lambda), \quad k = \overline{1,m},$$

коефіцієнти яких визначаються за формулами

$$\Gamma_0^{(s)}(t) = P^{(s)}(t,\lambda_0) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}\sum_{\gamma=1}^{m-i+1} C_{i+\gamma-1}^{i+\gamma-j-1} D_{i-j}[\lambda_0^{\gamma-1}] A_{i+\gamma-1}^{(s-ih)}(t)\frac{d^j}{dt^j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-i} D_i[\lambda_0^j] A_{i+j}^{(s-ih)}(t), \quad s = 1,2,\ldots,$$

$$\Gamma_k^{(s)}(t,\lambda) = \lambda^k \frac{\partial^k P^{(s)}(t,\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k} + \sum_{i=1}^{m-k}\sum_{j=1}^{i}\sum_{\gamma=1}^{m-k-i+1} C_{\gamma+k-1}^{k} C_{i+\gamma+k-1}^{i+\gamma+k-j-1} D_{i-j}[\lambda^k\lambda_0^{\gamma-1}] A_{i+\gamma+k-1}^{(s-ih)}(t)\frac{d^j}{dt^j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-k}\sum_{j=1}^{m-k-i+1} C_{j+k-1}^{k} D_i[\lambda^k\lambda_0^{j-1}] A_{i+j+k-1}^{(s-ih)}(t), \quad k = \overline{1,m-1}, \quad s = 0,1,\ldots,$$

$$\Gamma_m(t,\lambda) = \lambda^m \frac{\partial^m P^{(s)}(t,\lambda_0)}{m!\partial\lambda^m}, \quad s = 0,1,\ldots.$$

Таким чином, задача визначення функції $\lambda(t,\varepsilon)$ і вектора $u(t,\varepsilon)$ звелась до задачі про збурення власного значення $\lambda_0(t)$ та відповідного власного вектора $\varphi(t)$ поліноміальної в'язки матриць $P(t,\varepsilon)$ під дією збурювальних операторів $\Gamma_k(t,\lambda,\varepsilon)$, $k = \overline{0,m}$.

Вектор $u(t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння (2.2) тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$(F(t,\lambda,\varepsilon)u(t,\varepsilon), \psi(t)) = 0, \tag{2.4}$$

де $\psi(t)$ — елемент нуль-простору матриці $P^*(t,\lambda_0)$, спряженої до матриці $P(t,\lambda_0)$.

При її виконанні $u(t,\varepsilon) = -H(t)F(t,\lambda,\varepsilon)u(t,\varepsilon) + c\varphi(t)$, де c — довільний скалярний множник, а $H(t)$ — узагальнена обернена матриця до матриці $P(t,\lambda_0)$. Поклавши $c = 1$, матимемо $(E + H(t)F(t,\lambda,\varepsilon))\,u(t,\varepsilon) = \varphi(t)$, де E — одинична матриця n-го порядку. Це рівняння формально задовольняється, якщо вектор $u(t,\varepsilon)$ подати у вигляді

$$u(t,\varepsilon) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(H(t)F(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k \varphi(t). \tag{2.5}$$

Підставивши (2.5) у (2.4), отримаємо шукане рівняння розгалуження

$$L(\lambda,\varepsilon) \equiv \left(\sum_{k=0}^{\infty} F(t,\lambda,\varepsilon)\left(H(t)F(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k \varphi(t), \psi(t)\right) = 0.$$

Ввівши позначення

$$\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} F(t,\lambda,\varepsilon)\left(H(t)F(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k, \tag{2.6}$$

запишемо його у вигляді

$$L(\lambda,\varepsilon) \equiv \left(\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon)\varphi(t),\psi(t)\right) = 0.$$

За виконання цієї умови вектор $u(t,\varepsilon)$ визначатимемо з рівняння (2.5) за формулою

$$u(t,\varepsilon) = \varphi(t) - H(t)\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon)\varphi(t). \tag{2.7}$$

Подамо операторні вирази $L(\lambda,\varepsilon)$, $\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon)$ у вигляді формальних розвинень за степенями малого параметра

$$L(\lambda,\varepsilon) = \sum_{k+s\geq 0} \varepsilon^s L_{ks}[\lambda^k], \quad \widetilde{L}(\lambda,\varepsilon) = \sum_{k+s\geq 0} \varepsilon^s \widetilde{L}_{ks}[\lambda^k], \tag{2.8}$$

де k — сумарний степінь функції $\lambda(t,\varepsilon)$, що входить в операторні функції $L_{ks}[\lambda^k]$, $\widetilde{L}_{ks}[\lambda^k]$.

Згідно з (2.6), (2.3) маємо

$$H(t)\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(H(t)F(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\sum_{s=0}^{m} H(t)\Gamma_s(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k.$$

Розглянемо вирази $\left(\sum_{s=0}^{m} H(t)\Gamma_s(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k$, $k = 1,2,\ldots$. Методом математичної індукції неважко переконатися, що в загальному випадку справджується формула

$$\left(\sum_{s=0}^{m} H(t)\Gamma_s(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k = \sum_{s=0}^{mk} \widetilde{P}_{k,s}(H\Gamma),$$

де

$$\widetilde{P}_{k,s}(H\Gamma) = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_k=s} H\Gamma_{s_1} H\Gamma_{s_2}\ldots H\Gamma_{s_k}$$

— сума всіх можливих добутків k операторів $H\Gamma_{s_i}$, сума індексів s_i яких дорівнює s, причому індекси s_i набувають значень із множини $\{0,1,\ldots,m\}$.

Тому

$$H(t)\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{mk}(-1)^{k+1}\widetilde{P}_{k,s}(H\Gamma).$$

Згрупувавши в цьому виразі доданки з однаковими степенями ε, після нескладних перетворень, пов'язаних із зміною порядку підсумовування та заміною індексів, дістанемо

$$H(t)\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\varepsilon^s \widetilde{W}_{H\Gamma}^{(s)}[0,\ldots,0,0,j] +$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{mi_m+\ldots+2i_2+i_1=k}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\ldots+i_2+i_1+j-1}\varepsilon^s \widetilde{W}_{H\Gamma}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j],$$

де $\widetilde{W}_{H\Gamma}^{(s)}[i_m, \ldots, i_2, i_1, i_0]$ — сума всіх можливих добутків операторів $H\Gamma_k^{(s_{ki})}$, $k = \overline{0, m}$, сума верхніх індексів яких s_{k_i} дорівнює s ($s_{ki} \in N \cup \{0\}, k = \overline{1, m}, s_{0i} \in N$).

Із урахуванням проведених перетворень рівняння розгалуження набере вигляду

$$L(\lambda, \varepsilon) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j-1} \varepsilon^s \left(W_{H\Gamma}^{(s)}[0, \ldots, 0, 0, j] \varphi(t), \psi(t) \right) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{mi_m + \ldots + 2i_2 + i_1 = k} \sum_{j=0}^{s} (-1)^{i_m + \ldots + i_2 + i_1 + j - 1} \varepsilon^s \times$$

$$\times \left(W_{H\Gamma}^{(s)}[i_m, \ldots, i_2, i_1, j] \varphi(t), \psi(t) \right) = 0, \tag{2.9}$$

де вирази $W_{H\Gamma}^{(s)}[i_m, \ldots, i_2, i_1, j]$ на відміну від виразів $\widetilde{W}_{H\Gamma}^{(s)}[i_m, \ldots, i_2, i_1, j]$ не містять в усіх їхніх доданках перший множник $H(t)$.

