УДК 517.9

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Т. О. Єрьоміна

Нац. техн. ун-т України „КПІ”
Україна, 03056, Київ, просп. Перемоги, 37

We find conditions for existence of continuous solutions for a class of linear systems of difference-functional equations, propose a method for constructing such solutions, and study the structure of the set of these solutions.

Получены условия существования непрерывных решений одного класса систем линейных разностно-функциональных уравнений, предложен метод построения таких решений и исследована структура их множества.

Системи лінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + By(t+1), \tag{1}$$

де $t \in \Re^+ = [0, +\infty)$, Λ та B — дійсні $(n \times n)$-матриці, q — деяка дійсна стала, вивчались багатьма математиками (див. [1–8] та наведену там бібліографію), і на сьогодні ряд питань теорії досить добре вивчені. Особливо це стосується питань існування неперервних розв'язків та структури їх множини [6–8]. Продовжуючи ці дослідження, в даній роботі розглядаємо аналогічні питання у випадку, коли серед власних чисел λ_i, $i = 1, \ldots, n$, матриці Λ є однакові. Не обмежуючи загальності припустимо, що $\Lambda = \operatorname{diag}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$, $m \le n$, Λ_i — $(k_i \times k_i)$-матриці вигляду

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = n, \tag{2}$$

ε — достатньо мала додатна стала.

Теорема 1. *Нехай виконуються такі умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, m$, $q > 1$;

2) $\Delta = \dfrac{b}{1 - (\lambda^* + \delta)} < 1$, *де* $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\lambda^* + \delta < 1$, $b = |B| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge T > 0$ *(*T *— деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежать від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (1) має неперервні розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{3}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (3) в систему (1), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + B \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \tag{4_0}$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + B y_{i-1}(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4_i}$$

то ряд (3) буде формальним розв'язком системи рівнянь (1).

Дослідження системи рівнянь (4_0) зводиться до дослідження m підсистем рівнянь вигляду

$$y_0^i(qt) = \Lambda_i y_0^i(t), \quad i = 1, \ldots, m \le n, \tag{4_0^i}$$

де $y_0^i = \left(y_1^i, \ldots, y_{k_i}^i\right), i = 1, \ldots, m.$

Використовуючи зображення загального неперервного розв'язку системи (4_0) і умову 1, можна показати, що існує додатна стала M така, що при всіх $t \ge T$ (T — деяка достатньо велика додатна стала) виконується оцінка

$$y_0(t) \le M t^{\frac{\ln \alpha}{\ln q}}, \tag{5_0}$$

де $\lambda^* < \alpha < 1.$

Оскільки ряди

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j B y_{i-1}(q^{-(j+1)}t + 1), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{6_i}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (4_i), $i = 1, 2, \ldots,$ то, взявши до уваги (5_0) та умови 1, 2, покажемо, що ряди (6_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ для яких при всіх $i \ge 1$, $t \ge T > 0$ виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \le M \Delta^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{5_i}$$

Дійсно, враховуючи (5_0), згідно з (6_1) отримуємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j |B| \left| y_0(q^{-(j+1)}t + 1) \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^* + \delta)^j \, bM \left(\frac{1}{q^{j+1}} \, t + 1 \right)^{\frac{\ln \alpha}{\ln q}} \leq$$

$$\leq Mb \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^* + \delta)^j \leq \frac{Mb}{1 - (\lambda^* + \delta)} = M\Delta.$$

Отже, оцінка (5_i) має місце при $i = 1$. За індукцією припустимо, що оцінку (5_i) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, відповідно до (6_{i+1}) і (5_i) маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j |B| \left| y_i(q^{-(j+1)}t + 1) \right| \leq b \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^* + \delta)^j \, M\Delta^i \leq \frac{Mb\Delta^i}{1 - (\lambda^* + \delta)} = M\Delta^{i+1}.$$

Отже, оцінка (5_i) виконується при всіх $i \geq 1, t \geq T > 0$. Звідси випливає, що ряди (6_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \geq T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких мають місце оцінки (5_i). Із (5_i) безпосередньо випливає, що ряд (3) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (1) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1 - \Delta}.$$

Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + By(t + 1) + F(t), \tag{7}$$

де матриці Λ, B задовольняють умови теореми 1, а $F(t) : \Re \to \Re^n$. Справедливою є наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1, 2 теореми 1, всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \Re$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \tilde{M} < +\infty$. Тоді система рівнянь (7) має неперервний обмежений при $t \in \Re$ розв'язок $\bar{y}(t)$ у вигляді ряду*

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{8}$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні обмежені при $t \in \Re$ вектор-функції.

