УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. А. Стехун

Одес. гос. академия стр-ва и архитектуры
Украина, 65000, Одесса, ул. Дидрихсона, 4
e-mail: emden@farlep.net

We find an asymptotic representation for certain classes of solutions of a nonautonomous third order differential equation that is close, in some sense, to a linear equation.

Встановлено асимптотичні зображення для деяких класів розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь третього порядку, що у деякому сенсі є близькими до лінійних рівнянь.

1. Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y''' = \alpha_0 p(t) y L(y), \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$[1], $L : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная и медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция, Y_0 равно либо 0, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — односторонняя окрестность Y_0.

Согласно определению медленно меняющейся функции (см. [1, с. 9 – 15])

$$\lim_{y \to Y_0} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0, \tag{1.2}$$

причем это предельное соотношение выполняется равномерно по λ на любом промежутке $[c, d] \subset]0, +\infty[$ (свойство M_1). Кроме того, известно (свойство M_2), что существует непрерывно дифференцируемая и медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция $L_0 : \Delta_{Y_0} \longrightarrow$ $\longrightarrow]0, +\infty[$ такая, что

$$L(y) \sim L_0(y) \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \quad \text{и} \quad \lim_{y \to Y_0} \frac{y L_0'(y)}{L_0(y)} = 0. \tag{1.3}$$

Простейшими примерами медленно меняющихся при $y \to Y_0$ функций являются функции, имеющие отличный от нуля конечный предел при $y \to Y_0$, и функции вида

$$L(y) = \prod_{k=1}^{m} |\ln_k |y||^{\sigma_k}, \quad L(y) = \exp\left(|\ln |y||^{\gamma_1} \prod_{k=2}^{m} |\ln_k |y||^{\sigma_k} \right), \tag{1.4}$$

$$L(y) = \exp\left(\frac{\ln |y|}{|\ln_2 |y||^{\gamma_2}} \prod_{k=3}^{m} |\ln_k |y||^{\sigma_k} \right),$$

[1] При $\omega = +\infty$ полагаем, что $a > 1$.

где $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$, $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 > 0$,

$$\ln_1 |y| = \ln |y|, \quad \ln_k |y| = \ln |\ln_{k-1} |y||, \quad k = \overline{2, m}.$$

В частном случае, когда $L(y) \equiv 1$, уравнение (1.1) является линейным дифференциальным уравнением третьего порядка. Асимптотическое поведение при $t \to +\infty$ (случай $\omega = +\infty$) его решений достаточно подробно исследовано (см., например, монографию [2]).

При $L(y) = |\ln|y||^\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, в работах [3–7] были установлены условия существования и асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления всех возможных типов так называемых $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = \alpha_0 p(t) y L(y).$$

Определение 1.1. *Решение y уравнения (1.1) будем называть $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решением, где $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет условиям*

$$y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \tag{1.5}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \textit{либо} & 0, \\ \textit{либо} & \pm\infty, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y''(t)]^2}{y'''(t) y'(t)} = \lambda_0. \tag{1.6}$$

Целью настоящей статьи является распространение результатов из [4, 5] на случай дифференциального уравнения третьего порядка и произвольной медленно меняющейся при $y \to Y_0$ функции L.

2. Основные результаты. Для формулировки основных результатов потребуются некоторые вспомогательные обозначения и условия. Прежде всего введем два числа, положив

$$\mu_0 = y_0, \quad \mu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — левая окрестность } \; Y_0, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — правая окрестность } \; Y_0, \end{cases}$$

где $y_0 \in \Delta_{Y_0}$ и такое, что

$$|y_0| < 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0, \quad y_0 > 1 \;\; (y_0 < -1) \quad \text{при} \quad Y_0 = +\infty \;\; (Y_0 = -\infty).$$

В силу (1.1) и (1.5) каждое $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решение уравнения (1.1) и его первая производная отличны от нуля на некотором промежутке $[t_1, \omega[$. Нетрудно понять, что числа μ_0 и μ_1 определяют на таком промежутке знаки $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения и его первой производной. При таком их интерпретировании ясно, что

$$\mu_0 \mu_1 < 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0, \quad \mu_0 \mu_1 > 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty. \tag{2.1}$$

Далее, введем вспомогательные функции

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \qquad I(t) = \int\limits_A^t p(\tau)\, d\tau,$$

где

$$A = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega p(t)\, dt = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega p(t)\, dt < +\infty, \end{cases}$$

и следующее определение.