Звідси дістанемо такі вирази для коефіцієнтів розвинення (2.8):

$$L_{00} = 0, \quad L_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j-1} \left(W_{H\Gamma}^{(s)}[0, \ldots, 0, 0, j] \varphi(t), \psi(t) \right), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{2.10}$$

$$L_{k0}[\lambda^k] = \sum_{mi_m + \ldots + 2i_2 + i_1 = k} (-1)^{i_m + \ldots + i_2 + i_1 - 1} \times$$

$$\times \left(W_{H\Gamma}^{(0)}[i_m, \ldots, i_2, i_1, 0] \varphi(t), \psi(t) \right), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.11}$$

$$L_{ks}[\lambda^k] = \sum_{mi_m + \ldots + 2i_2 + i_1 = k} \sum_{j=0}^{s} (-1)^{i_m + \ldots + i_2 + i_1 + j - 1} \varepsilon^s \times$$

$$\times \left(W_{H\Gamma}^{(s)}[i_m, \ldots, i_2, i_1, j] \varphi(t), \psi(t) \right), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{2.12}$$

Введемо позначення

$$H_j(t) = -H(t) \frac{\partial^j P(t, \lambda_0)}{j! \partial \lambda^j}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.13}$$

Використавши рекурентні формули

$$\sigma^1(H_1, H_2, \ldots, H_m) = E,$$

$$\sigma^i(H_1, H_2, \ldots, H_m) = \sum_{j=1}^{\min(i-1, m)} H_j(t) \sigma^{i-j}(H_1, H_2, \ldots, H_m), \quad i = 2, 3, \ldots, \tag{2.14}$$

вирази (2.11) можна записати у вигляді

$$L_{k0}[\lambda^k] = \lambda^k \sum_{j=1}^{\min(k,m)} \left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0)}{j!\partial\lambda^j} \sigma^{k+1-j}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t), \psi(t) \right), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{2.15}$$

Оскільки згідно з умовою 4° в'язка матриць $P(t,\lambda)$ має скінченний елементарний дільник кратності p, то, як показано в [7], за рахунок вибору вектора $\psi(t)$ можна домогтися, щоб виконувались співвідношення

$$\sum_{j=1}^{\min(k,m)} \left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0)}{j!\partial\lambda^j} \sigma^{k+1-j}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t), \psi(t) \right) = \delta_{k,p}, \quad k = \overline{1,p}, \tag{2.16}$$

$\delta_{k,p}$ — символ Кронекера. Отже,

$$L_{k0}[\lambda^k] = \lambda^k \delta_{k,p}, \quad k = \overline{1,p}. \tag{2.17}$$

Взявши до уваги (2.17), (2.8), рівняння (2.9) запишемо у вигляді

$$\lambda^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda^k L_{k0} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{ks}[\lambda^k] = 0, \tag{2.18}$$

де

$$L_{k0} = \sum_{j=1}^{\min(k,m)} \left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0)}{j!\partial\lambda^j} \sigma^{k+1-j}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t), \psi(t) \right), \quad k = p+1, p+2, \ldots . \tag{2.19}$$

При цьому згідно з (2.7) відповідний вектор $u(t,\varepsilon)$ зображується розвиненням

$$u(t,\varepsilon) = \varphi(t) - \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H(t)\widetilde{L}_{0s}\varphi(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k H(t)\widetilde{L}_{k0}\varphi(t) - \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^s H(t)\widetilde{L}_{ks}[\lambda^k]\varphi(t), \tag{2.20}$$

де

$$\widetilde{L}_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j-1} W_{H\Gamma}^{(s)}[0, \ldots, 0, 0, j], \quad s = 1, 2, \ldots,$$

$$\widetilde{L}_{k0} = \sum_{j=1}^{\min(k,m)} \frac{\partial^j P(t,\lambda_0)}{j!\partial\lambda^j} \sigma^{k+1-j}(H_1, H_2, \ldots, H_m), k = 1, 2, \ldots,$$

$$\widetilde{L}_{ks}[\lambda^k] = \sum_{mi_m+\ldots+2i_2+i_1=k} \sum_{j=0}^{s} (-1)^{i_m+\ldots+i_2+i_1+j-1} \times$$

$$\times W_{H\Gamma}^{(s)}[i_m, \ldots, i_2, i_1, j], \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots . \tag{2.21}$$

В результаті приходимо до такої теореми.

Теорема 2.1. *Для того щоб вектор (2.1) був формальним розв'язком системи диференціальних рівнянь (1.1), необхідно і достатньо, щоб функція $\lambda(t,\varepsilon)$ задовольняла рівняння розгалуження (2.18), коефіцієнти якого виражаються формулами (2.10), (2.12), (2.19). Відповідна вектор-функція $u(t,\varepsilon)$ зображується формальним розвиненням (2.20), коефіцієнти якого виражаються формулами (2.21).*

3. Виведення рівняння розгалуження для розв'язків другої групи. Згідно з [3] розв'язки другої групи, що відповідають нескінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць $P(t,\lambda)$, будемо шукати у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = v(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau,\varepsilon)}\right), \tag{3.1}$$

де $v(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, а $\xi(t,\varepsilon)$ — скалярна функція.

Підставивши вираз (3.1) у систему рівнянь (1.1) і використавши формулу

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon^{-jh}C_k^i D_{i-j}\left[\frac{1}{\xi^j}\right]\frac{d^{k-i}v(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\frac{d\tau}{\xi(\tau,\varepsilon)}\right), \quad k=\overline{0,m},$$

виведену у [8], отримаємо

$$A_m^{(0)}(t)v = -\Phi(t,\xi,\varepsilon)v, \tag{3.2}$$

де

$$\Phi(t,\xi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} Q_k(t,\xi,\varepsilon), \tag{3.3}$$

а оператори $Q_k(t,\xi,\varepsilon)$, $k=\overline{0,m}$, визначаються за формулами

$$Q_0(t,\varepsilon) = \sum_{s\geq 1}\varepsilon^s A_m^{(s)}(t),$$

$$Q_k(t,\xi,\varepsilon) = \varepsilon^{kh}\xi^m\sum_{i=0}^{k}C_m^{m-i}D_{k-i}\left[\frac{1}{\xi^{m-k}}\right]A_m(t,\varepsilon)\frac{d^i}{dt^i} +$$

$$+\xi^m\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon^{ih}C_{i+m-k}^{j+m-k}D_j\left[\frac{1}{\xi^{m-k}}\right]A_{i+m-k}(t,\varepsilon)\frac{d^{i-j}}{dt^{i-j}}, \quad k=\overline{1,m-1},$$

$$Q_m(t,\xi,\varepsilon) = \varepsilon^{mh}\xi^m A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m}{dt^m} + \xi^m\sum_{i=0}^{m-1}\varepsilon^{ih}A_i(t,\varepsilon)\frac{d^i}{dt^i}.$$

Згідно з умовою 1° оператори $Q_k(t,\xi,\varepsilon)$, $k=\overline{0,m}$, можна записати у вигляді розвинень за степенями ε:

$$Q_0(t,\varepsilon)=\sum_{s\geq 1}\varepsilon^s Q_0^{(s)}(t),\quad Q_k(t,\xi,\varepsilon)=\sum_{s\geq 0}\varepsilon^s Q_k^{(s)}(t,\xi),\quad k=\overline{1,m},$$

коефіцієнти яких визначаються за формулами

$$Q_0^{(s)}(t)=A_m^{(s)}(t),\quad s=1,2,\ldots,$$

$$Q_k^{(s)}(t,\xi)=\xi^m\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}C_{i+m-k}^{j+m-k}D_j\left[\frac{1}{\xi^{m-k}}\right]A_{i+m-k}^{(s-ih)}(t)\frac{d^{i-j}}{dt^{i-j}},\quad k=\overline{1,m-1},\quad s=0,1,\ldots,$$

$$Q_m^{(s)}(t,\xi)=\xi^m\sum_{i=0}^{m}A_i^{(s-ih)}(t)\frac{d^i}{dt^i},\quad s=0,1,\ldots.$$

Отже, задача пошуку функції $\xi(t,\varepsilon)$ та вектор-функції $v(t,\varepsilon)$ звелася до задачі про збурення нульового власного значення і відповідного власного вектора $\widetilde{\varphi}(t)$ в'язки матриць

$$N(t,\xi)=\sum_{i=0}^{m}\xi^i A_{m-i}(t,\varepsilon),$$

симетричної в'язці матриць $P(t,\lambda)$.