Доведення. Підставляючи (8) у (7), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + B \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t + 1) + F(t). \tag{9}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, задовольняють системи рівнянь

$$\bar{y}_0(qt) = \Lambda \bar{y}_0(t) + F(t), \tag{10_0}$$

$$\bar{y}_i(qt) = \Lambda \bar{y}_i(t) + B\bar{y}_{i-1}(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{10_i}$$

то ряд (8) є формальним розв'язком системи рівнянь (7).

Система рівнянь (10_0) має формальний розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{y}_0(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j F\left(q^{-(j+1)}t\right). \tag{11_0}$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (10_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна переконатися, що вони також мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j B \bar{y}_{i-1}\left(q^{-(j+1)}t + 1\right), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{11_i}$$

Покажемо, що ряди (11_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \le M' \Delta^i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{12_i}$$

де M' — деяка додатна стала. Дійсно, оскільки

$$|\bar{y}_0(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^j| \left| F\left(q^{-(j+1)}t\right)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^* + \delta)^j \tilde{M} \le \frac{\tilde{M}}{1 - (\lambda^* + \delta)} = M',$$

то на підставі (11_1) отримуємо

$$|\bar{y}_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^j||B| \left|\bar{y}_0\left(q^{-(j+1)}t + 1\right)\right| \le b \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^* + \delta)^j M' \le \frac{M'b}{1 - (\lambda^* + \delta)} = M'\Delta.$$

Отже, оцінка (12_i) має місце при $i = 1$. За індукцією припустимо, що оцінку (12_i) доведено для деякого $i \ge 1$, і покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, оскільки

$$\bar{y}_{i+1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j B \bar{y}_i\left(q^{-(j+1)}t + 1\right), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

то

$$|\bar{y}_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j |B| \left|\bar{y}_i\left(q^{-(j+1)}t + 1\right)\right| \le b \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^* + \delta)^j M'\Delta^i \le \frac{M'b\Delta^i}{1 - (\lambda^* + \delta)} = M'\Delta^{i+1}.$$

Отже, ряди (11_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \in \Re$ до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (12_i). Звідси випливає, що ряд (8) рівномірно збігається при всіх $t \in \Re$ до деякої неперервної функції $\bar{y}(t)$, яка задовольняє умову

$$|\bar{y}(t)| \leq \frac{M'}{1 - \Delta}. \tag{13}$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Виконавши в (7) заміну змінних

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t),$$

отримаємо систему рівнянь (1) відносно вектор-функції $z(t)$, для якої справджується теорема 1.

Дослідимо тепер рівняння (1) у випадку, коли $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, m$, $0 < q < 1$, $t \geq T > > 0$.

Теорема 3. *Нехай виконуються такі умови:*

1) $\lambda_i > 1, i = 1, \ldots, m, 0 < q < 1;$

2) $\tilde{\Delta} = \dfrac{b}{\left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)^{-1} - 1} < 1$, *де* $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$, $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\tilde{\delta} \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta} < 1$, $b = |B| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежать від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (1) має розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{14}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (14) в (1), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + B \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \tag{15_0}$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + B y_{i-1}(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{15_i}$$

то ряд (13) буде формальним розв'язком системи рівнянь (1).

Дослідження системи рівнянь (15_0) зводиться до дослідження m підсистем рівнянь вигляду

$$y_0^i(qt) = \Lambda_i y_0^i(t), \quad i = 1, \ldots, m \leq n, \tag{15_0^i}$$

де $y_0^i = \left(y_1^i, \ldots, y_{k_i}^i\right)$, $i = 1, \ldots, m$.