Определение 2.1. *Будем говорить, что медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция L удовлетворяет условию S_1, если функция $L(\mu_0 \exp z)$ является правильно меняющейся функцией какого-либо порядка σ при $z \to Z_0$, где $Z_0 = +\infty$ в случае, когда $Y_0 = \pm\infty$, и $Z_0 = -\infty$ в случае, когда $Y_0 = 0$, т. е. представима в виде*

$$L(\mu_0 \exp z) = |z|^\sigma L_1(z), \tag{2.2}$$

где L_1 — непрерывная в окрестности Z_0 и медленно меняющаяся функция при $z \to Z_0$.

Условию S_1 заведомо удовлетворяют функции L, для которых существует отличный от нуля конечный предел при $y \to Y_0$, функции первого вида из (1.4) и др.

Для уравнения (1.1) имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть функция L удовлетворяет условию S_1. Тогда для существования $P_\omega(\pm\infty)$-решений уравнения (1.1) необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\mu_0\mu_1\pi_\omega(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a,\omega[, \quad \mu_0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| = Y_0, \tag{2.3}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} p(t)\pi_\omega^3(t)L(\mu_0\pi_\omega^2(t)) = 0, \quad \int\limits_{a_1}^{\omega} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0\pi_\omega^2(\tau))\, d\tau = +\infty, \tag{2.4}$$

где $a_1 \in [a,\omega[$ такое, что $\mu_0\pi_\omega^2(t) \in \Delta_{Y_0}$ при $t \in [a_1,\omega[$. Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = 2\ln|\pi_\omega(t)| + \frac{\alpha_0}{2}\int\limits_{a_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0\pi_\omega^2(\tau))\, d\tau[1+o(1)], \tag{2.5}$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{3-k}{\pi_\omega(t)}\,[1+o(1)], \quad k = 1,2, \tag{2.6}$$

причем при выполнении условий (2.3), (2.4) существует в случае $\omega = +\infty$ трехпараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$ решений с представлениями (2.5), (2.6), а в случае $\omega < +\infty$ — однопараметрическое семейство.

Теорема 2.2. *Пусть функция L удовлетворяет условию S_1 и выполняются условия (2.3), (2.4). Пусть, кроме того, функция $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ непрерывно дифференцируема и существует (конечный или равный $\pm\infty$) предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)p'(t)}{p(t)}$. Тогда для каждого $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решения дифференциального уравнения (1.1) имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления*

$$\ln|y(t)| = 2\ln|\pi_\omega(t)| + \frac{\alpha_0}{2}\int\limits_{a_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0\pi_\omega^2(\tau))\,d\tau[1 + o(1)], \tag{2.7}$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[3 - k + \frac{\alpha_0}{2}\,p(t)\pi_\omega^3(t)L(\mu_0\pi_\omega^2(t))[1 + o(1)]\right], \quad k = 1, 2. \tag{2.8}$$

Теорема 2.3. *Пусть функция L удовлетворяет условию S_1. Тогда для существования $P_\omega(0)$-решений уравнения (1.1), для которых существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)}$, необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\mu_0\mu_1\pi_\omega(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[, \quad \mu_0 \lim_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)| = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I(t)} = -2, \tag{2.9}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} p(t)\pi_\omega^3(t)L(\mu_0|\pi_\omega(t)|) = 0, \quad \int\limits_{a_1}^{\omega} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0|\pi_\omega(\tau)|)\,d\tau = +\infty, \tag{2.10}$$

где $a_1 \in [a, \omega[$ такое, что $\mu_0|\pi_\omega(t)| \in \Delta_{Y_0}$ при $t \in [a_1, \omega[$. Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = \ln|\pi_\omega(t)| - \alpha_0\int\limits_{a_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0|\pi_\omega(\tau)|)\,d\tau[1 + o(1)], \tag{2.11}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1 + o(1)}{\pi_\omega(t)}, \quad \frac{y''(t)}{y'(t)} = -\alpha_0 p(t)\pi_\omega^2(t)L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)[1 + o(1)], \tag{2.12}$$

причем при выполнении условий (2.9), (2.10) существует двупараметрическое семейство решений с такими асимптотическими представлениями.

При доказательстве этих теорем будут использованы два вспомогательных утверждения об априорных свойствах $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений уравнения (1.1), вытекающие из результатов работы [8] (гл. 3, § 10).