Вектор $v(t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння (3.2) тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\Big(\Phi(t,\xi,\varepsilon)v(t,\varepsilon),\widetilde{\psi}(t)\Big)=0, \tag{3.4}$$

де $\widetilde{\psi}(t)$ — елемент нуль-простору матриці $\Big(A_m^{(0)}(t)\Big)^*$, спряженої до матриці $A_m^{(0)}(t)$. При її виконанні $v(t,\varepsilon)=-G(t)\Phi(t,\xi,\varepsilon)v(t,\varepsilon)+c\widetilde{\varphi}(t)$, де c — довільний скалярний множник, а $G(t)$ — матриця, узагальнено-обернена до матриці $A_m^{(0)}(t)$. Поклавши $c=1$, матимемо $(E+G(t)\Phi(t,\xi,\varepsilon))\,v(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t)$. Це рівняння формально задовольняється, якщо вектор $v(t,\varepsilon)$ подати у вигляді формального ряду

$$v(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(G(t)\Phi(t,\xi,\varepsilon)\right)^k\widetilde{\varphi}(t). \tag{3.5}$$

Підставивши (3.5) у (3.4), отримаємо шукане рівняння розгалуження:

$$M(\xi,\varepsilon)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big(\Phi(t,\xi,\varepsilon)\left(G(t)\Phi(t,\xi,\varepsilon)\right)^k\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big)=0. \tag{3.6}$$

Позначивши

$$\widetilde{M}(\xi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Phi(t,\xi,\varepsilon)\left(G(t)\Phi(t,\xi,\varepsilon)\right)^k, \tag{3.7}$$

запишемо його у вигляді

$$M(\xi,\varepsilon) \equiv \left(\widetilde{M}(\xi,\varepsilon)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) = 0. \tag{3.8}$$

У свою чергу з (3.5) отримуємо

$$v(t,\varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t) - G(t)\widetilde{M}(\xi,\varepsilon)\widetilde{\varphi}(t).$$

Запишемо (3.6), (3.7) у вигляді формальних розвинень за степенями ε:

$$M(\xi,\varepsilon) = \sum_{k+s\geq 0} \varepsilon^s M_{ks}[\xi^k], \quad \widetilde{M}(\xi,\varepsilon) = \sum_{k+s\geq 0} \varepsilon^s \widetilde{M}_{ks}[\xi^k]. \tag{3.9}$$

Згідно з (3.3), (3.7) маємо

$$G(t)M(\xi,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\sum_{i=0}^{m} Q_i(t,\xi,\varepsilon)\right)^k.$$

Міркуючи далі так само, як і в пункті 2, одержуємо

$$G(t)M(\xi,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\varepsilon^s \widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[0,\ldots,0,0,j]+$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{mi_m+\ldots+2i_2+i_1=k}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\ldots+i_2+i_1+j-1}\varepsilon^s \widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j],$$

де $\widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]$ — сума всіх можливих добутків операторів $GQ_k^{(s_{ki})}$, $k = \overline{0,m}$, сума верхніх індексів s_{ki} яких дорівнює s ($s_{ki} \in N\cup\{0\}, k = \overline{1,m}, s_{0i} \in N$).

Тоді рівняння розгалуження (3.8) набере вигляду

$$M(\xi,\varepsilon) \equiv \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\varepsilon^s \left(W_{GQ}^{(s)}[0,\ldots,0,0,j]\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) +$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{mi_m+\ldots+2i_2+i_1=k}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\ldots+i_2+i_1+j-1}\varepsilon^s \times$$

$$\times\left(W_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) = 0, \tag{3.10}$$

де вирази $W_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]$ на відміну від виразів $\widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]$ не містять в усіх їхніх доданках перший множник $G(t)$.

З рівняння (3.10) отримаємо такі вирази для коефіцієнтів розвинення (3.9):

$$M_{00} = 0, \quad M_{0s} = \sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\left(W_{GQ}^{(s)}[0,\ldots,0,0,j]\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right), \quad s = 1,2,\ldots, \tag{3.11}$$

$$
\begin{aligned}
M_{k0}[\xi^k] = & \sum_{mi_m+\ldots+2i_2+i_1=k} (-1)^{i_m+\ldots+i_2+i_1-1} \times \\
& \times \left(W_{GQ}^{(0)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,0]\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \right), \quad k=1,2,\ldots, \\
M_{ks}[\xi^k] = & \sum_{mi_m+\ldots+2i_2+i_1=k} \sum_{j=0}^{s} (-1)^{i_m+\ldots+i_2+i_1+j-1} \times \\
& \times \left(W_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \right), \quad k=1,2,\ldots, \quad s=1,2,\ldots.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Поклавши

$$G_j(t) = -G(t)\frac{\partial^j N(t,0)}{j!\partial\xi^j}, \quad j=\overline{1,m},$$

і використавши рекурентні формули

$$\sigma^1(G_1,G_2,\ldots,G_m) = E,$$

$$\sigma^i(G_1,G_2,\ldots,G_m) = \sum_{j=1}^{\min(i-1,m)} G_j(t)\sigma^{i-j}(G_1,G_2,\ldots,G_m), \quad i=2,3,\ldots,$$

з (3.12) дістанемо

$$M_{k0}[\xi^k] = \xi^k \sum_{j=1}^{\min(k,m)} \left(\frac{\partial^j N(t,0)}{j!\partial\xi^j}\,\sigma^{k+1-j}(G_1,G_2,\ldots,G_m)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \right), \ \ k=1,2,\ldots. \tag{3.13}$$

Оскільки згідно з умовою 4° в'язка матриць $P(t,\lambda)$ має нескінченний елементарний дільник кратності q, то, як показано у [7], за рахунок вибору вектора $\widetilde{\psi}(t)$ можна домогтися, щоб виконувались співвідношення

$$\sum_{j=1}^{\min(k,m)} \left(\frac{\partial^j N(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{k+1-j}(G_1,G_2,\ldots,G_m)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \right) = \delta_{k,q}, \quad k=\overline{1,q}.$$

Звідси випливає, що

$$M_{k0}[\xi^k] = \xi^k\delta_{k,q}, \quad k=\overline{1,q}. \tag{3.14}$$

Тому згідно з (3.9) рівняння розгалуження (3.10) можна записати у вигляді

$$\xi^q + \sum_{k=q+1}^{\infty}\xi^k M_{k0} + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s M_{0s} + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^s M_{ks}[\xi^k] = 0, \tag{3.15}$$

де

$$M_{k0} = \sum_{j=1}^{\min(k,m)} \left(\frac{\partial^j N(t,0)}{j!\partial\xi^j} \sigma^{k+1-j}(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \right), \quad k = q+1, q+2, \ldots, \tag{3.16}$$

а вектор $v(t,\varepsilon)$ зображується розвиненням

$$v(t,\varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k G(t)\widetilde{M}_{k0}\widetilde{\varphi}(t) - \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s G(t)\widetilde{M}_{0s}\widetilde{\varphi}(t) - \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^s G(t)\widetilde{M}_{ks}[\xi^k]\widetilde{\varphi}(t), \tag{3.17}$$

коефіцієнти якого виражаються формулами

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_{0s} &= \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j-1} W_{GQ}^{(s)}[0, \ldots, 0, 0, j], \quad s = 1, 2, \ldots, \\
\widetilde{M}_{k0} &= \sum_{j=1}^{\min(k,m)} \frac{\partial^j N(t,0)}{j!\partial\xi^j} \sigma^{k+1-j}(G_1, G_2, \ldots, G_m), \quad k = 1, 2, \ldots, \\
\widetilde{M}_{ks}[\xi^k] &= \sum_{mi_m + \ldots + 2i_2 + i_1 = k} \sum_{j=0}^{s} (-1)^{i_m + \ldots + i_2 + i_1 + j - 1} \times \\
&\quad \times W_{GQ}^{(s)}[i_m, \ldots, i_2, i_1, j], \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Цим самим доведено таку теорему.