Використовуючи зображення загального неперервного розв'язку системи (15_0) і умову 1, можна показати, що існує додатна стала M така, що при всіх $t \geq T > 0$ виконується оцінка

$$|y_0(t)| \leq Mt^{\frac{\ln \alpha'}{\ln q}}, \tag{16_0}$$

де $1 < \alpha' < \lambda_*$.

Оскільки ряди

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} B y_{i-1}(q^j t + 1), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{17_i}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (15_i), $i = 1, 2, \ldots$, то, взявши до уваги (16_0) та умови 1, 2, покажемо, що ряди (17_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких при всіх $i \geq 1$, $t \geq T > 0$ виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M\Delta^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{16_i}$$

Справді, враховуючи (16_0), (17_1) і $\dfrac{\ln \alpha'}{\ln q} < 0$, маємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} |B| |y_0(q^j t + 1)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)^{j+1} b \, \frac{M}{(q^j t + 1)^{\left|\frac{\ln \alpha'}{\ln q}\right|}} \leq$$

$$\leq Mb \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)^{j+1} \leq Mb \, \frac{\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}}{1 - \left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)} = \frac{Mb}{\left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)^{-1} - 1} = M\tilde{\Delta},$$

тобто оцінка (16_i) справедлива при $i = 1$. За індукцією припустимо, що оцінку (16_i) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i + 1$. Відповідно до (17_{i+1}) і (16_i) маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} |B| |y_i(q^j t + 1)| \leq b \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)^{j+1} M\tilde{\Delta}^i \leq$$

$$\leq Mb \, \frac{\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}}{1 - \left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)} \tilde{\Delta}^i = \frac{Mb\tilde{\Delta}^i}{\left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)^{-1} - 1} = M\tilde{\Delta}^{i+1}.$$

Отже, оцінка (16_i) виконується при всіх $i \geq 1$, $t \geq T > 0$. Звідси випливає, що ряди (17_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \geq T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких має місце оцінка (16_i). Згідно з (16_i) ряд (14) рівномірно збігається при $t \geq T > 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (1) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1 - \tilde{\Delta}}.$$

Теорему 3 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідну систему рівнянь вигляду (7), для якої виконуються умови 1, 2 теореми 3, всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \Re$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \tilde{M} < +\infty$.

Аналогічно тому, як було доведено теорему 2, можна показати, що система рівнянь (7) має неперервний обмежений при $t \in \Re$ розв'язок $\bar{y}(t)$, який можна записати у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t),$$

в якому функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\bar{y}_0(qt) = \Lambda \bar{y}_0(t) + F(t),$$

$$\bar{y}_i(qt) = \Lambda \bar{y}_i(t) + B\bar{y}_{i-1}(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

і визначаються за допомогою співвідношень

$$\bar{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} F(q^j t),$$

$$\bar{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} B\bar{y}_{i-1}(q^j t + 1), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Розглянемо тепер однорідну систему рівнянь вигляду (1) у припущенні, що $0 < \lambda_i < < 1 < \lambda_j$, $i = 1, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, m$, $0 \leq m \leq n$, $q > 1$. Позначимо $y(t) = = (y^1(t), y^2(t))$, $y^1(t) = (y_1(t), \ldots, y_p(t))$, $y^2(t) = (y_{p+1}(t), \ldots, y_m(t))$; $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2)$, $\tilde{\Lambda}_1 = \operatorname{diag}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p)$, $\tilde{\Lambda}_2 = \operatorname{diag}(\Lambda_{p+1}, \ldots, \Lambda_m)$, $m \leq n$, Λ_i — $(k_i \times k_i)$-матриці вигляду (2),

