УДК 517.929

УСРЕДНЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. В. Скрипник

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
Украина, 65082, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: talie@ukr.net

We substantiate an averaging method for a multivalued integral equation.

Розглянуто обґрунтування методу усереднення для багатозначного інтегрального рівняння.

Интегральные уравнения находят многочисленные приложения в различных областях знаний, таких как теория упругости, передача тепла и массы, теория колебаний, динамика жидкости, теория фильтрации, электростатика, электродинамика, биомеханика, теория игр, теория управления, теория голосования, электротехника, экономика и медицина.

Исследования реальных процессов, основанных на идеализированных математических моделях, зачастую приводят к уравнениям с малыми параметрами. Для их исследования широко используются различные асимптотические методы. Выбор конкретного асимптотического метода зависит от структуры уравнения, описывающего динамику объекта. В последнее время методы усреднения получили широкое развитие в нелинейной механике и теории колебаний. Математическое обоснование метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений началось в 1937 г. с фундаментальной работы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1]. Большую роль в разработке метода усреднения для различных классов дифференциальных уравнений сыграли работы Е. А. Гребеникова, Ю. А. Митропольского, Н. Н. Моисеева, Н. А. Перестюка, В. А. Плотникова, А. М. Самойленко, А. Н. Филатова и др. [2–4, 7–11, 14]. В последующем идеи метода усреднения были распространены на дифференциальные уравнения с многозначной и нечеткой правой частью (см.[5, 6, 9, 12, 13] и библиографию в них).

В данной статье рассмотрим обоснование метода усреднения для многозначного интегрального уравнения.

Пусть $\mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^n)$ — метрическое пространство непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа $h(F,G)$.

Рассмотрим многозначное интегральное уравнение

$$X(t) = X_0 + \varepsilon \int\limits_0^t F(t,s,X(s))\,ds, \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ — время, $X : \mathbb{R}_+ \to D$, $D \subset \mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^n)$, ε — малый параметр.

Вопрос существования решений многозначных интегральных уравнений такого вида рассмотрен в [15].

Уравнению (1) поставим в соответствие усредненное многозначное интегральное уравнение

$$\bar{X}(t) = X_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \bar{F}(t, \bar{X}(s))\, ds, \tag{2}$$

где

$$\bar{F}(t, X) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{\tau}^{\tau+T} F(t, s, X)\, ds. \tag{3}$$

Имеет место следующая теорема, устанавливающая близость решений уравнений (1) и (2) на конечном промежутке.

Теорема 1. *Пусть в области $Q = \{(t, s, X) : t, s \in \mathbb{R}_+, X \in D \subset \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)\}$ выполнены следующие условия:*

1) многозначное отображение $F(t, s, X)$ непрерывно и удовлетворяет по X условию Липшица с постоянной λ;

2) многозначное отображение $\int_0^t F(t, s, X(s))\, ds$ равномерно непрерывно на $\mathbb{R}_+$ для любого непрерывного отображения $X : \mathbb{R}_+ \to D$;

3) равномерно относительно $t, \tau \in \mathbb{R}_+$, $X \in D$ существует предел (3);

4) решение $\bar{X}(\cdot)$ уравнения (2) определено при $t \geq 0$ для всех $\varepsilon \in (0, \sigma]$ и лежит с некоторой ρ-окрестностью в области D.

Тогда для любых сколь угодно малого $\eta > 0$ и сколь угодно большого $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для всех $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ выполняется неравенство

$$h(X(t), \bar{X}(t)) < \eta, \tag{4}$$

где $X(\cdot)$ и $\bar{X}(\cdot)$ — решения уравнений (1) и (2) соответственно.

Доказательство. Заметим, что многозначное отображение $\bar{F}(t, X)$ удовлетворяет условию Липшица.