Теорема 3.1. *Для того щоб вектор (3.1) був формальним розв'язком системи диференціальних рівнянь (1.1), необхідно і достатньо, щоб функція $\xi(t,\varepsilon)$ була розв'язком рівняння розгалуження (3.15), коефіцієнти якого визначаються за формулами (3.11), (3.12), (3.16). Відповідна вектор-функція $v(t,\varepsilon)$ зображується розвиненням (3.17), коефіцієнти якого визначаються за формулами (3.18).*

4. Аналіз рівнянь розгалуження. Використовуючи метод діаграм Ньютона [3], дослідимо структуру формальних розв'язків системи рівнянь (1.1) залежно від поведінки коефіцієнтів рівнянь розгалуження (2.18), (3.15).

Згідно з цим методом, щоб знайти вигляд розв'язків $\lambda(t,\varepsilon)$ рівняння (2.18), кожному відмінному від нуля коефіцієнту $L_{ks}[\lambda^k]$ поставимо у відповідність точку (k,s) у прямокутній системі координат Oks (рис. 1). Навколо точки $A_0(0,s_0)$, що знаходиться найближче до осі Ok, проти руху годинникової стрілки обертатимемо пряму, доки вона не зустрінеться з деякою точкою $A_1(k_1,s_1)$. Потім пряму в тому самому напрямку обертатимемо навколо точки A_1, доки вона не зустрінеться з точкою $A_2(k_2,s_2)$, і так далі. З'єднавши отримані точки, дістанемо відповідну діаграму Ньютона.

Зауважимо, що коли на осі Os немає точок, побудову діаграми необхідно починати з подібної точки прямої $k = 1$. Якщо ж і на прямих $k = j$, $j < i$, немає точок, то побудову діаграми треба починати з прямої $k = i$.

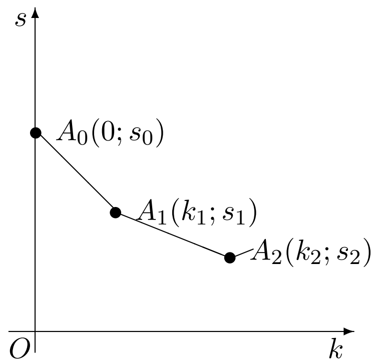

Рис. 1

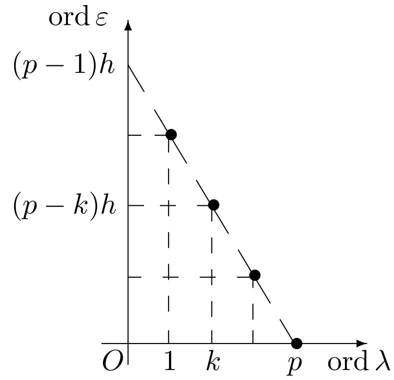

Рис. 2

Нехай $\frac{r}{l}$ — тангенс кута нахилу деякої ланки $A_{i-1}A_i$ до від'ємного напрямку осі Ok. Тоді цій ланці відповідатиме розв'язок рівняння (2.18), який зображується у вигляді розвинення

$$\lambda(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{r}{l}}\lambda_1(t) + \sum_{i\geq 2}\varepsilon^{\frac{r+i-1}{l}}\lambda_i(t), \tag{4.1}$$

якщо визначальне рівняння $\sum' L_{ks}[\lambda_1^k] = 0$ має простий ненульовий корінь (символом $\sum'$ позначаємо суму виразів $L_{ks}[\lambda_1^k]$ таких, що $(k,s) \in A_{i-1}A_i$).

Якщо $\lambda_1(t)$ — тотожно кратний корінь визначального рівняння, то в розвиненні (4.1) зберігається лише перший член, а для знаходження наступних членів потрібно використати нове рівняння розгалуження, виконавши у (2.18) заміну $\lambda(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{r}{l}}\lambda_1(t) + \eta(t,\varepsilon)$. Якщо відповідне визначальне рівняння знову матиме кратний корінь, то процедуру слід повторити, і так далі. При цьому, як показано в [1], для кожної ланки діаграми Ньютона можна побудувати стільки розв'язків рівняння (2.18), якою є довжина проекції цієї ланки на вісь абсцис.

Аналогічним способом можна знайти розв'язки рівняння розгалуження (3.22).

Використовуючи цей метод, проаналізуємо рівняння (2.28).

Із формули (2.17) випливає, що на діаграмі немає точок $(k,0)$, $k = \overline{1,p-1}$, але завжди є точка $(p,0)$. Тому довжина проекції всіх ділянок діаграми на вісь абсцис дорівнює p . Це гарантує наявність p малих розв'язків $\lambda(t,\varepsilon)$ рівняння (2.18) з урахуванням їх кратності незалежно від вигляду матриць $A_i^{(s)}(t)$, $i = \overline{0,m}$, $s = 0,1,\ldots$.

Незалежно від структури матриць $A_i^{(s)}(t)$, $i = \overline{0,m}$, $s = 0,1,\ldots$, серед розв'язків рівняння (2.18) може бути не більше одного нульового, оскільки на діаграмі завжди є точки $(k,(p-k)h)$, $k = \overline{1,p-1}$ (рис. 2).

Дійсно, з формули (2.12) маємо

$$L_{k,(p-k)h}[\lambda^k] = \sum_{mi_m+\ldots+2i_2+i_1=k}\ \sum_{j=0}^{(p-k)h}(-1)^{i_m+\ldots+i_1+j-1}\times$$
$$\times\left(W_{H\Gamma}^{((p-k)h)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]\varphi(t),\psi(t)\right), \quad k = \overline{1,p-1}.$$

Зафіксувавши k, виділимо в цьому виразі доданки, які містять похідну $(p-k)$-го порядку від функції $\lambda^k(t,\varepsilon)$. Для цього виконаємо послідовно наступні дії:

1. З виразу $L_{k,(p-k)h}[\lambda^k]$ виділимо доданки

$$\sum_{mi_m+\ldots+2i_2+i_1=k}(-1)^{i_m+\ldots+i_1+j-1}\left(W_{H\Gamma}^{((p-k)h)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]\varphi(t),\psi(t)\right),\quad j=\overline{1,p-k}.$$

2. У виразах $W_{H\Gamma}^{((p-k)h)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]$, $j=\overline{1,p-k}$, виділимо доданки, які задовольняють такі вимоги:

a) вони складаються лише з операторів $\Gamma_0^{(kh)}(t)$, $k=\overline{1,m}$, та $\Gamma_j^{(kh)}(t,\xi)$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{0,m-j}$;

b) оператори $\Gamma_0^{(kh)}(t)$, $k=\overline{1,m}$, у цих доданках знаходяться зліва від операторів $\Gamma_j^{(kh)}(t,\xi)$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{0,m-j}$.

3. З операторів $\Gamma_0^{(kh)}(t)$, $k=\overline{1,m}$, у зазначених доданках виділимо оператори $\dfrac{\partial^k P(t,\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k}D^k$, $k=\overline{1,m}$, а з операторів $\Gamma_j^{(kh)}(t,\xi)$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{0,m-j}$, — оператори $\left(D^k\lambda^j\right)\dfrac{\partial^{k+j}P(t,\lambda_0)}{(k+j)!\partial\lambda^{k+j}}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{0,m-j}$.

