УДК 517.938

ЛІНІЙНІ НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІМПУЛЬСНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ЧАСОВІЙ ШКАЛІ

О. П. Страх

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 4е

We obtain a solvability condition and a general form of a solution for a Noether problem for linear impulsive dynamic systems on a time scale. A numeric example is also considered.

Получены условие разрешимости, а также общий вид решения нетеровых краевых задач для линейных динамических систем на временной шкале с импульсным воздействием. Рассмотрен численный пример.

Нехай $\mathbb{R}^n$ — простір n-вимірних вектор-функцій $x = \operatorname{col}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з нормою $\|\cdot\|$ і $\mathbb{T} \subset \subset \mathbb{R}$ (непорожня замкнена підмножина множини дійсних чисел) — задана часова шкала. Крім того, для будь-якого $t_0 \in \mathbb{T}$ позначимо $\mathbb{T}_{(t_0)} := [t_0; \infty)_{\mathbb{T}} = [t_0; \infty) \cap \mathbb{T}$ і $\mathbb{T}_+ := \mathbb{T}_{(0)} = = [0; \infty)_{\mathbb{T}}$. Тоді простір $BC_{rd}(\mathbb{T}_{(t_0)}, \mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C_{rd}(\mathbb{T}_{(t_0)}, \mathbb{R}^n) : \sup_{t \in \mathbb{T}_{(t_0)}} \|f(t)\| < +\infty \right\}$ rd-неперервних [1, с. 22] і обмежених на $\mathbb{T}_{(t_0)}$ функцій є банаховим простором з нормою $\|f\| := \sup_{t \in \mathbb{T}_{(t_0)}} \|f(t)\|$. Розглянемо лінійну однорідну динамічну систему вигляду

$$x^{\Delta} = A(t)x, \tag{1}$$

де $x(t) \in C^1_{rd}(\mathbb{T}_{(t_0)}; \mathbb{R}^n)$ — n-вимірний вектор-стовпчик rd-неперервних, Δ-диференційовних функцій, $A(t) \in \mathcal{R}(\mathbb{T}_{(t_0)}; M_n(\mathbb{R}))$ — регресивна [1, с. 190] $(n \times n)$-вимірна матриця, компоненти якої є rd-неперервними функціями. Розглянемо також відповідну їй неоднорідну динамічну систему вигляду

$$x^{\Delta} = A(t)x + f(t), \quad t \in \mathbb{T}_{(t_0)}, \tag{2}$$

де $f(t) \in C_{rd}(\mathbb{T}_{(t_0)}; \mathbb{R}^n)$ — rd-неперервна вектор-функція.

Відомо [1, с. 195], що для довільної функції $f(t)$ дана динамічна система (2) має n-параметричну сім'ю розв'язків вигляду

$$x(t) = e_A(t, t_0)c + F(t), \quad c \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

де $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} e_A(t, \sigma(s)) f(s)\, \Delta s$, $e_A(t, t_0)$ — $(n \times n)$-вимірна матричнозначна функція, яка називається матричною експонентою [1, с. 192] і є аналогом фундаментальної матриці однорідної системи (1), нормованої в точці $t_0 \in \mathbb{T}_{(t_0)}$.

Розглянемо тепер однорідну лінійну імпульсну динамічну систему на часовій шкалі:

$$\begin{aligned} &x^{\Delta} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{T}_+, \quad t \neq t_k, \\ &x(t_k + 0) = x(t_k - 0) + B_k x(t_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

де $x(t) \in C^1_{rd}(\mathbb{T}_{(t_0)} \setminus \{t_k\}; \mathbb{R}^n)$, $B_k \in M_n(\mathbb{R})$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $A(t) \in \mathcal{R}(\mathbb{T}_+; M_n(\mathbb{R}))$, точки t_k є такими, що $0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$ і $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$, $x(t_k \pm 0) = \lim_{t\to t_k \pm 0} x(t)$ (якщо t_k є розсіяною справа, то $x(t_k + 0) = x(t)$, а якщо є розсіяною зліва, то $x(t_k - 0) = x(t)$). Далі припускаємо, що всі точки імпульсу t_k — справа щільні точки.