Действительно, в силу условия 3 теоремы для любого $\delta > 0$ можно найти такое $T(\delta)$, что при $T > T(\delta)$ будут выполнено неравенство

$$h\left(\frac{1}{T} \int\limits_{\tau}^{\tau+T} F(t, s, X)\, ds, \bar{F}(t, X)\right) < \delta.$$

Тогда

$$h\left(\bar F(t,X'),\bar F(t,X'')\right) \le h\left(\bar F(t,X'),\frac{1}{T}\int\limits_{\tau}^{\tau+T}F(t,s,X')\,ds\right)+$$

$$+h\left(\frac{1}{T}\int\limits_{\tau}^{\tau+T}F(t,s,X')\,ds,\frac{1}{T}\int\limits_{\tau}^{\tau+T}F(t,s,X'')\,ds\right)+$$

$$+h\left(\frac{1}{T}\int\limits_{\tau}^{\tau+T}F(t,s,X'')\,ds,\bar F(t,X'')\right) <$$

$$< 2\delta+h\left(\frac{1}{T}\int\limits_{\tau}^{\tau+T}F(t,s,X')\,dt,\frac{1}{T}\int\limits_{\tau}^{\tau+T}F(t,s,X'')\,dt\right) \le$$

$$\le 2\delta+\frac{1}{T}\int\limits_{\tau}^{\tau+T}h\left(F(t,s,X'),F(t,s,X'')\right)\,dt \le 2\delta+\lambda h(X',X'').$$

Поскольку δ произвольно, получим

$$h\left(\bar F(t,X'),\bar F(t,X'')\right) \le \lambda h(X',X''),$$

что и требовалось показать.

Оценим расстояние между решениями исходного и усредненного многозначных интегральных уравнений:

$$h(X(t),\bar X(t)) = h\left(X_0+\varepsilon\int\limits_0^t F(t,s,X(s))\,ds, X_0+\varepsilon\int\limits_0^t \bar F(t,\bar X(s))\,ds\right) =$$

$$= \varepsilon h\left(\int\limits_0^t F(t,s,X(s))\,ds,\int\limits_0^t \bar F(t,\bar X(s))\,ds\right) \le$$

$$\le \varepsilon h\left(\int\limits_0^t F(t,s,X(s))\,ds,\int\limits_0^t \bar F(t,X(s))\,ds\right)+$$

$$+\varepsilon h\left(\int\limits_0^t \bar F(t,X(s))\,ds,\int\limits_0^t \bar F(t,\bar X(s))\,ds\right) \le$$

$$\le \varepsilon h\left(\int\limits_0^t F(t,s,X(s))\,ds,\int\limits_0^t \bar F(t,X(s))\,ds\right)+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t h(\bar F(t,X(s)),\bar F(t,\bar X(s)))\,ds\le$$

$$\le\varepsilon h\left(\int\limits_0^t F(t,s,X(s))\,ds,\int\limits_0^t \bar F(t,X(s))\,ds\right)+\varepsilon\lambda\int\limits_0^t h\left(X(s),\ \bar X(s)\right)\,ds.$$

На основании леммы Гронуолла – Беллмана имеем

$$h(X(t),\bar X(t))\le\varepsilon e^{\varepsilon\lambda t}h\left(\int\limits_0^t F(t,s,X(s))\,ds,\int\limits_0^t \bar F(t,X(s))\,ds\right)\le$$

$$\le\varepsilon e^{\lambda L}\sup_{t\in[0,L\varepsilon^{-1}]}h\left(\int\limits_0^t F(t,s,X(s))\,ds,\int\limits_0^t \bar F(t,X(s))\,ds\right). \qquad (5)$$

Обозначим через $\phi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ модуль непрерывности многозначного отображения $G(t)=\int_0^t F(t,s,X(s))\,ds$. Тогда

$$h\left(\int\limits_0^t F(t,s,X(s))\,ds,\int\limits_0^{\bar t} F(\bar t,s,X(s))\,ds\right)<\phi(\tau)$$

при $|t-\bar t|<\tau$.