Використовуючи позначення (2.13) та рекурентні формули (2.14), після виконання цих дій отримаємо

$$L_{k,(p-k)h}[\lambda^k]=\frac{d^{p-k}\lambda^k}{dt^{p-k}}\sum_{j=1}^{\min(p,m)}\left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0)}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{p+1-j}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t),\psi(t)\right)+$$
$$+\Delta(t,\lambda^k,\varepsilon),\quad k=\overline{1,p-1},$$

або, згідно з (2.16),

$$L_{k,(p-k)h}[\lambda^k]=\frac{d^{p-k}\lambda^k}{dt^{p-k}}+\Delta(t,\lambda^k,\varepsilon),\quad k=\overline{1,p-1},$$

де доданок $\Delta(t,\lambda^k,\varepsilon)$ містить похідні від k функцій $\lambda(t,\varepsilon)$, сумарний порядок яких менший, ніж $p-k$. Звідси випливає, що $L_{k,(p-k)h}[\lambda^k]\neq 0$, $k=\overline{1,p-1}$, незалежно від поведінки коефіцієнтів системи рівнянь (1.1).

В результаті приходимо до такого твердження.

Теорема 4.1. *Незалежно від структури матриць $A_i^{(s)}(t)$, $i=\overline{0,m}$, $s=0,1,\ldots$, рівняння розгалуження (2.18) має p малих розв'язків $\lambda(t,\varepsilon)$ з урахуванням їх кратності, причому не більше одного нульового.*

Проаналізуємо тепер рівняння розгалуження (3.15), що відповідає розв'язкам другої групи. Згідно з (3.14) це рівняння має q малих розв'язків з урахуванням нульових, оскільки на осі абсцис немає точок $(k,0)$, $k=\overline{1,q-1}$, але завжди є точка $(q,0)$ (рис. 3). Однак, на відміну від розв'язків першої групи, вираз (3.1) втрачає сенс, якщо $\xi(t,\varepsilon)=0$. Тому розв'язків другої групи може бути менше, ніж q. Їх кількість дорівнює $q-r$, де r — кратність нульового кореня рівняння розгалуження (3.15). При цьому, в той час як рівняння (2.18) може мати лише простий нульовий корінь завдяки тому, що $L_{k,(p-k)h}[\lambda^k]\neq 0$,

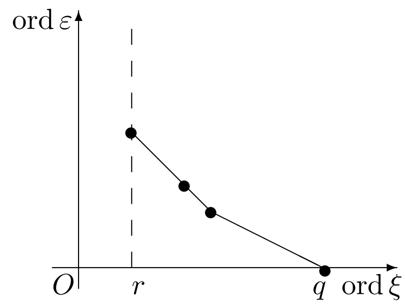

Рис. 3

$k = \overline{1, p-1}$, операторні коефіцієнти $M_{ks}[\xi^k]$ подібної властивості не мають. Тому залежно від структури матриць $A_i^{(s)}(t)$, $i = \overline{0,m}$, $s = 0, 1, \ldots$, кратність нульового розв'язку рівняння (3.15) може змінюватися від 0 до q.

Як випливає з методу діаграм Ньютона, якщо $M_{ks}[\xi^k] \equiv 0$ при $k < r$, $M_{rs}[\xi^r] \neq 0$ при деякому s, то рівняння (3.15) має нульовий розв'язок кратності r і $q - r$ ненульових розв'язків (рис. 3).

Покажемо, що остання умова рівносильна наявності в матриці $A_m(t, \varepsilon)$ жорданового ланцюжка векторів завдовжки r відносно операторів $Q_k(t, \xi, \varepsilon)$, $k = \overline{1, m}$, в яких ξ — довільний скалярний множник.

Нехай вектори $y_k(t, \varepsilon)$, $k = \overline{1, r}$, утворюють цей жорданів ланцюжок. Тоді, оскільки

$$A_m(t, \varepsilon) = A_m^{(0)}(t) + Q_0(t, \varepsilon),$$

виконуються співвідношення

$$\left(A_m^{(0)}(t) + Q_0(t, \varepsilon)\right) y_1 = 0,$$

$$\left(A_m^{(0)}(t) + Q_0(t, \varepsilon)\right) y_k + \sum_{j=1}^{\min(k-1,m)} Q_j(t, \xi, \varepsilon) y_{k-j} = 0, \quad k = \overline{2, r},$$

а рівняння

$$\left(A_m^{(0)}(t) + Q_0(t, \varepsilon)\right) y + \sum_{j=1}^{\min(r,m)} Q_j(t, \xi, \varepsilon) y_{r+1-j} = 0$$

нерозв'язне відносно вектора y.

Розглянемо перше з цих рівнянь, записавши його у вигляді

$$A_m^{(0)}(t) y_1 = -Q_0(t, \varepsilon) y_1.$$

Оскільки воно є розв'язним відносно вектора $y_1(t, \varepsilon)$, то

$$y_1(t, \varepsilon) = -G(t) Q_0(t, \varepsilon) y_1(t, \varepsilon) + c\widetilde{\varphi}(t),$$

де c — довільний скалярний множник. Поклавши $c = 1$, дістанемо

$$(E + G(t)Q_0(t,\varepsilon))\, y_1(t,\varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t).$$

Визначник матриці $E + G(t)Q_0(t,\varepsilon)$ при малих значеннях $\varepsilon > 0$ відмінний від нуля. Тому існує обернена до неї матриця $R(t,\varepsilon) = (E + G(t)Q_0(t,\varepsilon))^{-1}$, яку згідно з [3] можна записати у вигляді ряду

$$R(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \left(G(t)Q_0(t,\varepsilon)\right)^i, \quad y_1(t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)\widetilde{\varphi}(t). \tag{4.2}$$

Оскільки рівняння

$$A_m^{(0)}(t)y_k = -\sum_{j=1}^{\min(k-1,m)} Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j} - Q_0(t,\varepsilon)y_k, \quad k = \overline{2,r},$$

розв'язні відносно векторів $y_k(t,\varepsilon)$, $k = \overline{2,r}$, то мають місце рівності

$$y_k(t,\varepsilon) = c\widetilde{\varphi}(t) - \sum_{j=1}^{\min(k-1,m)} G(t)Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j}(t,\varepsilon) - G(t)Q_0(t,\varepsilon)y_k(t,\varepsilon), \quad k = \overline{2,r}, \tag{4.3}$$

де c — довільний скалярний множник. Поклавши $c = 1$, помноживши отриману рівність зліва на матрицю $R(t,\varepsilon)$ та взявши до уваги (4.2), отримаємо

$$y_k(t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)\widetilde{\varphi}(t) - \sum_{j=1}^{\min(k-1,m)} R(t,\varepsilon)G(t)Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j}(t,\varepsilon), \quad k = \overline{2,r}.$$

З останньої рівності, послідовно виражаючи вектори $y_k(t)$ через власний вектор $\widetilde{\varphi}(t)$, одержуємо

$$y_k(t,\varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t) + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^j\varepsilon^s\widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[0,\ldots,0,0,j]\widetilde{\varphi}(t) +$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{mi_m+\ldots+2i_2+i_1=i}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\ldots+i_2+i_1+j}\varepsilon^s \times$$

$$\times\, \widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]\widetilde{\varphi}(t), \quad k = \overline{1,r}. \tag{4.4}$$

Оскільки за припущенням матриця $A_m(t,\varepsilon)$ має жорданів ланцюжок векторів завдовжки r відносно операторів $Q_k(t,\xi,\varepsilon)$, $k = \overline{1,m}$, то мають місце рівності

$$\left(Q_0(t,\varepsilon)y_k(t,\varepsilon),\widetilde{\psi}(t)\right) + \sum_{j=1}^{\min(k-1,m)}\left(Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j}(t,\varepsilon),\widetilde{\psi}(t)\right) = 0, \quad k = \overline{2,r},$$

$$\left(Q_0(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon),\widetilde{\psi}(t)\right) + \sum_{j=1}^{\min(r,m)}\left(Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{r+1-j}(t,\varepsilon),\widetilde{\psi}(t)\right) \neq 0. \tag{4.5}$$

Розглянемо вирази $G(t)Q_0(t,\varepsilon)y_k(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{\min(k-1,m)} G(t)Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j}(t,\varepsilon)$, $k = \overline{2,r}$.