Для імпульсної динамічної системи (4) ми розглядаємо матрицю імпульсних переходів (у випадку $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ця матриця називається матрицею Коші [3]) $S_A(t, s)$, $0 \le s < t$, асоційовану з послідовністю $\{B_k, t_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$S_A(t,s) = \begin{cases} e_A(t,s), & \text{якщо } t_{k-1} \le s \le t \le t_k; \\ e_A(t, t_k + 0)(I + B_k)e_A(t_k, s), & \text{якщо } t_{k-1} \le s \le t_k < t < t_{k+1}; \\ e_A(t, t_k + 0) \prod_{s < t_j \le t} \left[(I + B_j) \times \right. & \\ \left. \times\, e_A(t_j, t_{j-1} + 0)\right] (I + B_i) e_A(t_i, s), & \text{якщо } t_{i-1} \le s < t_i < \ldots < t_k < t < t_{k+1}. \end{cases}$$

Згідно з результатами з [2] справедливою є наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо $A(t) \in \mathcal{R}(\mathbb{T}_+; M_n(\mathbb{R}))$ і $B_k \in M_n(\mathbb{R})$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то для будь-яких $t_0 \in \mathbb{T}_+$ і $c \in \mathbb{R}^n$ система (4) має n-параметричну сім'ю розв'язків*

$$x(t) = S_A(t, t_0)c, \quad t \ge t_0,$$

де $S_A(t, t_0)$ — фундаментальна матриця для системи (4), нормована в точці t_0.

З даної теореми отримуємо наступний наслідок [2].

Наслідок 1. *Якщо $A(t) \in \mathcal{R}(\mathbb{T}_+; M_n(\mathbb{R}))$ і $B_k \in M_n(\mathbb{R})$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то матриця $S_A(t, s)$, $0 \le s < t$, є єдиним розв'язком матричної задачі Коші*

$$\begin{aligned} &Y^{\Delta} = A(t)Y, \quad t \in \mathbb{T}_{(s)}, \quad t \neq t_k, \\ &Y(t_k + 0) = (I + B_k)Y(t_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \\ &Y(s + 0) = I, \quad s \ge 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Крім цього, матриця $S_A(t, s)$ має наступні властивості:

1) $S_A(t_k + 0, s) = (I + B_k)S_A(t_k, s)$, $s \le t_k$, $k = 1, 2, \ldots$;

2) $S_A(t, t_k + 0) = S_A(t, t_k)(I + B_k)^{-1}$, $t_k \le t$, $k = 1, 2, \ldots$;

3) $S_A(t, t_k + 0)S_A(t_k + 0, s) = S_A(t, s)$, $0 \le s \le t_k \le t$, $k = 1, 2, \ldots$.

Позначимо через $X_A(t)$, $t \in \mathbb{T}_+$, єдиний розв'язок задачі (5) з початковою умовою $Y(0) = I$, тобто $X_A(t) := S_A(t, 0)$, $t \in \mathbb{T}_+$. Тоді якщо $A(t) \in \mathcal{R}(\mathbb{T}_+; M_n(\mathbb{R}))$ і $B_k \in M_n(\mathbb{R})$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то також мають місце [2] наступні властивості матриці $S_A(t, s)$, $0 \le s < t$:

1) $S_A(t, s) = X_A(t)X_A^{-1}(s)$, $0 \le s \le t$;

2) $S_A(t, t) = I$, $t \ge 0$;

3) $S_A(t,s) = S_A^{-1}(s,t)$, $0 \le s \le t$;
4) $S_A(\sigma(t),s) = [I + \mu(t)A(t)]S_A(t,s)$, $0 \le s \le t$;
5) $S_A(t,s)S_A(s,r) = S_A(t,r)$, $0 \le r \le s \le t$.

