УДК 517.926.7

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

М. А. Елишевич

Киев. нац. ун-т стр-ва и архитектуры
Украина, 03680, Киев, 37, Воздухофлотский просп., 31

We find sufficient conditions for reducing a system of linear nonhomogeneous first order differential equations with rectangular matrices to a canonical form. We construct the general solution of the system and solve the Cauchy problem.

Визначено достатні умови звідності системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями до канонічної форми, побудовано її загальний розв'язок і розв'язок задачі Коші.

Постановка задачи. В данной работе для системы

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [a;b], \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — прямоугольные матрицы-функции размерности $m \times n$, $f(t)$ — вектор-функция размерности m, $A(t)$, $B(t)$, $f(t) \in C^\infty[a;b]$ действительные или комплексные, рассматривается задача определения условий приводимости к канонической форме[1], условий ее разрешимости и разрешимости задачи Коши с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in [a;b], \tag{2}$$

построения ее общего решения и решения задачи Коши.

Случай, когда $A(t)$ и $B(t)$ — квадратные матрицы, рассматривался во многих работах (см., например, [1 – 4]). В [1, с. 334 – 336] построено общее решение для случая постоянных матриц A и B, в [2, с. 58 – 120] — общее решение с использованием левого регуляризирующего оператора, а в [3, с. 91 – 99] — общее решение и решение задачи Коши с использованием базовых матриц. В [4, с. 53 – 74] система сведена к центральной канонической форме, построено общее решение и решение задачи Коши с использованием жордановых наборов векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора

$$L(t) = A(t) - B(t)\,\frac{d}{dt}$$

и сопряженной матрицы $B^*(t)$ относительно оператора

$$L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt}\,B^*(t),$$

[1] Термин взят по аналогии с канонической формой пучка матриц $(A - \lambda B)$ [1, с. 326 – 330].

формально сопряженного к $L(t)$. Они используются и в данной работе.

Основные определения.

Определение 1. *Элемент* $\varphi^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ *имеет в точке* $t \in [a;b]$ *конечную жорданову цепочку векторов матрицы* $B(t)$ *относительно оператора* $L(t)$ *длины* p, $p \geq 1$, *если существуют векторы* $\varphi^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,p}$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\varphi^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\varphi^{(i)}(t) = L(t)\varphi^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2,p},$$

$$L(t)\varphi^{(p)}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

Определение 2. *Элемент* $\tilde{\varphi}^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ *имеет в точке* $t \in [a;b]$ *циклическую жорданову цепочку векторов матрицы* $B(t)$ *относительно оператора* $L(t)$ *длины* $\tilde{p}$, $\tilde{p} \geq 1$, *если существуют векторы* $\tilde{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,\tilde{p}}$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\tilde{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2,\tilde{p}},$$

$$L(t)\tilde{\varphi}^{(\tilde{p})}(t) = 0.$$

Определение 3. *Элемент* $\hat{\varphi}^{(1)}(t)$ *имеет в точке* $t \in [a;b]$ *вспомогательную цепочку векторов матрицы* $B(t)$ *относительно оператора* $L(t)$ *длины* $\hat{p}$, $\hat{p} \geq 1$, *если существуют векторы* $\hat{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,\hat{p}}$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\hat{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\hat{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2,\hat{p}},$$

$$B(t)\hat{\varphi}^{(1)}(t) \notin \operatorname{Im} L(t),$$

$$L(t)\hat{\varphi}^{(\hat{p})}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

Аналогично определим цепочки векторов на отрезке $[a;b]$. Их свойства исследованы в [5]. В дальнейшем будем предполагать, что доказываемые утверждения выполняются на всем отрезке $[a;b]$, если не оговорено иное.

В [4, с. 53 – 74] рассмотрен случай, когда $A(t)$ и $B(t)$ — квадратные матрицы и существуют только конечные цепочки. В данной работе рассматривается случай, когда $A(t)$ и $B(t)$ — прямоугольные матрицы и могут существовать конечные, циклические и вспомогательные цепочки, но их количество и длины постоянны при всех $t \in [a;b]$.

Полученный результат. Построим жордановы цепочки векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ и матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ при $t \in [a;b]$.

Определим циклические цепочки матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ единичной длины. Пусть мы построили $\breve{r}$, $\breve{r} \geq 0$, линейно независимых векторов $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1,\breve{r}}$.

Аналогично определим циклические цепочки матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ единичной длины. Пусть мы построили $\check{r}$, $\check{r} \geq 0$, линейно независимых векторов $\breve{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$.

Определим циклические цепочки матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длины больше 1 в порядке возрастания их длин. Выберем вектор $\tilde{\varphi}_1^{(1)}(t) \in \ker B(t)$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, имеющий цепочку наименьшей из возможных длин $(\tilde{s}_1 + 1)$. Далее выберем вектор $\tilde{\varphi}_2^{(1)}(t) \in \ker B(t)$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $\tilde{\varphi}_1^{(1)}(t)$, имеющий цепочку наименьшей из возможных длин $(\tilde{s}_2 + 1)$, и т. д. Пусть мы построили $\tilde{r}$, $\tilde{r} \geq 0$, цепочек длин $(\tilde{s}_i + 1)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $0 < \tilde{s}_1 \leq \ldots \leq \tilde{s}_{\tilde{r}}$, состоящих из векторов $\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$.

Аналогично определим циклические цепочки матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ длины больше 1 в порядке возрастания их длин. Пусть мы построили $\hat{r}$, $\hat{r} \geq 0$, цепочек длин $(\hat{s}_i + 1)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $0 < \hat{s}_1 \leq \ldots \leq \hat{s}_{\hat{r}}$, состоящих из векторов $\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$.

Определим конечные цепочки матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ в порядке убывания их длин. Выберем вектор $\varphi_1^{(1)}(t) \in \ker B(t)$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, имеющий цепочку наибольшей из возможных длин s_1. Далее выберем вектор $\varphi_2^{(1)}(t) \in \ker B(t)$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\varphi_1^{(1)}(t)$, имеющий цепочку наибольшей из возможных длин s_2 и т. д. Пусть мы построили r, $r \geq 0$, цепочек длин s_i, $i = \overline{1, r}$, $s_1 \geq \ldots \geq s_r > 0$, состоящих из векторов $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$.