Лемма 2.1. *Для каждого* $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$*-решения уравнения* (1.1) *имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 2, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = 1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)} = 0. \tag{2.13}$$

Лемма 2.2. *Для каждого* $P_\omega(Y_0, 0)$*-решения уравнения (1.1) имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)} = -1, \tag{2.14}$$

причем последнее из них при дополнительном условии существования (конечного или равного $\pm\infty$*) предела* $\lim_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)}$.

Доказательство теоремы 2.1. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решение уравнения (1.1). Тогда выполняются условия (1.5), (1.6), причем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'''(t)y'(t)}{(y''(t))^2} = 0$$

и $\operatorname{sign} y(t) = \mu_0$, $\operatorname{sign} y'(t) = \mu_1$ на некотором промежутке $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$. Кроме того, согласно лемме 2.1 имеют место предельные соотношения (2.13).

В силу первых двух из предельных соотношений (2.13) имеют место асимптотические представления (2.6). В силу же первого из них выполняется первое из условий (2.3) и $y(t) = \mu_0|\pi_\omega(t)|^{2+o(1)}$ при $t \uparrow \omega$. Поэтому в силу (1.4) выполняется второе из условий (2.4).

Поскольку $y(t) = \mu_0 e^{2[1+\varepsilon(t)]\ln|\pi_\omega(t)|}$, где $\varepsilon(t) = o(1)$ при $t \uparrow \omega$ и функция L удовлетворяет условию S_1, согласно (2.2) имеем

$$L(y(t)) = L\left(\mu_0 e^{2[1+\varepsilon(t)]\ln|\pi_\omega(t)|}\right) = |2(1+\varepsilon(t))\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma L_1\left(2[1+\varepsilon(t)]\ln|\pi_\omega(t)|\right),$$

откуда с учетом свойства M_1 медленно меняющихся функций следует, что

$$L(y(t)) = L\left(\mu_0 e^{2[1+\varepsilon(t)]\ln|\pi_\omega(t)|}\right) = |2\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma L_1\left(2\ln|\pi_\omega(t)|\right)[1+o(1)] =$$
$$= L\left(\mu_0 e^{2\ln|\pi_\omega(t)|}\right)[1+o(1)] = L(\mu_0\pi_\omega^2(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Учитывая это асимптотическое соотношение и первые два из предельных соотношений (2.13), из (1.1) находим

$$\frac{y'''(t)}{y''(t)} = \frac{\alpha_0}{2}\, p(t)\pi_\omega^2(t)L(\mu_0|\pi_\omega^2(t)|)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.15}$$

Отсюда в силу третьего из предельных соотношений (2.13) следует первое из условий (2.4).

Интегрируя (2.15) на промежутке от t_2 до t, где $t_2 = \max\{a_1, t_1\}$, приходим к выводу, учитывая первое из условий (1.6), что выполняется второе из условий (2.4) и

$$\ln|y''(t)| = \frac{\alpha_0}{2} \int\limits_{a_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau) L(\mu_0 \pi_\omega^2(\tau))\, d\tau [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.16}$$

Из этого соотношения непосредственно следует асимптотическое представление (2.5) при учете, что выполнены условия (2.4) и согласно (2.13) $y''(t) \sim \dfrac{y'(t)}{\pi_\omega(t)} \sim \dfrac{2y(t)}{\pi_\omega^2(t)}$ при $t \uparrow \omega$.

Достаточность. Предположим, что выполняются условия (2.3), (2.4). Уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$\ln|y(t)| = 2\ln|\pi_\omega(t)|[1 + v_1(\tau)], \quad \frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{(3-k)[1 + v_{k+1}(\tau)]}{\pi_\omega(t)}, \quad k = 1, 2, \tag{2.17}$$

где

$$\tau = \beta \ln|\pi_\omega(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{1}{\tau}[v_2 - v_1], \\ v_2' &= \beta[(1 + v_3)(1 + v_2) - 2(1 + v_2)^2 + 1 + v_2], \\ v_3' &= \beta\left[\frac{\alpha_0}{2} p(t)\pi_\omega^3(t) L(Y(t, v_1))(1 + v_2)^{-1} - (1 + v_3)^2 + 1 + v_3\right], \end{aligned} \tag{2.18}$$

в которой $t = t(\tau)$ — функция, обратная к $\tau = \beta \ln|\pi_\omega(t)|$,

$$Y(t, v_1) = \mu_0 e^{2(1+v_1)\ln|\pi_\omega(t)|}. \tag{2.19}$$

Эту систему уравнений рассмотрим на множестве

$$\Omega = [\tau_0, +\infty[\times \left\{(v_1, v_2, v_3) : |v_i| \le \frac{1}{2},\ i = 1, 2, 3\right\},$$

где $\tau_0 = \beta \ln|\pi_\omega(t_0)|$, а $t_0 \in [a, \omega[$ выбрано с учетом (2.1) и (2.3) так, чтобы при $t \in [t_0, \omega[$ и $|v_1| \le \dfrac{1}{2}$ выполнялось условие $Y(t, v_1) \in \Delta_{Y_0}$.