З (4.3) (при $c = 1$) маємо

$$G(t)Q_0(t,\varepsilon)y_k(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{\min(k-1,m)} G(t)Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j}(t,\varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t) - y_k(t,\varepsilon), \quad k = \overline{2,r}.$$

Підставивши сюди (4.4), отримаємо

$$Q_0(t,\varepsilon)y_k(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{\min(k-1,m)} Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j}(t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\varepsilon^s W_{GQ}^{(s)}[0,\ldots,0,0,j]\widetilde{\varphi}(t) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{mi_m+\ldots+2i_2+i_1=i}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\ldots+i_2+i_1+j-1}\varepsilon^s \times$$

$$\times W_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]\widetilde{\varphi}(t), \quad k = \overline{2,r}.$$

Із урахуванням цих формул, а також (3.11), (3.12), (3.13), співвідношення (4.5) набирають вигляду

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s M_{0s} + \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon^s M_{is}[\xi^i] = 0, \quad k = \overline{2,r},$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s M_{0s} + \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\varepsilon^s M_{is}[\xi^i] \neq 0,$$

звідки випливає, що $M_{is}[\xi^i] = 0$ при $i = \overline{0,r-1}$, а $M_{rs}[\xi^r] \neq 0$ при деякому s. Це означає, що рівняння розгалуження (3.15) має нульовий корінь кратності r. Правильним також є і обернене твердження.

Підсумуємо наведені викладки у вигляді теореми.

Теорема 4.2. *Кількість розв'язків другої групи, що відповідають нескінченному елементарному дільнику в'язки матриць $P(t,\lambda)$ кратності q, дорівнює $q - r$, де r — довжина жорданового ланцюжка векторів матриці $A_m(t,\varepsilon)$ відносно операторів $Q_k(t,\xi,\varepsilon)$, $k = \overline{1,m}$, в яких ξ — довільний скалярний множник.*

5. Деякі конкретні результати. З теорем 4.1, 4.2 випливає, що система рівнянь (1.1) має $mn - r$ розв'язків: p розв'язків першої групи вигляду (2.1) і $q - r$ розв'язків другої групи вигляду (3.1), де r — довжина жорданового ланцюжка матриці $A_m(t,\varepsilon)$ відносно операторів $Q_k(t,\varepsilon)$, $k = \overline{1,m}$ (вони утворюються з $Q_k(t,\xi,\varepsilon)$ при $\xi = 1$). В сукупності вони утворюють лінійно незалежну систему розв'язків, оскільки вектори $u(t,\varepsilon)$ і $v(t,\varepsilon)$, які в них фігурують, є власними (або приєднаними) векторами збурених операторних в'язок, а функції $\lambda(t,\varepsilon)$ і $\xi(t,\varepsilon)$ — власними значеннями, яким вони відповідають. Як показано в [1], при достатній гладкості елементів матриць $A_k(t,\varepsilon)$, $k = \overline{0,m}$, сталого рангу матриці $A_m(t,\varepsilon)$ саме така кількість лінійно незалежних розв'язків утворює фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь (1.1), а їх лінійна комбінація є її загальним розв'язком.

Таким чином, за відсутності точок повороту і незмінності на заданому відрізку діаграм Ньютона, побудованих за коефіцієнтами відповідних рівнянь розгалуження, описаний метод дозволяє побудувати загальний розв'язок системи (1.1) у вигляді формальних розвинень за дробовими степенями малого параметра. Методами, викладеними у [3], можна показати, що вони є асимптотичними розвиненнями точних лінійно незалежних розв'язків даної системи при $\varepsilon \to 0$.

Виходячи з методу діаграм Ньютона, наведемо деякі конкретні результати, що стосуються побудови розв'язків першої та другої груп системи рівнянь (1.1).

Якщо

$$L_{01}(t) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_0^i(t) \left(A_i^{(1)}(t)\varphi(t), \psi(t) \right) + \delta_{1,h} \sum_{i=1}^{m} C_i^{i-1} \lambda_0^{i-1}(t) \left(A_i^{(0)}(t) \frac{d\varphi(t)}{dt}, \psi(t) \right) +$$
$$+ \delta_{1,h} \sum_{i=2}^{m} D_1[\lambda_0^{i-1}] \left(A_i^{(0)}(t)\varphi(t), \psi(t) \right) \neq 0 \quad \forall t \in [0;T],$$

то діаграма Ньютона для розв'язків першої групи має вигляд відрізка, що з'єднує точки $(0;1)$ та $(p;0)$, нахил якого дорівнює $\frac{1}{p}$ (рис. 4), а відповідне визначальне рівняння $\lambda_1^p + L_{01}(t) = 0$ матиме p простих відмінних від нуля коренів. Тому система рівнянь (1.1) має p формальних розв'язків першої групи, де скалярна функція $\lambda(t,\varepsilon)$ і вектор $u(t,\varepsilon)$ зображуються формальними розвиненнями за степенями $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$:

$$\lambda(t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s \lambda_s(t), u(t,\varepsilon) = \varphi(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s u_s(t). \tag{5.1}$$

Коефіцієнти цих розвинень можна знайти з рівняння розгалуження (2.18) та виразу (2.19). Підставивши (5.1) у (2.18) і прирівнявши вирази при однакових степенях μ, отримаємо нескінченну систему рівнянь відносно функцій $\lambda_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$. Розв'язавши її, отримаємо такі рекурентні формули:

$$\lambda_1(t) = \sqrt[p]{-L_{01}(t)},$$

$$\lambda_{s+1}(t) = -\frac{1}{p\lambda_1^{p-1}(t)} \left[\widetilde{P}_p^{(p+s)}(\lambda) + \sum_{k=p+1}^{p+s} P_k^{(p+s)}(\lambda) L_{k0} + L_{0,s+1} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\left[\frac{p+s-1}{p}\right]} \sum_{i=1}^{p+s-kp} L_{ik} \left[P_i^{(p+s-kp)}(\lambda) \right] \right], \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Підставивши отриманий ряд у (2.19) і згрупувавши доданки зі степенями μ^k, дістанемо відповідні формули для векторів $u_s(t)$:

$$u_s(t) = -\sum_{k=1}^{s} P_k^{(s)}(\lambda)H(t)\widetilde{L}_{k0}\varphi(t) - H(t)\widetilde{L}_{0,s-p+1}\varphi(t)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\left[\frac{s-1}{p}\right]}\sum_{i=1}^{s-kp} H(t)\widetilde{L}_{ik}\left[P_i^{(s-kp)}(\lambda)\right]\varphi(t), \quad s = 1, 2, \ldots .$$

В отриманих рекурентних формулах $P_k^{(s)}(\lambda) = \sum_{k_1+\ldots+k_s=k}\lambda_{k_1}\ldots\lambda_{k_s}$ — сума всеможливих добутків s функцій $\lambda_j(t)$ з натуральними індексами, сума яких дорівнює k, а $\widetilde{P}_p^{(p+s)}(\lambda)$ — частина виразу $P_p^{(p+s)}(\lambda)$, яка містить лише ті функції $\lambda_j(t)$, індекси яких $j \le s$. Цей результат збігається з результатом, отриманим іншим способом у роботі [9].