Согласно [5] существуют также:

r конечных цепочек матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ длин s_i, $i = \overline{1, r}$, состоящих из векторов $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$;

$\hat{r}$ вспомогательных цепочек матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длин $\hat{s}_i$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, состоящих из векторов $\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$;

$\tilde{r}$ вспомогательных цепочек матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ длин $\tilde{s}_i$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, состоящих из векторов $\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$;

$\check{r}$ векторов $\breve{\varphi}_i(t) \notin \operatorname{Im} B(t) \bigcup \operatorname{Im} L(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$;

$\check{r}$ векторов $\breve{\psi}_i(t) \notin \operatorname{Im} B^*(t) \bigcup \operatorname{Im} L^*(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$,

таких, что элементы каждого из следующих множеств принадлежат $C^\infty[a; b]$ и линейно независимы:

1) $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$;

2) $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $L(t)\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$;

3) $\breve{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$;

4) $\breve{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $L^*(t)\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $L^*(t)\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $B^*(t)\hat{\psi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $L^*(t)\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$;

пары множеств 1 и 4, 2 и 3 соответственно представляют собой биортогональные системы

$$\big(\breve{\varphi}_i(t), \breve{\psi}_k(t)\big) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, \check{r}},$$

$$\Big(\breve{\varphi}_i(t), \breve{\psi}_k(t)\Big) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\breve{r}},$$

$$\Big(\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t), L^*(t)\hat{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \Big(L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t), \hat{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \delta_{ik}\delta_{l+j,\tilde{s}_i+1}, \quad j,l = \overline{1,\tilde{s}_i}, \quad i,k = \overline{1,\tilde{r}},$$

$$\Big(\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1)}(t), B^*(t)\hat{\psi}_k^{(1)}(t)\Big) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\tilde{r}},$$

$$\Big(\hat{\varphi}_i^{(j)}(t), L^*(t)\tilde{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \Big(L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t), \tilde{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \delta_{ik}\delta_{l+j,\hat{s}_i+1}, \quad j,l = \overline{1,\hat{s}_i}, \quad i,k = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\Big(B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t), \tilde{\psi}_k^{(\hat{s}_i+1)}(t)\Big) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\Big(\varphi_i^{(j)}(t), L^*(t)\psi_k^{(l)}(t)\Big) = \Big(L(t)\varphi_i^{(j)}(t), \psi_k^{(l)}(t)\Big) = \delta_{ik}\delta_{l+j,s_i+1}, \quad j,l = \overline{1,s_i}, \quad i,k = \overline{1,r},$$

все остальные скалярные произведения векторов из соответствующих пар множеств равны 0.

Обозначим

$$s = \sum_{i=1}^{r} s_i, \quad \tilde{s} = \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{s}_i, \quad \hat{s} = \sum_{i=1}^{\hat{r}} \hat{s}_i, \quad \alpha = n - \breve{r} - \tilde{r} - \tilde{s} - s - \hat{s} = m - \breve{r} - \hat{r} - \hat{s} - s - \tilde{s}.$$

Дополним элементы множества 1 векторами $q_i(t) \in C^\infty[a;b]$, $i = \overline{1,\alpha}$, до полного базиса. Выберем их так, чтобы они были ортогональны всем элементам множества 4.

Лемма 1. *Векторы $L(t)q_i(t)$, $i = \overline{1,\alpha}$, ортогональны всем векторам множества 3.*

Доказательство. Согласно [4, с. 54, 55] для векторов $x(t), y(t) \in C^\infty[a;b]$ равенство

$$(L(t)x(t), y(t)) = (x(t), L^*(t)y(t))$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$(B(t)x(t), y(t)) = \text{const}. \tag{3}$$

Имеют место равенства

$$\Big(B(t)q_i(t), \breve{\psi}_k(t)\Big) = \Big(q_i(t), B^*(t)\breve{\psi}_k(t)\Big) = 0, \quad i = \overline{1,\alpha}, \quad k = \overline{1,\breve{r}},$$

$$\Big(B(t)q_i(t), \tilde{\psi}_k^{(1)}(t)\Big) = \Big(q_i(t), B^*(t)\tilde{\psi}_k^{(1)}(t)\Big) = 0, \quad i = \overline{1,\alpha}, \quad k = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\Big(B(t)q_i(t), \tilde{\psi}_k^{(j)}(t)\Big) = \Big(q_i(t), B^*(t)\tilde{\psi}_k^{(j)}(t)\Big) = \Big(q_i(t), L^*(t)\tilde{\psi}_k^{(j-1)}(t)\Big) = 0,$$

$$i = \overline{1,\alpha}, \quad j = \overline{2,\hat{s}_k+1}, \quad k = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\Big(B(t)q_i(t), \psi_k^{(1)}(t)\Big) = \Big(q_i(t), B^*(t)\psi_k^{(1)}(t)\Big) = 0, \quad i = \overline{1,\alpha}, \quad k = \overline{1,r},$$

$$\Big(B(t)q_i(t), \psi_k^{(j)}(t)\Big) = \Big(q_i(t), B^*(t)\psi_k^{(j)}(t)\Big) = \Big(q_i(t), L^*(t)\psi_k^{(j-1)}(t)\Big) = 0,$$

$$i = \overline{1, \alpha}, \quad j = \overline{2, s_k}, \quad k = \overline{1, r},$$

$$\Big(B(t)q_i(t), \hat{\psi}_k^{(1)}(t)\Big) = \Big(q_i(t), B^*(t)\hat{\psi}_k^{(1)}(t)\Big) = 0, \quad i = \overline{1, \alpha}, \quad k = \overline{1, \tilde{r}},$$

$$\Big(B(t)q_i(t), \hat{\psi}_k^{(j)}(t)\Big) = \Big(q_i(t), B^*(t)\hat{\psi}_k^{(j)}(t)\Big) = \Big(q_i(t), L^*(t)\hat{\psi}_k^{(j-1)}(t)\Big) = 0,$$

$$i = \overline{1, \alpha}, \quad j = \overline{2, \tilde{s}_k}, \quad k = \overline{1, \tilde{r}},$$

условие (3) выполняется для всех входящих в них пар векторов, отсюда

$$\Big(L(t)q_i(t), \breve{\psi}_k(t)\Big) = \Big(q_i(t), L^*(t)\breve{\psi}_k(t)\Big) = 0, \quad i = \overline{1, \alpha}, \quad k = \overline{1, \breve{r}},$$

$$\Big(L(t)q_i(t), \tilde{\psi}_k^{(j)}(t)\Big) = \Big(q_i(t), L^*(t)\tilde{\psi}_k^{(j)}(t)\Big) = 0, \quad i = \overline{1, \alpha}, \quad j = \overline{1, \hat{s}_k + 1}, \quad k = \overline{1, \hat{r}},$$

$$\Big(L(t)q_i(t), \psi_k^{(j)}(t)\Big) = \Big(q_i(t), L^*(t)\psi_k^{(j)}(t)\Big) = 0, \quad i = \overline{1, \alpha}, \quad j = \overline{1, s_k}, \quad k = \overline{1, r},$$

$$\Big(L(t)q_i(t), \hat{\psi}_k^{(j)}(t)\Big) = \Big(q_i(t), L^*(t)\hat{\psi}_k^{(j)}(t)\Big) = 0, \quad i = \overline{1, \alpha}, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_k}, \quad k = \overline{1, \tilde{r}}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Векторы* $B(t)q_i(t)$, $i = \overline{1, \alpha}$, $L(t)\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, *линейно независимы.*