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = n,$$

ε — достатньо мала додатна стала. Тоді система рівнянь (1) набере вигляду

$$y^1(qt) = \tilde{\Lambda}_1 y^1(t) + B_{11} y^1(t+1) + B_{12} y^2(t+1),$$

$$y^2(qt) = \tilde{\Lambda}_2 y^2(t) + B_{21} y^1(t+1) + B_{22} y^2(t+1).$$

Для системи (17) справедливою є наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються такі умови:*
1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j,\ i = 1, \ldots, p,\ j = p+1, \ldots, m,\ 0 \le m \le n,\ q > 1$;
2) $\theta = \max\left\{ \dfrac{b_1}{1 - (\underline{\lambda^*} + \delta_1)}; \dfrac{b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2\right)^{-1} - 1} \right\} < 1$, *де* $b_1 = |B_{11}| + |B_{12}|$, $b_2 = |B_{21}| + |B_{22}|$, $\underline{\lambda^*} = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, p\}$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_1 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\underline{\lambda^*} + \delta_1 < 1$, $\overline{\lambda_*} = \min\{\lambda_i, i = p+1, \ldots, m\}$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_2 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2 < 1$.

Тоді система рівнянь (17) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge T > 0$ *(*T *— деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків, що залежать від* p *довільних неперервних 1-періодичних функцій* $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, m$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (17) має розв'язки у вигляді рядів

$$y^1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t),$$
$$y^2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \tag{18}$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (18) у (17), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt) = \tilde{\Lambda}_1 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + B_{11} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) + B_{12} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt) = \tilde{\Lambda}_2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + B_{21} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) + B_{22} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0^1(qt) = \tilde{\Lambda}_1 y_0^1(t),$$
$$y_0^2(qt) = \tilde{\Lambda}_2 y_0^2(t), \tag{19_0}$$

$$\begin{aligned} y_i^1(qt) &= \tilde{\Lambda}_1 y_i^1(t) + B_{11} y_{i-1}^1(t+1) + B_{12} y_{i-1}^2(t+1), \\ y_i^2(qt) &= \tilde{\Lambda}_2 y_i^2(t) + B_{21} y_{i-1}^1(t+1) + B_{22} y_{i-1}^2(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{19_i}$$

то ряди (18) будуть формальними розв'язками системи рівнянь (17).

Побудова неперервних обмежених при $t \le T$ розв'язків систем рівнянь (19_0) зводиться до побудови таких розв'язків систем рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} y_0^1(qt) &= \tilde{\Lambda}_1 y_0^1(t), \quad i = 1, \ldots, p, \\ y_0^2(t) &= 0, \end{aligned} \tag{$19_0'$}$$

де $y_0^1 = \left(y_1^1, \ldots, y_{k_1}^1\right), i = 1, \ldots, p.$

Використовуючи зображення загального неперервного розв'язку систем $(19_0')$ і умову 1, можна показати, що існує додатна стала $\tilde{M}$ така, що при всіх $t \ge T$ для довільного неперервного обмеженого розв'язку (T — деяка достатньо велика додатна стала) виконуються співвідношення

$$\begin{gathered} |y_0^1(t)| \le \tilde{M} t^{\frac{\ln \alpha}{\ln q}}, \\ |y_0^2(t)| = 0, \\ i = 1, \ldots, p, j = p+1, \ldots, m, \end{gathered} \tag{20_0}$$

де $\underline{\lambda^*} < \alpha < 1$.

Оскільки ряди

$$\begin{aligned} y_i^1(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}_1^j \left(B_{11} y_{i-1}^1(q^{-(j+1)}t + 1) + B_{12} y_{i-1}^2(q^{-(j+1)}t + 1) \right), \\ y_i^2(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}_2^{-(j+1)} \left(B_{21} y_{i-1}^1(q^j t + 1) + B_{22} y_{i-1}^2(q^j t + 1) \right), \quad i = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{21_i}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (20_i), $i = 1, 2, \ldots$, то, взявши до уваги (20_0) та умови 1 2, покажемо, що ряди (21_i) $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки

$$\begin{aligned} \left|y_i^1(t)\right| &\le \tilde{M}\theta^i, \quad i = 1, 2, \ldots, \\ \left|y_i^2(t)\right| &\le \tilde{M}\theta^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{22_i}$$