На этом множестве правые части системы непрерывны. Кроме того, учитывая, что функция L удовлетворяет условию S_1, а функция Y имеет вид (2.14), получаем с использованием свойства M_1 медленно меняющихся функций представление

$$L(Y(t, v_1)) = |1 + v_1|^\sigma L(\mu_0 \pi_\omega^2(t))[1 + r(t, v_1)],$$

в котором функция r стремится к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $|v_1| \le \dfrac{1}{2}$. В силу этого представления систему дифференциальных уравнений (2.18) можно представить в виде

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{1}{\tau}[-v_1 + v_2], \\ v_2' &= \beta\left[-2v_2 + v_3 + (v_2 v_3 - v_2^2)\right], \\ v_3' &= \beta\left[f(\tau, v_1, v_2) - v_3 - v_3^2\right], \end{aligned} \tag{2.20}$$

где

$$f(\tau, v_1, v_2) = f(\tau(t), v_1, v_2) = \frac{\alpha_0}{2}\, p(t)\pi_\omega^3(t) L(\mu_0 \pi_\omega^2(t))(1+v_1)^\sigma (1+v_2)^{-1}[1 + r(t, v_1)].$$

Здесь в силу первого из условий (2.4) и указанного выше свойства функции r

$$\lim_{\tau \to +\infty} f(\tau, v_1, v_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in \left\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : |v_i| \le \frac{1}{2},\ i = 1, 2\right\}.$$

Поэтому к данной системе применима теорема 2.1 из работы [9]. Согласно этой теореме данная система дифференциальных уравнений имеет в случае $\beta > 0$ трехпараметрическое, а в случае $\beta < 0$ однопараметрическое семейство решений $(v_1, v_2, v_3) : [\tau_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\tau_1 \ge \tau_0$, стремящихся к нулю при $\tau \to +\infty$. Каждому из таких решений в силу замен (2.17) соответствует решение $y : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(\tau_1 = \beta \ln|\pi_\omega(t_1)|)$ дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = [2 + o(1)]\ln|\pi_\omega(t)|, \quad \frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{3-k}{\pi_\omega(t)}\,[1 + o(1)], \quad k = 1, 2.$$

В силу этих асимптотических соотношений и второго из условий (2.4) такое решение y, как было показано при доказательстве необходимости, допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотическое представление (2.5).

Кроме того, учитывая вышеизложенное и определение числа β, приходим к выводу, что существует трехпараметрическое семейство решений с представлениями (2.5), (2.6) в случае, когда $\omega = +\infty$, и однопараметрическое — в случае $\omega < +\infty$. Используя эти представления, а также условия (2.3), (2.4), нетрудно проверить, что любое из таких решений уравнения (1.1) является $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решением.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Поскольку функция L удовлетворяет условию S_1 и выполняются условия (2.3), (2.4), дифференциальное уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решения и каждое из них допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.5), (2.6). Остается лишь установить, что при условии существования конечного либо равного $\pm\infty$ предела $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \dfrac{\pi_\omega(t) p'(t)}{p(t)}$ асимптотические представления (2.6) могут быть уточнены до вида (2.8).

Пусть $y : [t_0, \omega[\rightarrow \mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решение уравнения (1.1). Прежде всего заметим, что для него из соотношения (2.16), установленного при доказательстве необходимости теоремы 2.1, следует с использованием (2.4) и (2.6) асимптотическое соотношение

$$\ln|y'(t)| = \ln|\pi_\omega(t)| + \frac{\alpha_0}{2}\int\limits_{t_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0\pi_\omega^2(\tau))\,d\tau[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{2.21}$$