Доказательство. Пусть при некотором $t \in [a; b]$ имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{\alpha} c_{0i}B(t)q_i(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s_i} c_{ij}L(t)\varphi_i^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\sum_{j=1}^{\tilde{s}_i} \tilde{c}_{ij}L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\hat{r}} \hat{c}_{i0}B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t) + \sum_{i=1}^{\hat{r}}\sum_{j=1}^{\hat{s}_i} \hat{c}_{ij}L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{c}_i\breve{\varphi}_i(t) = 0,$$

где скалярные постоянные c_{0i}, $i = \overline{1, \alpha}$, c_{ij}, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\tilde{c}_{ij}$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\hat{c}_{ij}$, $j = \overline{0, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $\breve{c}_i$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, не все равны нулю. С учетом равенств из определений 1–3 представим его в виде

$$B(t)\left[\sum_{i=1}^{\alpha} c_{0i}q_i(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=2}^{s_i} c_{i,j-1}\varphi_i^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\sum_{j=2}^{\tilde{s}_i+1} \tilde{c}_{i,j-1}\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^{\hat{r}}\sum_{j=1}^{\hat{s}_i} \hat{c}_{i,j-1}\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)\right] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{r} c_{is_i}L(t)\varphi_i^{(s_i)}(t) - \sum_{i=1}^{\hat{r}} \hat{c}_{i\hat{s}_i}L(t)\hat{\varphi}_i^{(\hat{s}_i)}(t) - \sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{c}_i\breve{\varphi}_i(t),$$

векторы в правой его части линейно независимы и не являются элементами $\operatorname{Im} B(t)$, отсюда $c_{is_i} = 0$, $i = \overline{1,r}$, $c_{i\hat{s}_i} = 0$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, $\check{c}_i = 0$, $i = \overline{1,\check{r}}$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\alpha} c_{0i} q_i(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=2}^{s_i} c_{i,j-1}\varphi_i^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\sum_{j=2}^{\tilde{s}_i+1} \tilde{c}_{i,j-1}\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^{\hat{r}}\sum_{j=1}^{\hat{s}_i} \hat{c}_{i,j-1}\hat{\varphi}_i^{(j)}(t) \in \ker B(t).$$

Но все входящие сюда векторы линейно независимы с векторами $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $\varphi_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,r}$, являющимися базисом $\ker B(t)$, отсюда $c_{0i} = 0$, $i = \overline{1,\alpha}$, $c_{ij} = 0$, $j = \overline{1, s_i - 1}$, $i = \overline{1,r}$, $\tilde{c}_{ij} = 0$, $j = \overline{1,\tilde{s}_i}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $\hat{c}_{ij} = 0$, $j = \overline{0,\hat{s}_i - 1}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$.

Лемма 2 доказана.

Дополним элементы множества 3 векторами $p_i(t) \in C^{\infty}[a;b]$, $i = \overline{1,\alpha}$, до полного базиса. Выберем их так, чтобы они были ортогональны всем элементам множества 2 и выполнялись равенства

$$(B(t)q_i(t), p_j(t)) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1,\alpha}.$$

Это возможно согласно лемме 2.

Замечание 1. Элементы каждого из следующих множеств линейно независимы:

5) $q_i(t)$, $i = \overline{1,\alpha}$, $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,s_i}$, $i = \overline{1,r}$, $\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\hat{s}_i}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$;

6) $B(t)q_i(t)$, $i = \overline{1,\alpha}$, $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\tilde{s}_i}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $L(t)\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,s_i}$, $i = \overline{1,r}$, $B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, $L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\hat{s}_i}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$;

7) $p_i(t)$, $i = \overline{1,\alpha}$, $\breve{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\hat{s}_i + 1}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,s_i}$, $i = \overline{1,r}$, $\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\tilde{s}_i}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$;

8) $B^*(t)p_i(t)$, $i = \overline{1,\alpha}$, $\breve{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $L^*(t)\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\hat{s}_i}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, $L^*(t)\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,s_i}$, $i = \overline{1,r}$, $B^*(t)\hat{\psi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $L^*(t)\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\tilde{s}_i}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Замечание 2. Пары множеств 5 и 8, 6 и 7 соответственно представляют собой биортогональные системы. Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Перейдем непосредственно к системе (1).

Теорема 1. *Пусть $A(t)$, $B(t)$, $f(t) \in C^{\infty}[a;b]$, при всех $t \in [a;b]$ существуют жордановы цепочки векторов:*

матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$:

r, $r \geq 0$, конечных длин s_i, $s_i > 0$, $i = \overline{1,r}$;

$\tilde{r}$, $\tilde{r} \geq 0$, циклических длин $(\tilde{s}_i + 1)$, $\tilde{s}_i > 0$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$;

$\breve{r}$, $\breve{r} \geq 0$, циклических длины 1;

матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$:

$\hat{r}$, $\hat{r} \geq 0$, циклических длин $(\hat{s}_i + 1)$, $\hat{s}_i > 0$, $i = \overline{1,\hat{r}}$;

$\breve{r}$, $\breve{r} \geq 0$, циклических длины 1.

Тогда существуют неособенные при всех $t \in [a;b]$ квадратные матрицы $P(t), Q(t) \in \in C^{\infty}[a;b]$ порядков m и n соответственно такие, что умножением слева на $P(t)$ и заменой

$$x(t) = Q(t)y(t) \tag{4}$$

система (1) сводится к канонической форме

$$\begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left[\ E_\alpha, J, \tilde{J}, \hat{J}\ \right] & 0_{m-\check{r},\check{r}} \\ 0_{\check{r},n-\check{r}} & 0_{\check{r}\check{r}} \end{bmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left[\ M(t), E_s, \tilde{K}, \hat{K}\ \right] & 0_{m-\check{r},\check{r}} \\ 0_{\check{r},n-\check{r}} & 0_{\check{r}\check{r}} \end{bmatrix} y + g(t), \qquad (5)$$

где 0_{ij} — *нулевой прямоугольный блок размерности* $i \times j$, $J = \operatorname{diag}[J_1, \ldots, J_r]$, $\tilde{J} = \operatorname{diag}[\tilde{J}_1, \ldots, \tilde{J}_{\tilde{r}}]$, $\tilde{K} = \operatorname{diag}[\tilde{K}_1, \ldots, \tilde{K}_{\tilde{r}}]$, $\hat{J} = \operatorname{diag}[\hat{J}_1, \ldots, \hat{J}_{\hat{r}}]$, $\hat{K} = \operatorname{diag}[\hat{K}_1, \ldots, \hat{K}_{\hat{r}}]$, $J_i = I_{s_i}$, $i = \overline{1, r}$, — *нильпотентный блок Жордана размерности* s_i, $\tilde{J}_i = [E_{\tilde{s}_i}, 0_{\tilde{s}_i 1}]$, $\tilde{K}_i = [0_{\tilde{s}_i 1}, E_{\tilde{s}_i}]$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\hat{J}_i = [E_{\hat{s}_i}, 0_{\hat{s}_i 1}]^T$, $\hat{K}_i = [0_{\hat{s}_i 1}, E_{\hat{s}_i}]^T$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $M(t) \in C^\infty[a;b]$ — *квадратная матрица-функция порядка* α, $g(t) \in C^\infty[a;b]$ — *вектор-функция размерности* m.