Дійсно, враховуючи (20_0), згідно з (21_1) отримуємо

$$\left|y_1^1(t)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{\Lambda}_1|^j \left|B_{11}y_0^1(q^{-(j+1)}t+1) + B_{12}y_0^2(q^{-(j+1)}t+1)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda^*}+\delta_1)^j \left(|B_{11}|\left|y_0^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right| + |B_{12}|\left|y_0^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right|\right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda^*}+\delta_1)^j \left(|B_{11}|\tilde{M}(q^{-(j+1)}t+1)^{\frac{\ln\alpha}{\ln q}}\right) \leq \tilde{M}\sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda^*}+\delta_1)^j |B_{11}| \leq$$

$$\leq \tilde{M}b_1 \sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda^*}+\delta_1)^j \leq \frac{\tilde{M}b_1}{1-(\underline{\lambda^*}+\delta_1)} \leq \tilde{M}\theta,$$

$$\left|y_1^2(t)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\tilde{\Lambda}_2^{-1}\right|^{j+1} \left|B_{21}y_0^1(q^jt+1) + B_{22}y_0^2(q^jt+1)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{j+1} \left(|B_{21}|\tilde{M}(q^jt+1)^{\frac{\ln\alpha}{\ln q}}\right) \leq \tilde{M}\sum_{j=0}^{\infty} \left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{j+1} |B_{21}| \leq$$

$$\leq \tilde{M}b_2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{j+1} \leq \frac{\tilde{M}b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1} \leq \tilde{M}\theta.$$

Отже, оцінки (22_i) мають місце при $i = 1$. За індукцією припустимо, що оцінки (22_i) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо їх справедливість для $i+1$. Дійсно, відповідно до (21_{i+1}) і (22_i) маємо

$$\left|y_{i+1}^1(t)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{\Lambda}_1|^j \left|B_{11}y_i^1(q^{-(j+1)}t+1) + B_{12}y_i^2(q^{-(j+1)}t+1)\right| \leq$$

$$\leq \tilde{M}\theta^i \sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda^*}+\delta_1)^j \left(|B_{11}|+|B_{12}|\right) \leq$$

$$\leq \tilde{M}\theta^i b_1 \sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda^*}+\delta_1)^j \leq \tilde{M}\theta^i \frac{b_1}{1-(\underline{\lambda^*}+\delta_1)} = \tilde{M}\theta^{i+1},$$

$$|y_{i+1}^2(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\tilde{\Lambda}_2^{-1}\right|^{j+1} \left|B_{21}y_i^1(q^jt+1) + B_{22}y_i^2(q^jt+1)\right| \leq$$

$$\leq \tilde{M}\theta^i \sum_{j=0}^{\infty} \left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{j+1} \left(|B_{21}|+|B_{22}|\right) \leq$$

$$\leq \tilde{M}\theta^i \frac{b_2\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)}{1-\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)} \leq \tilde{M}\theta^i \frac{b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1} = \tilde{M}\theta^{i+1}, \quad i=1,2,\ldots.$$

Отже, оцінки (22_i) виконуються при всіх $i \geq 1$, $t \geq T > 0$. Звідси безпосередньо випливає, що ряди (18) рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, яка є розв'язком системи рівнянь (17) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{\tilde{M}}{1-\theta}.$$

Теорему 4 доведено.

Аналогічно тому, як було доведено теорему 4, можна показати, що система рівнянь (17) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, що залежать від $m-p$ довільних неперервних 1-періодичних функцій, для випадку, коли виконуються такі умови:

3) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i=1,\ldots,p$, $j=p+1,\ldots,m$, $0 \leq m \leq n$, $0 < q < 1$;

4) $\theta = \max\left\{\frac{b_1}{1-(\underline{\lambda^*}+\delta_1)}; \frac{b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1}\right\} < 1$, де $b_1 = |B_{11}|+|B_{12}|$, $b_2 = |B_{21}| + |B_{22}|$,

$\underline{\lambda^*} = \max\{\lambda_i, i=1,\ldots,p\}$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ таке, що $\delta_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, і $\underline{\lambda^*}+\delta_1 < 1$,

$\overline{\lambda_*} = \min\{\lambda_i, i=p+1,\ldots,m\}$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ таке, що $\delta_2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, і $\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2 < 1$.