Нехай $l^\infty(\mathbb{R}^n)$ — простір усіх послідовностей $a := \{a_k\}_{k=1}^\infty$, $a_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$, таких, що $\sup_{k\ge1} \|a_k\| < \infty$. Тоді простір $l^\infty(\mathbb{R}^n)$ є банаховим з нормою $\|a\| := \sup_{k\ge1} \|a_k\|$. Згідно з [2] має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо* $A(t) \in \mathcal{R}(\mathbb{T}_+; M_n(\mathbb{R}))$, $B_k \in M_n(\mathbb{R})$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $a := \{a_k\}_{k=1}^\infty \in l^\infty(\mathbb{R}^n)$ *і* $f(t) \in C_{rd}(\mathbb{T}_+; \mathbb{R}^n)$, *то для будь-яких* $t_0 \in \mathbb{T}_+$ *і* $c \in \mathbb{R}^n$ *неоднорідна лінійна імпульсна динамічна система*

$$x^\Delta = A(t)x + f(t), \quad t \in \mathbb{T}_{t_0}, \quad t \ne t_k,$$
$$x(t_k + 0) = x(t_k) + B_k x(t_k) + a_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

має n*-параметричну сім'ю розв'язків вигляду*

$$x(t) = S_A(t,t_0)c + \int\limits_{t_0}^{t} S_A(t,\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \sum_{t_0<t_j<t} S_A(t,t_j+0)a_j, \quad t \ge t_0.$$

Розглянемо тепер наступну задачу, що складається з лінійної неоднорідної імпульсної динамічної системи та крайової умови:

$$\begin{aligned} &z^\Delta = A(t)z + f(t), \quad t \in [a;b]_{\mathbb{T}_+}, \quad t \ne t_k, \quad t_k \in (a;b)_{\mathbb{T}_+}, \\ &z(t_k+0) = z(t_k) + B_k z(t_k) + a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \\ &lz = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \tag{6}$$

де $z(t) \in C_{rd}^1([a;b]_{\mathbb{T}_+} \setminus \{t_k\}; \mathbb{R}^n)$, $0 \le a < b$, $A(t) \in \mathcal{R}([a;b]_{\mathbb{T}_+}; M_n(\mathbb{R}))$, $B_k \in M_n(\mathbb{R})$ $k = \overline{1,p}$, $\{a_k\}_{k=1}^p \in l^p(\mathbb{R}^n)$, $f(t) \in C_{rd}([a;b]_{\mathbb{T}_+} \setminus \{t_k\}; \mathbb{R}^n)$, l — лінійний векторний функціонал $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Використовуючи відомі результати [4], можна показати, що дана задача є нетеровою, та знайти необхідні й достатні умови її розв'язності. Для цього, як і у випадку $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ [4, с. 196], знаходимо $(n \times m)$-вимірну матрицю $Q = lS_A(\cdot, a)$ та будуємо ортопроектори на ядро і коядро цієї матриці: $P_Q\colon \mathbb{R}^n \to N(Q)$, $P_{Q^*}\colon \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$ відповідно. Тоді згідно з [5] умова розв'язності крайової задачі (6) матиме вигляд

$$P_{Q_d^*}(\alpha - lF) = 0_d, \tag{7}$$

де $P_{Q_d^*}$ — $(d \times m)$-вимірна матриця, що складається з d лінійно незалежних рядків матриці P_{Q^*}, $F(t) = \int_a^t S_A(t,\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \sum_{a<t_j<t} S_A(t,t_j+0)a_j$. Якщо умова (7) виконується,

то крайова задача (6) має r-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$z(t;c_r) = S_A(t,a)P_{Q_r}c_r + S_A(t,a)Q^+\left\{\alpha - l\int\limits_a^{\cdot} S_A(\cdot,\sigma(s))f(s)\,\Delta s - \right.$$

$$\left. - \, l\sum_{a<t_j<\cdot} S_A(\cdot,t_j+0)a_j\right\} + F(t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де P_{Q_r} — $(n\times r)$-вимірна матриця, що складається з r лінійно незалежних стовпців матриці P_Q, Q^+ — $(m\times n)$-вимірна матриця, що є єдиною псевдооберненою за Муром – Пенроузом [4] до матриці Q. Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо* $A(t) \in \mathcal{R}([a;b]_{\mathbb{T}_+}; M_n(\mathbb{R}))$, $B_k \in M_n(\mathbb{R})$ $k = \overline{1,\,p}$, *то неоднорідна крайова задача (6) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли неоднорідності* $f(t) \in C_{rd}([a;b]_{\mathbb{T}_+}/\{t_k\};\mathbb{R}^n)$, $\{a_k\}_{k=1}^p \in l^p(\mathbb{R}^n)$ *та* $\alpha \in \mathbb{R}^m$ *задовольняють умову (7). У цьому випадку задача (6) має r-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків вигляду*