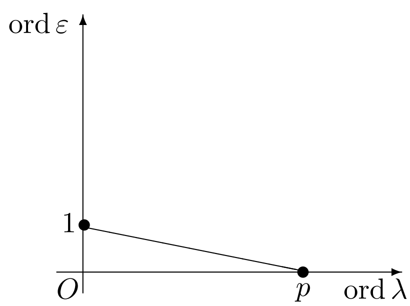

Рис. 4

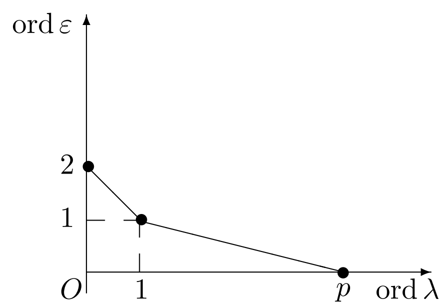

Рис. 5

Якщо $L_{01}(t) \equiv 0\ \forall t \in [0;T]$, але

$$L_{02}(t) = \sum_{i=0}^{m}\lambda_0^i(t)\left(A_i^{(2)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right) + \sum_{i=1}^{m}C_i^{i-1}\lambda_0^{i-1}(t)\left(A_i^{(2-h)}(t)\frac{d\varphi(t)}{dt},\psi(t)\right)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}D_1[\lambda_0^{i-2}]\left(A_i^{(2-2h)}(t)\frac{d\varphi(t)}{dt},\psi(t)\right) + \sum_{i=2}^{m}C_{i-1}^{i-2}\lambda_0^{i-2}\left(A_i^{(2-2h)}(t)\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2},\psi(t)\right)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}D_1[\lambda_0^{i-1}]\left(A_i^{(2-h)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right) + \sum_{i=3}^{m}D_2[\lambda_0^{i-2}]\left(A_i^{(2-2h)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)-$$

$$-\sum_{i=0}^{2m}\sum_{j=0}^{i}\lambda_0^i(t)\left(A_{i-j}^{(1)}(t)H(t)A_j^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)-$$

$$- \sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=1}^{i} C_j^{j-1} \lambda_0^{i-1}(t) \left(A_{i-j}^{(1)}(t) H(t) A_j^{(1-h)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) -$$

$$- \sum_{i=2}^{2m} \sum_{j=2}^{i} \lambda_0^{i-j}(t) D_1[\lambda_0^{j-1}] \left(A_{i-j}^{(1)}(t) H(t) A_j^{(1-h)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=0}^{i-1} C_{i-j}^{i-j-1} \lambda_0^{i-j-1}(t) \left(A_{i-j}^{(1-h)}(t) D \lambda_0^{j}(t) H(t) A_j^{(1)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) -$$

$$- \sum_{i=2}^{2m} \sum_{j=1}^{i-1} C_{i-j}^{i-j-1} C_j^{j-1} \lambda_0^{i-j-1}(t) \left(A_{i-j}^{(1-h)}(t) D \lambda_0^{j-1}(t) H(t) A_j^{(1-h)}(t) \frac{d\varphi(t)}{dt}, \psi(t) \right) -$$

$$- \sum_{i=3}^{2m} \sum_{j=2}^{i-1} C_{i-j}^{i-j-1} \lambda_0^{i-j-1}(t) \left(A_{i-j}^{(1-h)}(t) D D_1[\lambda_0^{j-1}] H(t) A_j^{(1-h)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) -$$

$$- \sum_{i=2}^{2m} \sum_{j=0}^{i-2} D_1[\lambda_0^{i-j-1}] \lambda_0^{j}(t) \left(A_{i-j}^{(1-h)}(t) H(t) A_j^{(1)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) -$$

$$- \sum_{i=3}^{2m} \sum_{j=1}^{i-2} C_j^{j-1} D_1[\lambda_0^{i-j-1}] \lambda_0^{j-1}(t) \left(A_{i-j}^{(1-h)}(t) H(t) A_j^{(1-h)}(t) \frac{d\varphi(t)}{dt}, \psi(t) \right) -$$

$$- \sum_{i=4}^{2m} \sum_{j=2}^{i-2} D_1[\lambda_0^{i-j-1}] D_1[\lambda_0^{j-1}] \left(A_{i-j}^{(1-h)}(t) H(t) A_j^{(1-h)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) \neq 0,$$

$$L_{11}[\lambda_1](t) = \lambda \sum_{i=1}^{m} C_i^{i-1} \lambda_0^{i-1}(t) \left(A_i^{(1)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) +$$

$$+ 2\lambda \delta_{1,h} \sum_{i=2}^{m} C_i^{i-2} \lambda_0^{i-2}(t) \left(A_i^{(0)}(t) \frac{d\varphi(t)}{dt}, \psi(t) \right) +$$

$$+ \delta_{1,h} \sum_{i=2}^{m} C_{i-1}^{1} D_1[\lambda \lambda_0^{i-2}] \left(A_i^{(0)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) -$$

$$- \lambda \sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=0}^{i-1} C_{i-j}^{1} \lambda_0^{i-1}(t) \left(A_{i-j}^{(0)}(t) H(t) A_j^{(1)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) -$$

$$- \lambda \delta_{1,h} \sum_{i=2}^{2m} \sum_{j=1}^{i-1} C_{i-j}^{1} C_j^{1} \lambda_0^{i-2}(t) \left(A_{i-j}^{(0)}(t) H(t) A_j^{(0)}(t) \frac{d\varphi(t)}{dt}, \psi(t) \right) -$$

$$- \lambda\delta_{1,h} \sum_{i=3}^{2m} \sum_{j=2}^{i-1} C_{i-j}^{1} \lambda_0^{i-j-1}(t) D_1[\lambda_0^{j-1}] \left(A_{i-j}^{(0)}(t) H(t) A_j^{(0)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) -$$

$$- \lambda \sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=1}^{i} C_j^1 \lambda_0^{i-1}(t) \left(A_{i-j}^{(1)}(t) H(t) A_j^{(0)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) -$$

$$- \delta_{1,h} \sum_{i=2}^{2m} \sum_{j=1}^{i-1} C_{i-j}^1 C_j^1 \lambda_0^{i-j-1}(t) \left(A_{i-j}^{(0)}(t) D\lambda \lambda_0^{j-1}(t) H(t) A_j^{(0)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) -$$

$$- \lambda\delta_{1,h} \sum_{i=3}^{2m} \sum_{j=1}^{i-2} C_j^1 D_1[\lambda_0^{i-j-1}] \lambda_0^{j-1}(t) \left(A_{i-j}^{(0)}(t) H(t) A_j^{(0)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) \neq 0 \quad \forall t \in [0;T],$$

то при $p > 2$ відповідна діаграма Ньютона має вигляд ламаної, яка з'єднує точки $(0;2)$, $(1;1)$ та $(p;0)$ (рис. 5), а відповідне визначальне рівняння $\lambda_1^p + L_{11}[\lambda_1](t) + L_{02}(t) = 0$ матиме p простих відмінних від нуля коренів. Тому $p-1$ розв'язок першої групи будуються у вигляді розвинень за степенями $\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}$ і один розв'язок будується за цілими степенями ε. Якщо ж $p = 2$, то обидва розв'язки будуються за цілими степенями ε. При цьому, якщо $h = 1$, $p = 2$, коефіцієнти відповідного розвинення функції $\lambda(t,\varepsilon)$ визначаються не з алгебраїчних, а з диференціальних рівнянь.

Наведемо деякі результати щодо розв'язків другої групи.