Далее, введем функцию q, положив

$$q(t) = \frac{\alpha_0}{2}\,p(t)\pi_\omega^3(t)L_0(\mu_0\pi_\omega^2(t)),$$

где $L_0 : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывно дифференцируемая и медленно меняющаяся при $y \rightarrow Y_0$ функция, удовлетворяющая условиям (1.3). В силу второго из условий (1.3) и существования (конечного либо равного $\pm\infty$) предела $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)p'(t)}{p(t)}$ для нее существует конечный либо равный $\pm\infty$ предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)q'(t)}{q(t)}$. Покажем, что он равен нулю. Действительно, если бы это было не так, то, положив $c(t) = \dfrac{\pi_\omega(t)q'(t)}{q(t)}$, с учетом того, что предел этой функции при $t\uparrow\omega$ существует, получили бы соотношение

$$q'(t) = \frac{q(t)c(t)}{\pi_\omega(t)}, \quad \text{где} \quad \lim_{t\uparrow\omega} c(t) = \begin{cases} \text{или} & \text{const} \neq 0, \\ \text{или} & \pm\infty. \end{cases}$$

Отсюда с учетом второго из условий (2.4) имеем

$$q(t) - q(a) = \int\limits_a^t \frac{q(\tau)c(\tau)}{\pi_\omega(\tau)}\,d\tau \longrightarrow \infty \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Однако эт невозможно, так как в силу первого из условий (2.4) левая часть данного соотношения имеет конечный предел при $t\uparrow\omega$. Следовательно,

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)q'(t)}{q(t)} = 0. \tag{2.22}$$

Из (1.1) в силу представления (2.6) при $k = 1$, условия S_1 и (1.3) следует, что для рассматриваемого решения y имеет место асимптотическое соотношение

$$\frac{y'''(t)}{y(t)} = \alpha_0 p(t)L_0(\mu_0|\pi_\omega(t)|)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

которое с использованием представления (2.6) при $k = 1$ можно записать в виде

$$\frac{y'''(t)}{y'(t)} = \frac{\alpha_0}{2}\,p(t)\pi_\omega(t)L_0(\mu_0\pi_\omega^2(t))[1+\varepsilon_1(t)], \tag{2.23}$$

где $\varepsilon_1 : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{t\uparrow\omega} \varepsilon_1(t) = 0. \tag{2.24}$$

Введем теперь функцию $z : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, положив

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [1 + q(t)z(t)]. \tag{2.25}$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{y'''(t)}{y'(t)} = \left(\frac{y''(t)}{y'(t)}\right)' + \left(\frac{y''(t)}{y'(t)}\right)^2,$$

и используя (2.25), из (2.23) получаем

$$z'(t) = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[-\frac{\pi_\omega(t)q'(t)}{q(t)}\, z(t) - z(t) - q(t)z^2(t) + 1 + \varepsilon_1(t)\right].$$

Учитывая первое из условий (2.4) и условия (2.22), (2.24), замечаем, что соответствующая этому соотношению функция

$$f(t, c) = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[-\frac{\pi_\omega(t)q'(t)}{q(t)}\, c - c - \alpha_0 q(t)c^2 + 1 + \varepsilon_1(t)\right]$$

при любом значении $c \neq 1$ сохраняет знак в некоторой левой окрестности ω. Поэтому согласно лемме 2.1 из работы [10] для $z(t)$ существует конечный или равный $\pm\infty$ предел при $t \uparrow \omega$. С учетом этого факта и второго из условий (2.4) замечаем, что соотношение

$$\ln|y'(t)| = \ln|\pi_\omega(t)| + \int_{t_1}^{t} \frac{q(\tau)z(\tau)}{\pi_\omega(\tau)}\, d\tau + C,$$

где C — некоторая постоянная, вытекающее из (2.25), не противоречит асимптотическому соотношению (2.21) лишь в случае, когда $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z(t) = 1$. Поэтому согласно (2.25) имеет место асимптотическое представление (2.8) при $k = 2$, в силу которого

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [1 + q(t)(1 + \varepsilon_2(t))], \tag{2.26}$$

где $\varepsilon_2 : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{t\uparrow\omega} \varepsilon_2(t) = 0. \tag{2.27}$$

Учитывая, что

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-1} + \frac{y'(t)}{y(t)},$$

и полагая

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\,[2+q(t)z(t)], \tag{2.28}$$

из (2.26) получаем

$$z'(t) = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[2(1+\varepsilon_2(t)) - 2z(t) + q(t)(1+\varepsilon_2(t))z(t) - q(t)z^2(t) - \frac{\pi_\omega(t)q'(t)}{q(t)}z(t)\right].$$

Используя это равенство точно так же, как и выше, устанавливаем, что для $z(t)$ существует конечный или равный $\pm\infty$ предел при $t\uparrow\omega$. В силу существования этого предела, а также второго из условий (2.4) и (1.3) замечаем, что соотношение

$$\ln|y(t)| = 2\ln|\pi_\omega(t)| + \int\limits_{t_0}^{t}\frac{q(\tau)z(\tau)}{\pi_\omega(\tau)}\,d\tau + C,$$