Доказательство. Матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ построим следующим образом:

$$Q(t) = \left[Q_0(t), \Phi(t), \tilde{\Phi}(t), \hat{\Phi}(t), \check{\Phi}(t)\right], \qquad (6)$$

$$P(t) = \left[P_0(t), \Psi(t), \hat{\Psi}(t), \tilde{\Psi}(t), \check{\Psi}(t)\right]^*, \qquad (7)$$

где

$$Q_0(t) = [q_1(t), \ldots, q_\alpha(t)], \qquad (8)$$

$$\Phi(t) = [\Phi_1(t), \ldots, \Phi_r(t)], \quad \Phi_i(t) = \left[\varphi_i^{(1)}(t), \ldots, \varphi_i^{(s_i)}(t)\right], \quad i = \overline{1, r}, \qquad (9)$$

$$\begin{gathered} \tilde{\Phi}(t) = \left[\tilde{\Phi}_{1,\tilde{s}_1+1}(t), \ldots, \tilde{\Phi}_{\tilde{r},\tilde{s}_{\tilde{r}}+1}(t)\right], \\ \tilde{\Phi}_{ij}(t) = \left[\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t), \ldots, \tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)\right], \quad j = \tilde{s}_i, \tilde{s}_i + 1, \quad i = \overline{1, \tilde{r}}, \end{gathered} \qquad (10)$$

$$\hat{\Phi}(t) = \left[\hat{\Phi}_1(t), \ldots, \hat{\Phi}_{\hat{r}}(t)\right], \quad \hat{\Phi}_i(t) = \left[\hat{\varphi}_i^{(1)}(t), \ldots, \hat{\varphi}_i^{(\hat{s}_i)}(t)\right], \quad i = \overline{1, \hat{r}}, \qquad (11)$$

$$\check{\Phi}(t) = [\check{\varphi}_1(t), \ldots, \check{\varphi}_{\check{r}}(t)], \qquad (12)$$

$$P_0(t) = [p_1(t), \ldots, p_\alpha(t)], \qquad (13)$$

$$\Psi(t) = [\Psi_1(t), \ldots, \Psi_r(t)], \quad \Psi_i(t) = \left[\psi_i^{(s_i)}(t), \ldots, \psi_i^{(1)}(t)\right], \quad i = \overline{1, r}, \qquad (14)$$

$$\begin{gathered} \tilde{\Psi}(t) = \left[\tilde{\Psi}_{1,\hat{s}_1+1}(t), \ldots, \tilde{\Psi}_{\hat{r},\hat{s}_{\hat{r}}+1}(t)\right], \\ \tilde{\Psi}_{ij}(t) = \left[\tilde{\psi}_i^{(j)}(t), \ldots, \tilde{\psi}_i^{(1)}(t)\right], \quad j = \hat{s}_i, \hat{s}_i + 1, \quad i = \overline{1, \hat{r}}, \end{gathered} \qquad (15)$$

$$\hat{\Psi}(t) = \left[\hat{\Psi}_1(t), \ldots, \hat{\Psi}_{\tilde{r}}(t)\right], \quad \hat{\Psi}_i(t) = \left[\hat{\psi}_i^{(1)}(t), \ldots, \hat{\psi}_i^{(\tilde{s}_i)}(t)\right], \quad i = \overline{1, \tilde{r}}, \qquad (16)$$

$$\check{\Psi}(t) = \left[\check{\psi}_1(t), \ldots, \check{\psi}_{\check{r}}(t)\right]. \qquad (17)$$

Выполнив в (1) замену (4), умножив слева на матрицу $P(t)$ и обозначив

$$M(t) = P_0^*(t)L(t)Q_0(t), \tag{18}$$

$$g(t) = P(t)f(t),$$

при этом $P(t), Q(t)$ неособенные согласно замечанию 1, $P(t), Q(t), M(t), g(t) \in C^\infty[a;b]$, с учетом замечания 2, (6) – (17) получим (5).

Теорема 1 доказана.

Векторы $y(t)$, $g(t)$ представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{col}\,[y_0(t), y_1(t), \ldots, y_r(t), \tilde{y}_1(t), \ldots, \tilde{y}_{\tilde{r}}(t), \hat{y}_1(t), \ldots, \hat{y}_{\hat{r}}(t), \breve{y}_1(t), \ldots, \breve{y}_{\breve{r}}(t)]\,, \\ g(t) &= \mathrm{col}\,[g_0(t), g_1(t), \ldots, g_r(t), \hat{g}_1(t), \ldots, \hat{g}_{\tilde{r}}(t), \tilde{g}_1(t), \ldots, \tilde{g}_{\hat{r}}(t), \breve{g}_1(t), \ldots, \breve{g}_{\breve{r}}(t)]\,, \end{aligned} \tag{19}$$

где составляющие $y(t)$ векторы имеют размерности $y_0(t) - \alpha$, $y_i(t) - s_i$, $i = \overline{1,r}$, $\tilde{y}_i(t) - -(\tilde{s}_i + 1)$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $\hat{y}_i(t) - \hat{s}_i$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, $\breve{y}_i(t) - 1$, $i = \overline{1,\breve{r}}$ (скалярные функции),

$$g_0(t) = P_0^*(t)f(t), \tag{20}$$

$$g_i(t) = \Psi_i^*(t)f(t), \quad i = \overline{1,r}, \tag{21}$$

$$\tilde{g}_i(t) = \tilde{\Psi}_{i,\hat{s}_i+1}^*(t)f(t), \quad i = \overline{1,\hat{r}}, \tag{22}$$

$$\hat{g}_i(t) = \hat{\Psi}_i^*(t)f(t), \quad i = \overline{1,\tilde{r}}, \tag{23}$$

$$\breve{g}_i(t) = \breve{\psi}_i^*(t)f(t), \quad i = \overline{1,\breve{r}}. \tag{24}$$