Якщо

$$M_{01}(t) = \left(A_m^{(1)}(t) \widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \right) \neq 0 \quad \forall t \in [0;T],$$

то відповідна діаграма Ньютона має вигляд відрізка, що з'єднує точки $(0;1)$ та $(q;0)$ (рис. 6), нахил якого дорівнює $\dfrac{1}{q}$, а відповідне визначальне рівняння $\xi_1^q + M_{01}(t) = 0$ матиме q відмінних від нуля коренів. Тому в цьому випадку система рівнянь (1.1) матиме q розв'язків другої групи, а відповідні розвинення для функцій $\xi(t,\varepsilon)$ і векторів $v(t,\varepsilon)$ будуватимуться за степенями $\nu = \varepsilon^{\frac{1}{q}}$:

$$\xi(t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s \xi_s(t), \quad v(t,\varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s v_s(t). \tag{5.2}$$

Коефіцієнти цих розвинень визначаються за рекурентними формулами

$$\xi_1(t) = \sqrt[q]{-M_{01}(t)},$$

$$\xi_{s+1}(t) = -\frac{1}{q\xi_1^{q-1}(t)} \left[\widetilde{P}_q^{(q+s)}(\xi) + \sum_{k=q+1}^{q+s} P_k^{(q+s)}(\xi) M_{k0} + M_{0,s+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\left[\frac{q+s-1}{q}\right]} \sum_{i=1}^{q+s-kq} M_{ik} \left[P_i^{(q+s-kq)}(\xi) \right] \right],$$

$$v_s(t) = -\sum_{k=1}^{s} P_k^{(s)}(\xi) G(t) \widetilde{M}_{k0} \widetilde{\varphi}(t) - G(t) \widetilde{M}_{0,s-q+1} \widetilde{\varphi}(t) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\left[\frac{s-1}{q}\right]} \sum_{i=1}^{s-kq} G(t) \widetilde{M}_{ik} \left[P_i^{(s-kq)}(\xi) \right] \widetilde{\varphi}(t), \quad s = 1, 2, \ldots .$$

Цей результат також збігається з результатом, отриманим іншим способом у [8].

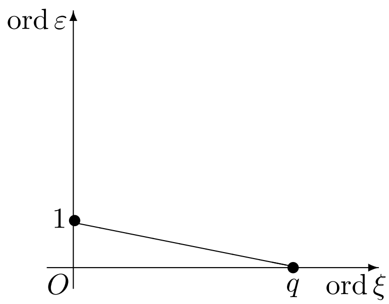

Рис. 6

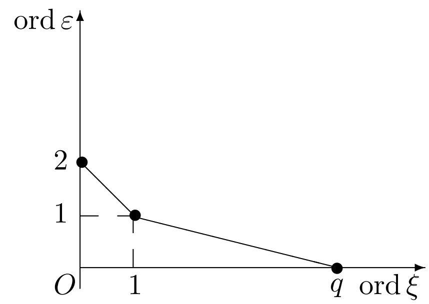

Рис. 7

Якщо ж $M_{01}(t) \equiv 0 \; \forall t \in [0;T]$, але

$$M_{02}(t) = \left(\left(A_m^{(2)}(t) - A_m^{(1)}(t) G(t) A_m^{(1)}(t) \right) \widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \right) \neq 0,$$

$$M_{11}[\xi_0](t) = \xi^m \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{i} C_{i+m-1}^{j+m-1} D_j \left[\frac{1}{\xi^{m-1}} \right] \left(A_{i+m-1}^{(1-ih)}(t) \frac{d^{i-j} \widetilde{\varphi}(t)}{dt^{i-j}}, \widetilde{\psi}(t) \right) -$$

$$- \xi \left(\left(A_{m-1}^{(0)}(t) G(t) A_m^{(1)}(t) + A_m^{(1)}(t) G(t) A_{m-1}^{(0)}(t) \right) \widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \right) \neq 0 \quad \forall t \in [0;T],$$

то відповідна діаграма має вигляд ламаної, що з'єднує точки $(0;2)$, $(1;1)$, $(q;0)$ (рис. 7), а відповідне визначальне рівняння $\xi_0^q + M_{11}[\xi_0](t) + M_{02}(t) = 0$ матиме q простих відмінних від нуля коренів. Якщо $q > 2$, то $q-1$ розв'язок другої групи будуються у вигляді розвинень за степенями $\varepsilon^{\frac{1}{q-1}}$ й один розв'язок будується за цілими степенями ε. Якщо ж $q = 2$, то обидва розв'язки будуються за цілими степенями ε.

Розглянемо ще один випадок, важливий з точки зору практичних застосувань, а саме: вважатимемо, що всі матриці $A_m^{(i)}(t) \equiv 0$ при $i = 1, 2, \ldots$, тобто при старшій похідній в системі (1.1) міститься вироджена матриця $A_m^{(0)}(t)$. У цьому випадку

$$L_{01}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_0^i(t) \left(A_i^{(1)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) + \delta_{1,h} \sum_{i=1}^{m} C_i^{i-1} \lambda_0^{i-1}(t) \left(A_i^{(0)}(t) \frac{d\varphi(t)}{dt}, \psi(t) \right) +$$

$$+ \delta_{1,h} \sum_{i=2}^{m} D_1[\lambda_0^{i-1}] \left(A_i^{(0)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right), \qquad M_{0i}(t) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

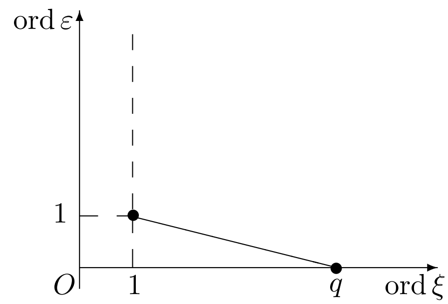

Рис. 8

Якщо $L_{01}(t) \neq 0$ і $M_{11}(t) \neq 0 \; \forall t \in [0;T]$, то діаграма Ньютона, яка відповідає розв'язкам першої групи, являє собою відрізок, що з'єднує точки $(0;1)$ та $(p;0)$ (рис. 4), а друга діаграма — відрізок, що з'єднує точки $(1;1)$ та $(q;0)$ (рис. 8).

В результаті приходимо до такої теореми.

Теорема 5.1. *Нехай у системі (1.1) матриці $A_m^{(i)}(t) \equiv 0$ при $i \geq 1$, гранична в'язка матриць $P(t,\lambda)$ є регулярною і має один скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратності $p > 1$ і один нескінченний кратності $q > 1$. Тоді якщо виконуються умови $L_{01}(t) \neq 0$, $M_{11}(t) \neq 0 \; \forall t \in [0;T]$, то система диференціальних рівнянь (1.1) матиме p формальних розв'язків вигляду (2.1) і $q-1$ розв'язок вигляду (3.1), де функції $\lambda(t,\mu), \xi(t,\nu)$ і вектор-функції $u(t,\mu)$, $v(t,\nu)$ зображуються формальними розвиненнями (5.1), (5.2), в яких $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$, $\nu = \sqrt[q-1]{\varepsilon}$.*

Ця теорема повністю узгоджується з теоремою 1 із [9].

1. *Жукова Г. С.* Метод общего анализа линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и систем: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — М., 1990. — 296 с.
2. *Яковець В. П.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями: Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. — Київ, 1993. — 318 с.
3. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
4. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Вища шк., 1991. — 207 с.
5. *Кушнир В. А.* Асимптотические разложения решений систем линейных дифференциальных уравнений высших порядков з малым параметром при производных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1984. — 139 с.
6. *Кушнір В. А., Кушнір Г. А.* Побудова асимптотичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків з малим параметром при похідних // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2007. — Вип. 8. — С. 139 – 143.
7. *Пафик С. П., Яковець В. П.* Побудова асимптотики розв'язків лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2012. — Вип. 13. — С. 201 – 217.
8. *Пафик С. П.* Асимптотика загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць // Динамические системы. — 2013. — **3(31)**, № 3 – 4. — С. 255 – 274.
9. *Пафик С. П., Яковець В. П.* Про структуру загального розв'язку та умови розв'язності задачі Коші для вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 2. — С. 296 – 306.

Одержано 10.11.14