где C — некоторая постоянная, вытекающее из (2.28), не противоречит асимптотическому соотношению (2.7) лишь в случае, когда $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z(t) = 1$. Поэтому согласно (2.28) имеет место асимптотическое представление (2.8) при $k=1$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3. *Необходимость.* Пусть y — произвольное $P_\omega(Y_0,0)$-решение дифференциального уравнения (1.1), для которого существует (конечный или равный $\pm\infty$) предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)}$. Тогда существует промежуток $[t_1,\omega[\subset[a,\omega[$, на котором это решение и его производные до третьего порядка включительно отличны от нуля, причем $\operatorname{sign} y(t) = \mu_0$ и $\operatorname{sign} y'(t) = \mu_1$, и согласно лемме 2.2 имеют место предельные соотношения (2.14).

В силу первого из предельных соотношений (2.14) выполняются первые два из условий (2.9) и имеет место первое из представлений (2.12).

Далее, замечаем, что

$$\left(\frac{y''(t)}{y(t)L_0(y(t))}\right)' = \frac{y'''(t)}{y(t)L_0(y(t))}\left[1 - \frac{y''(t)y'(t)}{y'''(t)y(t)} - \frac{y''(t)y'(t)}{y'''(t)y(t)}\cdot\frac{y(t)L_0'(y(t))}{L_0(y(t))}\right],$$

где $L_0 : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при $y\to Y_0$ функция, удовлетворяющая условиям (1.3). Поэтому в силу (2.14) и (1.3)

$$\frac{y'''(t)}{y(t)L_0(y(t))} = \frac{1+o(1)}{2}\left(\frac{y''(t)}{y(t)L_0(y(t))}\right)' \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Из (1.1) с учетом этого асимптотического соотношения и (1.3) следует, что

$$\left(\frac{y''(t)}{y(t)L_0(y(t))}\right)' = 2\alpha_0 p(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Интегрируя данное соотношение на промежутке от t_1 до t, получаем

$$\frac{y''(t)}{y(t)L_0(y(t))} = C + 2\alpha_0(1-\lambda_0)I(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.29}$$

где C — некоторая вещественная постоянная.

Если в I предел интегрирования $A = a$, то это представление запишется в виде

$$\frac{y''(t)}{y(t)L_0(y(t))} = 2\alpha_0 I(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.30}$$

Покажем, что в случае, когда $A = \omega$, также имеет место (2.30), т. е. $C = 0$ в (2.29). В самом деле, если $C \neq 0$, то согласно (2.29)

$$\frac{y''(t)}{y(t)L_0(y(t))} = C + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

и поэтому, учитывая (1.1), получаем

$$\frac{y'''(t)}{y''(t)} = \frac{\alpha_0}{C} p(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда следует, что

$$\ln|y''(t)| = C_1 + \frac{\alpha_0}{C}\, I(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где C_1 — некоторая вещественная постоянная. Однако это невозможно, поскольку выражение, стоящее справа, имеет конечный предел при $t \uparrow \omega$, а слева, в силу первого из условий (1.6), — бесконечный. Значит, в (2.29) $C = 0$ и имеет место представление (2.30).

Теперь, учитывая (1.3), записываем (2.30) в виде

$$\frac{y''(t)}{y(t)L(y(t))} = 2\alpha_0 I(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.31}$$

Из (1.1) и (2.31) с учетом третьего из предельных соотношений (2.14) следует третье из условий (2.9).

Поскольку функция L удовлетворяет условию S_1 и выполняется первое из предельных соотношений (2.14), с учетом свойства M_1 медленно меняющихся функций находим

$$L(y(t)) = L\left(\mu_0 e^{(1+o(1))\ln|\pi_\omega(t)|}\right) = |[1+o(1)]\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma\, L_1\left([1+o(1)]\ln|\pi_\omega(t)|\right) =$$

$$= |\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma L_1\left(|\ln|\pi_\omega(t)|\right)[1+o(1)] = L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В силу этого соотношения, первого из предельных соотношений (2.14) и третьего из условий (2.9) из (2.31) получаем

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = -\alpha_0 p(t)\pi_\omega^2(t) L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

т. е. имеет место второе из асимптотических представлений (2.12). Отсюда с учетом второго из условий (2.14) следует первое из условий (2.10) и, кроме того,

$$\ln|y'(t)| = -\alpha_0 \int\limits_{t_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0|\pi_\omega(\tau)|)\,[1+o(1)]\,d\tau + C,$$

где C — некоторая вещественная постоянная. Поскольку здесь левая часть в силу (1.6) имеет бесконечный предел при $t \uparrow \omega$, выполняется второе из условий (2.10) и имеет место представление

$$\ln|y'(t)| = -\alpha_0 \int\limits_{t_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0|\pi_\omega(\tau)|)\,d\tau[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Из этого представления с учетом первого из условий (2.14) и первого из условий (2.10) получаем представление (2.11).