$$z(t;c_r) = S_A(t,a)P_{Q_r}c_r + G\left(\begin{bmatrix} f \\ a_k \\ \alpha \end{bmatrix}\right)(t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де

$$G\left(\begin{bmatrix} f \\ a_k \\ \alpha \end{bmatrix}\right)(t) := F(t) + S_A(t,a)Q^+\left\{\alpha - l\int\limits_a^{\cdot} S_A(\cdot,\sigma(s))f(s)\,\Delta s - l\sum_{a<t_j<\cdot} S_A(\cdot,t_j+0)a_j\right\}$$

— узагальнений оператор Гріна неоднорідної крайової задачі (6).

З даної теореми отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Якщо* $A(t) \in C([a;b]_{\mathbb{R}_+}; M_n(\mathbb{R}))$, $B_k \in M_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1,p}$, *то неоднорідна крайова задача*

$$\begin{aligned} &\dot z = A(t)z + f(t), \quad t \in [a;b]_{\mathbb{R}_+}, \quad t \neq t_k, \quad t_k \in (a;b)_{\mathbb{R}_+}, \\ &z(t_k+0) = z(t_k) + B_k z(t_k) + a_k, \quad k = 1,2,\ldots,p, \\ &lz = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \tag{8}$$

є розв'язною тоді й тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in C([a;b]_{\mathbb{R}_+}/\{t_k\};\mathbb{R}^n)$, $\{a_k\}_{k=1}^p \in$ $\in l^p(\mathbb{R}^n)$ *та* $\alpha \in \mathbb{R}^m$ *задовольняють умову*

$$P_{Q_d^*}\left(\alpha - l\int\limits_a^{\cdot} X(\cdot)X^{-1}(s)f(s)\,ds - l\sum_{a<t_j<\cdot} X(\cdot)X^{-1}(t_j+0)a_j\right) = 0_d,$$

де $X(t)$ — фундаментальна матриця відповідної однорідної імпульсної диференціальної системи

$$\dot{z} = A(t)z,$$

$$z(t_k + 0) = z(t_k) + B_k z(t_k), \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

У цьому випадку задача (8) має r-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$z(t; c_r) = X(t)P_{Q_r}c_r + X(t)Q^+ \left\{ \alpha - l \int_a^{\cdot} X(\cdot)X^{-1}(s)f(s)\,ds - l \sum_{a<t_j<\cdot} X(\cdot)X^{-1}(t_j+0)a_j \right\} +$$

$$+ \int_a^t X(t)X^{-1}(s)f(s)\,ds + \sum_{a<t_j<t} X(t)X^{-1}(t_j+0)a_j, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Таким чином, отриманий наслідок узгоджується з відомими результатами в [4].

Приклад 1. Розглянемо крайову задачу

$$\begin{aligned} &z^{\Delta} = z + f(t), \quad t \in [0;2] \cup \{3\} \cup [4;6], \quad t \neq t_k, \quad t_k \in \{1;5\}, \\ &z(t_k + 0) = z(t_k) + B_k z(t_k) + a_k, \quad k = 1, 2, \\ &lz = M_1 z(0) - M_2 z(6) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{9}$$

де $z(t) \in C^1_{rd}([0;1) \cup (1;2] \cup \{3\} \cup [4;5) \cup (5;6]; \mathbb{R}^2)$, $B_k = \begin{pmatrix} \beta_k & 0 \\ 0 & -\beta_k \end{pmatrix}$, $\beta_k \neq \pm 1$, $a_k = \begin{pmatrix} \delta_k \\ \delta_k \end{pmatrix}$ $\forall k \in \{1;2\}$, $f(t) \in C_{rd}([0;1) \cup (1;2] \cup \{3\} \cup [4;5) \cup (5;6]; \mathbb{R}^2)$, $M_1 = \begin{pmatrix} 4e^4 + 1 & 0 \\ 0 & 4e^4 \end{pmatrix}$, $M_2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо фундаментальну матрицю $X(t) := e_A(t, a) = e_{I_2}(t, 0)$ відповідної однорідної системи $z^{\Delta} = z$ та фундаментальну матрицю $S_{I_2}(t, 0)$ відповідної однорідної імпульсної системи