Тогда система (5) распадается на следующие независимые системы:

$$\frac{dy_0}{dt} = M(t)y_0 + g_0(t), \tag{25}$$

$$J_i\,\frac{dy_i}{dt} = y_i + g_i(t), \quad i = \overline{1,r}, \tag{26}$$

$$\tilde{J}_i\,\frac{d\tilde{y}_i}{dt} = \tilde{K}_i\tilde{y}_i + \hat{g}_i(t), \quad i = \overline{1,\tilde{r}}, \tag{27}$$

$$\hat{J}_i\,\frac{d\hat{y}_i}{dt} = \hat{K}_i\hat{y}_i + \tilde{g}_i(t), \quad i = \overline{1,\hat{r}}, \tag{28}$$

$$0 = \breve{g}_i(t), \quad i = \overline{1,\breve{r}}. \tag{29}$$

Лемма 3. *Столбцы матрицы*

$$X_\alpha(t) = Q_0(t)X(t), \tag{30}$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица системы

$$\frac{dx}{dt} = M(t)x, \tag{31}$$

являются линейно независимыми решениями системы

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = A(t)x. \tag{32}$$

Доказательство. Их линейная независимость следует из (8), (30), замечания 1 и невырожденности матрицы $X(t)$. Из (18), (30), (31) следует

$$\begin{aligned} A(t)X_\alpha(t) - B(t)\frac{d}{dt}\,X_\alpha(t) &= [L(t)Q_0(t)]X(t) - B(t)Q_0(t)\,\frac{d}{dt}\,X(t) = \\ &= [L(t)Q_0(t)]X(t) - B(t)Q_0(t)M(t)X(t) = \\ &= [L(t)Q_0(t)]X(t) - B(t)Q_0(t)P_0^*(t)[L(t)Q_0(t)]X(t). \end{aligned}$$

Умножив полученное выражение слева на матрицу $P(t)$, с учетом (7), (13) – (17), леммы 1, замечания 2 получим, что оно равно 0.

Лемма 3 доказана.

Замечание 3. Столбцы матрицы

$$Y_\alpha(t) = P_0(t)\left[X^{-1}(t)\right]^* \tag{33}$$

являются линейно независимыми решениями сопряженной к (32) системы

$$\frac{d}{dt}\,[B^*(t)y] = -A^*(t)y. \tag{34}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$Y_\alpha^*(t)B(t)X_\alpha(t) = E_\alpha.$$

Доказательство. Из замечания 2, (8), (13), (30), (33) следует

$$Y_\alpha^*(t)B(t)X_\alpha(t) = X^{-1}(t)P_0^*(t)B(t)Q_0(t)X(t) = E_\alpha.$$

Лемма 4 доказана.

Следствие 1. *Если в множествах 5 – 8 векторы $q_i(t), B(t)q_i(t), p_i(t), B^*(t)p_i(t)$, $i = \overline{1,\alpha}$, заменить столбцами матриц $X_\alpha(t)$, $B(t)X_\alpha(t)$, $Y_\alpha(t)$, $B^*(t)Y_\alpha(t)$ соответственно, то линейная независимость и биортогональность их элементов сохранятся.*

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы 1, то для разрешимости системы (1) необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\sum_{k=0}^{\hat{s}_i} \frac{d^k}{dt^k}\,(f(t), \tilde{\psi}_i^{(\hat{s}_i-k+1)}(t)) = 0, \quad i = \overline{1, \hat{r}}, \tag{35}$$

$$(f(t), \breve{\psi}_i(t)) = 0, \quad i = \overline{1, \breve{r}}. \tag{36}$$

Ее общее решение имеет вид

$$\begin{gathered} x(t) = X_\alpha(t)c + \int\limits_a^t X_\alpha(t)Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)\,d\tau - \sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{k=0}^{s_i-1} I_{s_i}^k \frac{d^k}{dt^k}\,[\Psi_i^*(t)f(t)] - \\ - \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{\Phi}_{i\tilde{s}_i}(t) \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1} \left(I_{\tilde{s}_i}^T\right)^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\hat{\Psi}_i^*(t)f(t)\right] - \sum_{i=1}^{\hat{r}} \hat{\Phi}_i(t) \sum_{k=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^k\,\frac{d^k}{dt^k}\left[\tilde{\Psi}_{i\hat{s}_i}^*(t)f(t)\right] + \\ + \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\sum_{k=0}^{\tilde{s}_i}\left[\frac{d^k}{dt^k}\,\tilde{\beta}_i(t)\right]\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-k+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve{r}}\breve{\beta}_i(t)\breve{\varphi}_i(t), \quad x(t) \in C^\infty[a;b], \end{gathered} \tag{37}$$

где c — произвольный постоянный вектор размерности α, $\tilde{\beta}_i(t) \in C^\infty[a;b]$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\breve{\beta}_i(t) \in C^\infty[a;b]$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, — произвольные скалярные функции.

Доказательство. Общее решение системы (25) имеет вид [1, с. 412; 2, с. 59, 60]

$$y_0(t) = X(t)c + \int\limits_a^t X(t)X^{-1}(\tau)g_0(\tau)\,d\tau. \tag{38}$$

Системы (26) имеют единственные решения [4, с. 61, 62]

$$y_i(t) = -\sum_{k=0}^{s_i-1} I_{s_i}^k \frac{d^k}{dt^k}\,g_i(t), \quad i = \overline{1, r}. \tag{39}$$

Представим векторы $\tilde{y}_i(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, в виде

$$\tilde{y}_i(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_i(t) \\ u_i(t) + v_i(t) \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}}, \tag{40}$$

где $u_i(t)$, $v_i(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, — векторы размерности $\tilde{s}_i$. Тогда системы (27) можно заменить следующими эквивалентными системами:

$$I_{\tilde{s}_i}^T \frac{du_i}{dt} = u_i + \hat{g}_i(t), \quad I_{\tilde{s}_i}^T \frac{dv_i}{dt} = v_i - \begin{bmatrix} \dfrac{d\tilde{\beta}_i(t)}{dt} \\ 0_{\tilde{s}_i-1,1} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}},$$

которые при фиксированном наборе $\tilde{\beta}_i(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, имеют единственные решения

$$u_i(t) = -\sum_{k=0}^{\tilde{s}_i - 1} \left(I_{\tilde{s}_i}^T\right)^k \frac{d^k}{dt^k}\, \hat{g}_i(t), \quad v_i(t) = \operatorname{col}\left[\frac{d}{dt}\,\tilde{\beta}_i(t), \ldots, \frac{d^{\tilde{s}_i}}{dt^{\tilde{s}_i}}\,\tilde{\beta}_i(t)\right], \quad i = \overline{1, \tilde{r}}. \tag{41}$$