Проведем разбиение отрезка $[0,L\varepsilon^{-1}]$ с шагом $\gamma(\varepsilon)$, где

$$\gamma(\varepsilon)\to\infty,\quad \varepsilon\phi(\gamma(\varepsilon))\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$. Такой выбор шага возможен в силу свойств модуля непрерывности, а именно, так как $\phi(\gamma(\varepsilon))\le(1+\gamma(\varepsilon))\phi(1)$, то

$$\varepsilon\phi(\gamma(\varepsilon))\le\varepsilon(1+\gamma(\varepsilon))\phi(1)$$

и в качестве $\gamma(\varepsilon)$ можно выбрать, например, $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$.

Обозначим $t_i=i\gamma(\varepsilon)$, $i=\overline{0,m-1}$, $(m-1)\gamma(\varepsilon)<\dfrac{L}{\varepsilon}\le m\gamma(\varepsilon)$, $t_m=\dfrac{L}{\varepsilon}$ — точки разбиения, $X_i=X(t_i)$ — решение уравнения (1) в точках разбиения.

Оценим выражение

$$\varepsilon h\left(\int\limits_0^t F(t,s,X(s))\,ds,\int\limits_0^t \bar F(t,X(s))\,ds\right)$$

на промежутке $[t_k,t_{k+1}]$, $k=\overline{0,m-1}$:

$$\varepsilon h\left(\int\limits_0^t F(t,s,X(s))\,ds, \int\limits_0^t \bar{F}(t,X(s))\,ds\right) =$$

$$= \varepsilon h\left(\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(t,s,X(s))\,ds + \int\limits_{t_k}^{t} F(t,s,X(s))\,ds, \sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(t,X(s))\,ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}(t,X(s))\,ds\right) \le \varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k-1} h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(t,s,X(s))\,ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(t,X(s))\,ds\right) + \right.$$

$$\left. + h\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(t,s,X(s))\,ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}(t,X(s))\,ds\right)\right] \le$$

$$\le \varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left(h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(t,s,X(s))\,ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(t,s,X_i)\,ds\right) + \right.\right.$$

$$+ h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(t,s,X_i)\,ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(t,X_i)\,ds\right) +$$

$$\left. + h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(t,X_i)\,ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(t,X(s))\,ds\right)\right) + h\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(t,s,X(s))\,ds, \int\limits_{t_k}^{t} F(t,s,X_k)\,ds\right) +$$

$$\left. + h\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(t,s,X_k)\,ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}(t,X_k)\,ds\right) + h\left(\int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}(t,X_k)\,ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}(t,X(s))\,ds\right)\right] \le$$

$$\le \varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} h(F(t,s,X(s)), F(t,s,X_i))\,ds + h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(t,s,X_i)\,ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(t,X_i)\,ds\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} h(\overline{F}(t,X(s)), \overline{F}(t,X_i))\,ds\right) + \int\limits_{t_k}^{t} h(F(t,s,X(s)), F(t,s,X_k))\,ds +$$

$$+ h\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(t,s,X_k)\,ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}(t,X_k)\,ds\right) + \int\limits_{t_k}^{t} h(\overline{F}(t,X(s)),\overline{F}(t,X_k))\,ds\Bigg] \le$$

$$\le \varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k}\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} h(F(t,s,X(s)),F(t,s,X_i))\,ds + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} h(\overline{F}(t,X(s)),\overline{F}(t,X_i))\,ds\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{k-1} h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(t,s,X_i)\,ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(t,X_i)\,ds\right) + h\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(t,s,X_k)\,ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}(t,X_k)\,ds\right)\right] \le$$

$$\le 2\lambda\varepsilon\sum_{i=0}^{k}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} h(X(s),X(t_i))\,ds +$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{k-1} h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(t,s,X_i)\,ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(t,X_i)\,ds\right) + h\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(t,s,X_k)\,ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}(t,X_k)\,ds\right)\right].$$

В силу условия 2 теоремы имеем

$$h(X(s),X_i) = \varepsilon h\left(\int\limits_{0}^{s} F(s,\nu,X(\nu))\,d\nu, \int\limits_{0}^{t_i} F(t_i,\nu,X(\nu))\,d\nu\right) \le \varepsilon\phi(\gamma(\varepsilon)),$$