Достаточность. Пусть функция L удовлетворяет условию S_1 и выполняются условия (2.9), (2.10). Покажем, что в этом случае уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0, 0)$-решения, и выясним вопрос о количестве таких решений.

Применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\begin{gathered} \ln|y(t)| = (1+v_3(\tau))\ln|\pi_\omega(t)|, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+v_1(\tau)}{\pi_\omega(t)}, \\ \frac{y''(t)}{y'(t)} = 2\alpha_0\pi_\omega(t)I(t)L_0(\mu_0|\pi_\omega(t)|)[1+v_2(\tau)], \quad \tau = \beta\ln|\pi_\omega(t)|, \end{gathered} \tag{2.32}$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

и $L_0 : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывно дифференцируемая и медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция, удовлетворяющая условиям (1.3), получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= \beta\left[h_2(\tau)(1+v_1)(1+v_2) - (1+v_1)^2 + 1 + v_1\right], \\ v_2' &= \beta\left[\frac{h_1(\tau)H(\tau,v_3)}{2(1+v_1)} - h_2(\tau)(1+v_2)^2 - (1+v_2)[1+h_1(\tau)+h_3(\tau)]\right], \\ v_3' &= \frac{1}{\tau}\,[v_1 - v_3], \end{aligned} \tag{2.33}$$

в которой

$$h_1(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I(t)}, \quad h_2(\tau(t)) = 2\alpha_0\pi_\omega^2(t)I(t)L_0(\mu_0|\pi_\omega(t)|),$$

$$h_3(\tau(t)) = \frac{\mu_0|\pi_\omega(t)|L_0'(\mu_0|\pi_\omega(t)|)}{L_0(\mu_0|\pi_\omega(t)|)}, \quad H(\tau(t), v_3) = \frac{L\left(\mu_0 e^{(1+v_3)\ln|\pi_\omega(t)|}\right)}{L_0(\mu_0|\pi_\omega(t)|)}.$$

Здесь в силу выбора числа β функция $\tau(t) = \beta \ln|\pi_\omega(t)|$ такова, что при некотором $t_0 \in \in [a, \omega[$

$$\tau : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[, \quad \tau'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \tau(t) = +\infty.$$

Поэтому согласно условиям (2.9), (2.10), (1.3)

$$\lim_{\tau \to +\infty} h_1(\tau) = -2, \quad h_2(\tau) = 0, \quad h_3(\tau) = 0 \tag{2.34}$$

и существует число $t_1 \in [t_0, \omega[$ такое, что $\mu_0 e^{(1+v_3)\ln|\pi_\omega(t)|} \subset \Delta_{Y_0}$ при $t \in [t_1, \omega[$ и $|v_3| \leq \dfrac{1}{2}$. Отсюда, в частности, ясно, что полученная система дифференциальных уравнений определена на множестве $\Omega = [\tau_1, +\infty[\times \mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}$, где

$$\tau_1 = \beta \ln|\pi_\omega(t_1)|, \quad \mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}} = \left\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : |v_i| \leq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, 3\right\}.$$

Поскольку функция L удовлетворяет условию S_1, с учетом свойства M_1 медленно меняющихся функций имеем

$$L(y(t)) = L\left(\mu_0 e^{(1+v_3)\ln|\pi_\omega(t)|}\right) = |1 + v_3|^\sigma |\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma L_1((1 + v_3)\ln|\pi_\omega(t)|) =$$

$$= |1 + v_3|^\sigma \ln|\pi_\omega(t)|^\sigma L_1(\ln|\pi_\omega(t)|)[1 + R(t, v_3)] = L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)[1 + R(t, v_3)],$$

где

$$\lim_{t \uparrow \omega} R(t, v_3) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad |v_1| \leq \frac{1}{2}.$$