Представим векторы $\tilde{g}_i(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, в виде

$$\tilde{g}_i(t) = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{i1}(t) \\ \tilde{g}_{i2}(t) \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, \hat{r}},$$

где $\tilde{g}_{i1}(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, — скалярные функции, $\tilde{g}_{i2}(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, — векторы размерности $\hat{s}_i$. Тогда системы (28) можно заменить следующими эквивалентными уравнениями и системами:

$$\frac{d\hat{y}_{i1}}{dt} = \tilde{g}_{i1}\left(t\right), \quad I_{\hat{s}_i}\frac{d\hat{y}_i}{dt} = \hat{y}_i + \tilde{g}_{i2}(t), \quad i = \overline{1, \hat{r}},$$

где $\hat{y}_{i1}(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, — скалярные функции, первые координаты векторов $\hat{y}_i(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$. Отсюда

$$\hat{y}_i(t) = -\sum_{k=0}^{\hat{s}_i - 1} I_{\hat{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k}\, \tilde{g}_{i2}(t), \quad i = \overline{1, \hat{r}}, \tag{42}$$

$$-e_1^T \sum_{k=1}^{\hat{s}_i} I_{\hat{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k}\, \tilde{g}_{i2}(t) = \tilde{g}_{i1}(t), \quad i = \overline{1, \hat{r}}, \tag{43}$$

где e_1 — первый столбец матрицы $E_{\hat{s}_i}$, — условия разрешимости систем (28) и, соответственно, (1). Равенства (43) представляют собой условия разрешимости систем (28) и, соответственно, (1).

Равенства (29) не содержат координат вектора $y\left(t\right)$, они являются условиями разрешимости системы (1).

Координаты $\breve{y}_i(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, в системы (25) – (29) не входят, поэтому положим

$$\breve{y}_i(t) = \breve{\beta}_i(t), \quad i = \overline{1, \breve{r}}. \tag{44}$$

Подставив (19) – (24), (30), (33), (38) – (42), (44) в (4), (29), (43), получим (35) – (37). При этом $x(t) \in C^\infty[a;b]$.

Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Система (32) разрешима. Ее общее решение имеет вид*

$$x(t) = X_\alpha(t)c + \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i} \left[\frac{d^k}{dt^k}\tilde{\beta}_i(t)\right] \tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i - k + 1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{\beta}_i(t)\breve{\varphi}_i(t).$$

Следствие 3. *Система (34) разрешима. Ее общее решение имеет вид*

$$y(t) = Y_\alpha(t)c + \sum_{i=1}^{\hat{r}} \sum_{k=0}^{\hat{s}_i} \left[\frac{d^k}{dt^k}\,\hat{\beta}_i(t)\right] \tilde{\psi}_i^{(\hat{s}_i - k + 1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{\beta}_i(t)\breve{\psi}_i(t),$$

где $\hat{\beta}_i(t) \in C^\infty[a;b]$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, $\breve{\beta}_i(t) \in C^\infty[a;b]$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, *— произвольные скалярные функции.*

Рассмотрим задачу Коши (1), (2).

Теорема 3. *Если выполняются условия теоремы 2, то для разрешимости задачи Коши (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы вектор* x_0 *удовлетворял условиям*

$$\sum_{k=0}^{j-1} \frac{d^k}{dt^k} \left(A(t)x_0 + f(t), \psi_i^{(j-k)}(t) \right)_{t=t_0} = 0, \quad j = \overline{1,s_i}, \quad i = \overline{1,r}, \tag{45}$$

$$\sum_{k=0}^{j-1} \frac{d^k}{dt^k} \left(A(t)x_0 + f(t), \tilde{\psi}_i^{(j-k)}(t) \right)_{t=t_0} = 0, \quad j = \overline{1,\hat{s}_i}, \quad i = \overline{1,\hat{r}}. \tag{46}$$

Ее решения имеют вид

$$x(t) = X_\alpha(t)Y_\alpha^*(t_0)B(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X_\alpha(t)Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)\,d\tau - \sum_{i=1}^{r} \Phi_i(t) \sum_{k=0}^{s_i-1} I_{s_i}^k \frac{d^k}{dt^k} \left[\Psi_i^*(t)f(t)\right] -$$
$$- \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{\Phi}_{i\tilde{s}_i}(t) \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1} \left(I_{\tilde{s}_i}^T\right)^k \frac{d^k}{dt^k} \left[\hat{\Psi}_i^*(t)f(t)\right] - \sum_{i=1}^{\hat{r}} \hat{\Phi}_i(t) \sum_{k=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k} \left[\tilde{\Psi}_{i\hat{s}_i}^*(t)f(t)\right] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i} \left[\frac{d^k}{dt^k}\,\tilde{\beta}_i(t)\right] \tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-k+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{\beta}_i(t)\breve{\varphi}_i(t), \quad x\,(t) \in C^\infty[a;b], \tag{47}$$

где $\tilde{\beta}_i(t) \in C^\infty[a;b]$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $\breve{\beta}_i(t) \in C^\infty[a;b]$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, *— скалярные функции такие, что*

$$\tilde{\beta}_i(t_0) = (x_0, B^*(t_0)\hat{\psi}_i^{(1)}(t_0)), \quad i = \overline{1,\tilde{r}}, \tag{48}$$

$$\frac{d^j}{dt^j}\,\tilde{\beta}_i(t)_{t=t_0} = \left[\left(x_0, L^*(t)\hat{\psi}_i^{(j)}(t)\right) + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{d^k}{dt^k} \left(f(t), \hat{\psi}_i^{(k+1)}(t)\right)\right]_{t=t_0}, \; j = \overline{1,\tilde{s}_i}, \; i = \overline{1,\tilde{r}}, \tag{49}$$

$$\breve{\beta}_i(t_0) = (x_0, \breve{\psi}_i(t_0)), \quad i = \overline{1,\breve{r}}. \tag{50}$$

Доказательство. Подставив (37) в (2), при $a = t_0$ получим

$$x(t_0) = X_\alpha(t_0)c - \sum_{i=1}^{r} \Phi_i(t_0) \sum_{k=0}^{s_i-1} I_{s_i}^k \frac{d^k}{dt^k} \left[\Psi_i^*(t)f(t)\right]_{t=t_0} -$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde\Phi_{i\tilde s_i}(t_0)\sum_{k=0}^{\tilde s_i-1}\left(I_{\tilde s_i}^T\right)^k\frac{d^k}{dt^k}\left[\hat\Psi_i^*(t)f(t)\right]_{t=t_0}-\\
&-\sum_{i=1}^{\hat r}\hat\Phi_i(t_0)\sum_{k=0}^{\hat s_i-1}I_{\hat s_i}^k\frac{d^k}{dt^k}\left[\tilde\Psi_{i\hat s_i}^*(t)f(t)\right]_{t=t_0}+\\
&+\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{k=0}^{\tilde s_i}\left[\frac{d^k}{dt^k}\tilde\beta_i(t)\right]_{t=t_0}\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-k+1)}(t_0)+\sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t_0)\breve\varphi_i(t_0).
\end{aligned}\tag{51}
$$