тогда

$$2\lambda\varepsilon\sum_{i=0}^{k}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} h(X(s),X(t_i))\,ds \le 2\lambda\varepsilon^2\phi(\gamma(\varepsilon))(k+1)\gamma(\varepsilon) \le 2\lambda L\varepsilon\gamma(\varepsilon).$$

В силу условия 3 теоремы существует такая монотонно убывающая функция $\theta(\upsilon)$, стремящаяся к нулю при $\upsilon \to \infty$, что при всех $t, \upsilon, \tau \in \mathbb{R}_+$, $X \in D$

$$h\left(\int\limits_{\tau}^{\tau+\upsilon} F(t,s,X)ds, \int\limits_{\tau}^{\tau+\upsilon} \overline{F}(t,X)ds\right) \le \upsilon\theta(\upsilon).$$

Тогда

$$\varepsilon h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(t,s,X_i)\,ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(t,X_i)\,ds\right) \le \gamma(\varepsilon)\theta(\gamma(\varepsilon)),$$

$$\varepsilon h\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(t,s,X_k)\,ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}(t,X_k)\,ds\right) \le \gamma(\varepsilon)\theta(\gamma(\varepsilon)).$$

Следовательно,

$$\varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k-1} h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,X_i)\,ds,\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(s,X_i)\,ds\right)+\right.$$

$$\left.+\,h\left(\int_{t_k}^{t} F(s,X_k)\,ds,\ \int_{t_k}^{t} \overline{F}(s,X_k)\,ds\right)\right] \le m\varepsilon\gamma(\varepsilon)\theta(\gamma(\varepsilon)) \le L\theta(\gamma(\varepsilon)).$$

Таким образом,

$$\varepsilon h\left(\int_0^t F(s,X(s))\,ds,\ \int_0^t \bar{F}(s,X(s))\,ds\right) \le 2\lambda L\varepsilon\phi(\gamma(\varepsilon)) + L\theta(\gamma(\varepsilon)). \tag{6}$$

Обозначим $\eta_1 = \min\{\rho,\eta\}$. Найдем ε_0 из условия

$$2\lambda L\varepsilon\phi(\gamma(\varepsilon)) + L\theta(\gamma(\varepsilon)) \le \eta_1 e^{-\lambda L}.$$

Тогда для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ в силу (5) имеем

$$h(X(t),\bar{X}(t)) \le \eta_1 = \min\{\rho,\eta\},$$

и теорема доказана при условии, что решение $X(\cdot)$ на всем отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ не выходит из области Q, что верно в силу условия 4 теоремы.

Замечание. Данный результат обобщает результаты [9] по обоснованию метода усреднения для дифференциальных уравнений с производной Хукухары, так как переходя от дифференциального уравнения с производной Хукухары к эквивалентному ему интегральному уравнению, получаем, что условия 1, 3, 4 теоремы выполнены вследствие соответствующих условий на правые части исходного дифференциального уравнения, а условие 2 выполнено, так как многозначное отображение $\int_0^t F(s,X(s))\,ds$, где $F(s,X)$ — правая часть дифференциального уравнения с производной Хукухары, является липшицевым, а значит, равномерно непрерывным.

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937. — 363 с.
2. *Гребеников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: Наука, 1986. — 256 с.
3. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1971. — 440 с.
4. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
5. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.
6. *Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: Астропринт, 2009. — 192 с.

7. *Плотников В. А.* Асимптотические методы в задачах оптимального управления. — Одесса: Одес. гос. ун-т, 1976. — 103 с.

8. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.

9. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: Астропринт, 1999. — 356 с.

10. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.

11. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. — Ташкент: Фан, 1974. — 216 с.

12. *Kisielewicz M.* Differential inclusion and optimal control. — Warszawa: PWN, 1991. — 239 p.

13. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities // De Gruyter Stud. Math. — Berlin; Boston: Walter De Gruyter GmbH and Co., 2011. — **40**. — 307 p.

14. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1995. — 462 p.

15. *Tise I.* Set integral equations in metric spaces // Math. Morav. — 2009. — **13**, № 1. — P. 95 – 102.

Получено 14.04.13