В силу этого факта и (2.34) систему дифференциальных уравнений (2.33) можно записать в виде

$$\begin{aligned} v_1' &= \beta[f_1(\tau, v_1, v_2, v_3) - v_1 - v_1^2], \\ v_2' &= \beta[f_2(\tau, v_1, v_2, v_3) + v_1 + v_2 - \sigma v_3 + V(v_1, v_3)], \\ v_3' &= \frac{1}{\tau}[v_1 - v_3], \end{aligned} \tag{2.35}$$

где функции $f_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, непрерывны и таковы, что

$$\lim_{\tau \to +\infty} f_i(\tau, v_1, v_2, v_3) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}} \tag{2.36}$$

и

$$V(v_1, v_3) = |1 + v_3|^\sigma (1 + v_1)^{-1} - 1 - \sigma v_3 + v_1.$$

В силу вида функции V и условий (2.36) система (2.35) допускает применение теоремы 2.6 из работы [9]. Чтобы воспользоваться этой теоремой, необходимо еще выяснить свойства матриц

$$C_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sigma \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

составленных соответственно из коэффициентов, стоящих в скобках, при v_1, v_2, v_3 во всех уравнениях системы и при v_1, v_2 в первых двух уравнениях системы. Для этих матриц $\det C_3 = 1$ и уравнение $\det[C_2 - \rho E_2] = 0$, где E_2 — единичная матрица второго порядка, имеет корни $\rho_{1,2} = \pm 1$.

Тогда согласно теореме 2.6 из работы [9] система дифференциальных уравнений (2.35) имеет двупараметрическое семейство решений $(v_i)_{i=1}^3 : [\tau_2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\tau_2 \geq \tau_1$, стремящихся к нулю при $\tau \to +\infty$. Каждому такому решению в силу замены (2.32) соответствует решение $y : [t_2, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$, $t_2 \in [a, \omega[$, дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ первое из представлений (2.12) и асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = (1 + o(1)) \ln|\pi_\omega(t)|, \quad \frac{y''(t)}{y'(t)} = 2\alpha_0 \pi_\omega(t) I(t) L_0(\mu_0 |\pi_\omega(t)|)[1 + o(1)].$$

Второе из этих двух представлений в силу условий (1.3) и третьего из условий (2.9) может быть записано в виде второго из представлений (2.12). Первое же из них, как было показано при установлении необходимости, может быть уточнено до вида (2.11).

Используя представления (2.11), (2.12), а также условия (2.9), (2.10), нетрудно проверить, что любое из таких решений уравнения (1.1) является $P_\omega(Y_0, 0)$-решением.

Теорема доказана.

Выводы. В настоящей статье для дифференциального уравнения третьего порядка (1.1) с произвольной, удовлетворяющей условию S_1, медленно меняющейся при $y \to Y_0$ функцией $L : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ впервые исследован вопрос об асимптотике при $t \uparrow \omega$ всех $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений в особых случаях, когда $\lambda_0 = \pm\infty$ и $\lambda_0 = 0$. При этом получены необходимые и достаточные условия существования таких решений, выяснен вопрос об их количестве, а также установлены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для $\ln|y(t)|$ и $\dfrac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)}$, $k = 1, 2$. В силу произвольности выбора $\omega \leq +\infty$ результаты могут быть использованы для описания асимптотики не только правильных, но и различного типа сингулярных решений уравнения (1.1). В частном случае $L(y) \equiv 1$, т. е. линейного дифференциального уравнения третьего порядка, они дополняют известные результаты (см., например, [2]).

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.
2. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.
3. *Муса Джабер Абу Эль-Шаур.* Асимптотика решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, близких к линейным // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 2. — С. 230–241.

4. *Evtukhov V. M., Mousa Jaber Abu Elshour.* Asymptotic behaviour of solutions of second order nonlinear differential equations clouse to linear equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. — 2008. — **43**. — P. 97 – 106.

5. *Mousa Jaber Abu Elshour.* Asymptotic representations of the solutions of a class of the second order non-autonomous differential equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. — 2008. — **44**. — P. 59 – 68.

6. *Mousa Jaber Abu Elshour, Evtukhov V. M.* Asymptotic representations for solutions of a class of second order nonlinear differential equations // Miscolc Math. Notes. — 2009. — **2**. — P. 119 – 127.

7. *Mousa Jaber Abu Elshour.* Asymptotic representations of solutions of second order nonlinear differential equations // Int. Math. Forum. — 2009. — **4**, № 17. — P. 835 – 844.

8. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис.... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1998. — 295 с.

9. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 52 – 80.

10. *Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н.* Асимптотические представления решений двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью // Дифференц. уравнения. — 2008. — **44**, № 3. — С. 308 – 322.

Получено 25.04.12