Согласно следствию 1 матрица

$$
\begin{aligned}
R(t)=\Big[&B^*(t)Y_\alpha(t),L^*(t)\Psi(t),B^*(t)\hat\psi_1^{(1)}(t),L^*(t)\hat\Psi_1(t),\ldots,B^*(t)\hat\psi_{\tilde r}^{(1)}(t),\\
&L^*(t)\hat\Psi_{\tilde r}(t),L^*(t)\tilde\Psi_{1\hat s_1}(t),\ldots,L^*(t)\tilde\Psi_{\hat r\hat s_{\hat r}}(t),\breve\psi_1(t),\ldots,\breve\psi_{\breve r}(t)\Big]^*
\end{aligned}
$$

неособенная. Умножив (51) слева на матрицу $R(t_0)$, согласно следствию 1 получим

$$Y^*(t_0)B(t_0)x_0=c,\tag{52}$$

$$\left(x_0,L^*(t)\psi_i^{(j)}(t)\right)_{t=t_0}=-\sum_{k=0}^{j-1}\frac{d^k}{dt^k}\left(f(t),\psi_i^{(j-k)}(t)\right)_{t=t_0},\quad j=\overline{1,s_i},\quad i=\overline{1,r},\tag{53}$$

$$\left(x_0,B^*(t_0)\hat\psi_1^{(j)}(t_0)\right)=\tilde\beta_i(t_0),\quad i=\overline{1,\tilde r},\tag{54}$$

$$\left(x_0,L^*(t)\hat\psi_i^{(j)}(t)\right)_{t=t_0}=\left[\frac{d^j}{dt^j}\tilde\beta_i(t)-\sum_{k=0}^{j-1}\frac{d^k}{dt^k}\left(f(t),\hat\psi_i^{(j-k)}(t)\right)\right]_{t=t_0},\ j=\overline{1,\tilde s_i},\ i=\overline{1,\tilde r},\tag{55}$$

$$\left(x_0,L^*(t)\tilde\psi_i^{(j)}(t)\right)_{t=t_0}=-\sum_{k=0}^{j-1}\frac{d^k}{dt^k}\left(f(t),\tilde\psi_i^{(j-k)}(t)\right)_{t=t_0},\quad j=\overline{1,\hat s_i},\quad i=\overline{1,\hat r},\tag{56}$$

$$\left(x_0,\breve\psi_i(t_0)\right)=\breve\beta_i(t_0),\quad i=\overline{1,\breve r}.\tag{57}$$

Из (53) следует (45) [4, с. 69, 70], из (54) — (48), из (55) — (49), из (56) — (46), из (57) — (50). Подставив (52) в (37), при $a=t_0$ получим (47). При этом $x(t)\in C^\infty[a;b]$.

Теорема 3 доказана.

Пример. Пусть в (1), (2) $m=n=2$,

$$B(t)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad A(t)=\begin{bmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)\\a_{21}(t)&a_{22}(t)\end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{bmatrix},\quad x_0=\begin{bmatrix}x_{01}\\x_{02}\end{bmatrix},$$

$a_{ij}(t)\in C^\infty[a;b]$, $i,j=1,2$, $f_i(t)\in C^\infty[a;b]$, $i=1,2$, — действительные скалярные функции, x_{0i}, $i=1,2$, — действительные числа. Рассмотрим следующие случаи [5]:

1) $a_{22}(t) \neq 0 \;\; \forall t \in [a;b]$. Имеем $r=1$, $s_1=1$, $\check{r}=\check{r}=\tilde{r}=\hat{r}=0$, $\alpha=1$,

$$\Phi(t)=\Phi_1(t)=\varphi_1^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \Psi(t)=\Psi_1(t)=\psi_1^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}0\\a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix},$$

$$Q_0(t)=q_1(t)=\begin{bmatrix}1\\-a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix},\quad P_0(t)=p_1(t)=\begin{bmatrix}1\\-a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix},$$

$$Q(t)=[Q_0(t),\Phi_1(t)]=\begin{bmatrix}1 & 0\\-a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) & 1\end{bmatrix},$$

$$P(t)=[P_0(t),\Psi_1(t)]^*=\begin{bmatrix}1 & -a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t)\\0 & a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix},$$

$$M(t)=m_{11}(t)=a_{11}(t)-a_{12}(t)a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t).$$

Система (5) принимает вид

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\frac{dy}{dt}=\begin{bmatrix}m_{11}(t) & 0\\0 & 1\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}f_1(t)-a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t)f_2(t)\\ \\a_{22}^{-1}(t)f_2(t)\end{bmatrix}.$$

Общее решение (37) системы (1) имеет вид

$$x(t)=\begin{bmatrix}1\\-a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix}\exp\left[\int\limits_a^t m_{11}(z)\,dz\right]c+$$
$$+\int\limits_a^t\begin{bmatrix}1\\-a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix}\exp\left[\int\limits_a^t m_{11}(z)\,dz\right]\exp\left[-\int\limits_a^\tau m_{11}(z)\,dz\right]\times$$
$$\times\left[f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right]\,d\tau-\begin{bmatrix}0\\a_{22}^{-1}(t)f_2(t)\end{bmatrix}.$$

Условие (45) разрешимости задачи Коши (1), (2) имеет вид

$$[a_{21}(t_0)x_{01}+a_{22}(t_0)x_{02}+f_2(t_0)]a_{22}^{-1}(t_0)=0,$$

откуда

$$x_{02}=-a_{21}(t_0)a_{22}^{-1}(t_0)x_{01}-a_{22}^{-1}(t_0)f_2(t_0).$$

При его выполнении ее решение (47) таково:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} m_{11}(z)\,dz\right] x_{01} +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left[\int_{t_0}^{t} m_{11}(z)\,dz\right] \exp\left[-\int\limits_{t_0}^{\tau} m_{11}(z)\,dz\right] \times$$

$$\times \left[f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right] d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}.$$

2) $a_{22}(t) \equiv 0, a_{12}(t) \neq 0, a_{21}(t) \neq 0 \ \forall t \in [a;b]$. Имеем $r = 1, s_1 = 2, \breve{r} = \check{r} = \tilde{r} = \hat{r} = 0$, $\alpha = 0$,

$$\varphi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix},$$

$$\psi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \psi_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = \Phi(t) = \Phi_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}(t) \\ 1 & a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix},$$

$$P(t) = \Psi^*(t) = \Psi_1^*(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) & 0 \\ 0 & a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Система (5) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t)f_1(t) \\ a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}.$$