$$z^{\Delta} = z, \quad t \in [0;2] \cup \{3\} \cup [4;6], \quad t \neq t_k, \quad t_k \in \{1;5\},$$

$$z(t_k + 0) = z(t_k) + B_k z(t_k), \quad k = 1, 2.$$

Маємо

$$X(t) = \begin{cases} e^t I_2, & t \in [0;2], \\ 2e^2 I_2, & t = 3, \\ 4e^{-2}e^t I_2, & t \in [4;6], \end{cases} \qquad e_{I_2}(t, s) = \begin{cases} e^{t-s} I_2, & t, s \in [0;2] \cup [4;6], \\ 2^{t-s} I_2, & t = s = 3, \end{cases}$$

і для будь-яких $t, s : 1 \leq s \leq t < 5$ матриця $S_{I_2}(t,s) = e_{I_2}(t,s)$. Тоді знайдемо матрицю $Q = lS_A(\cdot, a) = lS_{I_2}(\cdot, 0) = lX(\cdot)$. Отримаємо

$$Q = \begin{pmatrix} 4e^4+1 & 0 \\ 0 & 4e^4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4e^4 & 0 \\ 0 & 4e^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $Q^+ = Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (легко перевірити безпосередньо за формулою $Q^+ = = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(Q^*(QQ^* + \varepsilon I_2)^{-1}\right)$), $P_Q = P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{Q_r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_{Q_d^*} = (1 \;\; 0)$, $d = = r = 1$. Тоді умова розв'язності крайової задачі (9) набирає вигляду

$$(0 \;\; 1)\left\{\alpha + \int_0^6 S_{I_2}(6, \sigma(s)) f(s)\,\Delta s + \sum_{0<t_k<6} S_{I_2}(6, t_k+0) a_k\right\} = 0. \tag{10}$$

Нехай $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ і $\beta_k = \dfrac{1}{2}\ \forall k \in \{1; 2\}$, а за властивістю 2 наслідку 1 $S_{I_2}(6, t_k+0) = S_{I_2}(6, t_k)(I + B_k)^{-1}$. Тоді умова (10) еквівалентна умові

$$\alpha_2 + e^6 \int_0^2 e^{-s} f_2(s)\,ds + 8f_2(2) + 4f_2(3) + e^6 \int_4^6 e^{-s} f_2(s)\,ds + 2e^5\delta_1 + 2e\delta_2 = 0, \tag{11}$$

і якщо неоднорідності α_2, $f_2(t)$ та $\delta_{1,2}$ задовольняють умову (11), то за теоремою 3 для будь-якого $c \in \mathbb{R}$ крайова задача (9) має однопараметричну сім'ю розв'язків вигляду

$$z(t;c) = S_{I_2}(t,0)\left(\left(\begin{matrix} \alpha_1 + e^6 \displaystyle\int_0^2 e^{-s} f_1(s)\,ds + 8f_1(2) + 4f_1(3) \\ c \end{matrix}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\begin{matrix} e^6 \displaystyle\int_4^6 e^{-s} f_1(s)\,ds + \frac{2}{3}e^5\delta_1 + \frac{2}{3}e^{-1}\delta_2 \\ 0 \end{matrix}\right)\right) +$$

$$+ \int_0^t S_{I_2}(t, \sigma(s)) f(s)\,\Delta s + \sum_{0<t_k<t} S_{I_2}(t, t_k) \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\delta_k \\ 2\delta_k \end{pmatrix}.$$

1. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. — Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2001.
2. *Lupulescu V., Zada A.* Linear impulsive dynamic systems on time scales // Electron. J. Qual. Theory Different. Equat. — 2010. — № 11. — P. 1–30.

3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987.

4. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht, The Netherlands: Koninklijke Brill NV, 2004.

5. *Boichuk A., Bohner M.* Fredholm boundary-value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales // Math. Nachr. (to appear).

Одержано 29.04.13