Общее решение (37) системы (1) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\left\{a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) - f_1(t) - \dfrac{d}{dt}\left[a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\right]\right\} \end{bmatrix}.$$

Оно является решением (47) задачи Коши (1), (2) при выполнении условий (45) ее разрешимости:

$$[a_{21}(t_0)x_{01} + f_2(t_0)]a_{12}^{-1}(t_0)a_{21}^{-1}(t_0) = 0,$$

$$[a_{11}(t_0)x_{01} + a_{12}(t_0)x_{02} + f_1(t_0)]\,a_{12}^{-1}(t_0) + \frac{d}{dt}\left\{[a_{21}(t)x_{01} + f_2(t)]a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)\right\}_{t=t_0} = 0,$$

откуда

$$x_{01} = -a_{21}^{-1}(t_0) f_2(t_0),$$

$$x_{02} = a_{12}^{-1}(t_0) \left\{ a_{11}(t_0) a_{21}^{-1}(t_0) f_2(t_0) - f_1(t_0) - \frac{d}{dt} \left[a_{21}^{-1}(t) f_2(t) \right]_{t=t_0} \right\}.$$

3) $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \neq 0$, $a_{21}(t) \equiv 0 \; \forall t \in [a;b]$. Имеем $\tilde{r} = 1$, $\tilde{s}_1 = 1$, $\check{r} = 1$, $\check{r} = r = \hat{r} = 0$, $\alpha = 0$,

$$\tilde{\varphi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\varphi}_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \dfrac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix},$$

$$\breve{\Psi}(t) = \breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Psi}(t) = \hat{\Psi}_1(t) = \hat{\psi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = \tilde{\Phi}(t) = \tilde{\Phi}_{12}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) & 0 \\ a_{12}^{-1}(t) \dfrac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t) & 1 \end{bmatrix},$$

$$P(t) = \left[\hat{\Psi}(t), \breve{\Psi}(t) \right]^* = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Система (5) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}.$$

Условие (36) разрешимости системы (1) таково:

$$f_2(t) \equiv 0.$$

При его выполнении ее общее решение (37) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \tilde{\beta}_1(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \tilde{\beta}_1(t) \dfrac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t) \tilde{\beta}_1(t) - a_{12}^{-1}(t) f_1(t) + \dfrac{d}{dt} \tilde{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Решениями (47) задачи Коши (1), (2) являются те из полученных выше решений системы (1), для которых выполняются условия (48), (49):

$$\tilde{\beta}_1(t_0) = a_{12}^{-1}(t_0) x_{01},$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\beta}_1(t)_{t=t_0} = a_{11}(t_0) a_{12}^{-1}(t_0) x_{01} + x_{02} - a_{12}^{-2}(t_0) x_{01} \frac{d}{dt} a_{12}(t)_{t=t_0} + a_{12}^{-1}(t_0) f_1(t_0).$$

4) $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \equiv 0$, $a_{21}(t) \neq 0 \;\; \forall t \in [a;b]$. Имеем $\check{r} = 1$, $\hat{r} = 1$, $\hat{s}_1 = 1$, $\tilde{r} = r = \check{r} = 0$, $\alpha = 0$,

$$\check{\Phi}(t) = \check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\psi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\psi}_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}(t) \\ -a_{11}(t) - a_{21}^{-1}(t) \dfrac{d}{dt} a_{21}(t) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Phi}(t) = \hat{\Phi}_1(t) = \hat{\varphi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = \left[\ \hat{\Phi}(t), \breve{\Phi}(t)\ \right] = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P(t) = \tilde{\Psi}^*(t) = \tilde{\Psi}_{12}^*(t) = \begin{bmatrix} a_{21}(t) & -a_{11}(t) - a_{21}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\,a_{21}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Система (5) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} a_{21}(t)f_1(t) - a_{11}(t)f_2(t) - a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\dfrac{d}{dt}\,a_{21}(t) \\ \\ f_2(t) \end{bmatrix}.$$

Условие (35) разрешимости системы (1) таково:

$$a_{21}(t)f_1(t) - a_{11}(t)f_2(t) - a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\frac{d}{dt}\,a_{21}(t) + \frac{d}{dt}\,f_2(t) \equiv 0.$$

При его выполнении ее общее решение (37) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Условие (46) разрешимости задачи Коши (1), (2) имеет вид

$$a_{21}(t_0)x_{01} + f_2(t_0) = 0,$$

откуда

$$x_{01} = -a_{21}^{-1}(t_0)f_2(t_0).$$

При выполнении этого условия ее решениями (47) являются те из полученных выше решений системы (1), для которых выполняется условие (50):

$$\breve{\beta}_1(t_0) = x_{02}.$$

5) $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \equiv 0$, $a_{21}(t) \equiv 0\ \ \forall t \in [a;b]$. Имеем $\breve{r} = 1$, $\breve{r} = 1$, $\tilde{r} = r = \hat{r} = 0$, $\alpha = 1$,

$$\breve{\Phi}(t) = \breve{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \breve{\Psi}(t) = \breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \breve{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q_0(t) = q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_0(t) = p_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = \left[\ Q_0(t), \breve{\Phi}(t)\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P(t) = \left[\ P_0(t), \breve{\Psi}(t)\ \right]^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(t) = a_{11}(t).$$

Система (5) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}.$$

Условие (36) разрешимости системы (1) таково:

$$f_2(t) \equiv 0.$$

При его выполнении ее общее решение (37) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^t a_{11}(z)\,dz\right] c + \int\limits_a^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_a^t a_{11}(z)\,dz\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\int\limits_a^\tau a_{11}(z)\,dz\right] f_1(\tau)\,d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Решения (47) задачи Коши (1), (2) имеют вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_{t_0}^t a_{11}(z)\,dz\right] x_{01} + \int\limits_{t_0}^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int\limits_{t_0}^t a_{11}(z)\,dz\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\int\limits_{t_0}^\tau a_{11}(z)\,dz\right] f_1(\tau)\,d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix},$$

для них должно выполняться условие (50):

$$\breve{\beta}_1(t_0) = x_{02}.$$

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 2004. — 576 с.
2. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003. — 319 с.
3. *Бояринцев Ю. Е., Орлова И. В.* Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы. — Новосибирск: Наука, 2006. — 123 с.
4. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 295 с.
5. *Елишевич М. А.* Некоторые свойства жордановых наборов векторов матрицы относительно оператора, содержащего дифференцирование // Журн. обчислюв. та прикл. математики. — 2012. — № 2 (108). — С. 119 – 134.

Получено 26.05.12