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} y^1(qt) &= \tilde{\Lambda}_1 y^1(t) + B_{11}y^1(t+1) + B_{12}y^2(t+1) + F^1(t), \\ y^2(qt) &= \tilde{\Lambda}_2 y^2(t) + B_{21}y^1(t+1) + B_{22}y^2(t+1) + F^2(t), \end{aligned} \tag{23}$$

де $F(t): R \to R^n$, $F(t) = (F^1(t), F^2(t))$, $F^1(t) = (F_1(t),\ldots,F_p(t))$, $F^2(t) = (F_{p+1}(t),\ldots,F_m(t))$.

Теорема 5. *Нехай виконуються такі умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i=1,\ldots,p$, $j=p+1,\ldots,m$, $0 \leq m \leq n$, $q > 0$;

2) $\theta = \max\left\{\frac{b_1}{1-(\underline{\lambda^*}+\delta_1)}; \frac{b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1}\right\} < 1$, *де* $b_1 = |B_{11}|+|B_{12}|$, $b_2 = |B_{21}| + |B_{22}|$,

$\underline{\lambda^*} = \max\{\lambda_i, i=1,\ldots,p\}$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_1 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\underline{\lambda^*}+\delta_1 < 1$;

$\overline{\lambda_*} = \min\{\lambda_i, i=p+1,\ldots,m\}$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_2 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2 < 1$;

3) всі елементи вектор-функції $F(t)$ *є неперервними обмеженими при всіх* $t \in R$ *функціями.*

Тоді система рівнянь (23) має неперервний обмежений при $t \in R$ *розв'язок* $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (23) має розв'язки у вигляді рядів

$$
\begin{aligned}
y^1(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t), \\
y^2(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t),
\end{aligned} \tag{24}
$$

де $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (24) в (23), отримуємо

$$
\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt) = \tilde{\Lambda}_1 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + B_{11} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) + B_{12} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) + F^1(t),
$$

$$
\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt) = \tilde{\Lambda}_2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + B_{21} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) + B_{22} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) + F^2(t).
$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ задовольняють системи рівнянь

$$
\begin{aligned}
y_0^1(qt) &= \tilde{\Lambda}_1 y_0^1(t) + F^1(t), \\
y_0^2(qt) &= \tilde{\Lambda}_2 y_0^2(t) + F^2(t),
\end{aligned} \tag{25_0}
$$

$$
\begin{aligned}
y_i^1(qt) &= \tilde{\Lambda}_1 y_i^1(t) + B_{11} y_{i-1}^1(t+1) + B_{12} y_{i-1}^2(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots, \\
y_i^2(qt) &= \tilde{\Lambda}_2 y_i^2(t) + B_{21} y_{i-1}^1(t+1) + B_{22} y_{i-1}^2(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots,
\end{aligned} \tag{25_i}
$$

то ряди (24) будуть формальними розв'язками системи рівнянь (23).

Взявши до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряди

$$
y_0^1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}_1^j F^1\left(q^{-(j+1)} t\right),
$$

$$
y_0^2(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}_2^{-(j+1)j} F^2(q^j t)
$$

рівномірно збігаються при $t \in R$, задовольняють послідовність систем рівнянь (25_0) і виконуються оцінки

$$\left|y_0^1(t)\right| \leq \frac{\tilde{M}_1}{1-(\underline{\lambda}^* + \delta_1)} \leq \widehat{M},$$

$$\left|y_0^2(t)\right| \leq \frac{\tilde{M}_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2\right)^{-1} - 1} \leq \widehat{M}, \tag{26_0}$$

де $\tilde{M}_1 = \sup\limits_t |F^1(t)|$, $\tilde{M}_2 = \sup\limits_t |F^2(t)|$, $\widehat{M} = \max\left\{\dfrac{\tilde{M}_1}{1-(\underline{\lambda}^* + \delta_1)}, \dfrac{\tilde{M}_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2\right)^{-1} - 1}\right\}$.

Оскільки ряди

$$y_i^1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}_1^j \left(B_{11} y_{i-1}^1(q^{-(j+1)}t + 1) + B_{12} y_{i-1}^2(q^{-(j+1)}t + 1)\right),$$

$$y_i^2(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}_2^{-(j+1)} \left(B_{21} y_{i-1}^1(q^j t + 1) + B_{22} y_{i-1}^2(q^j t + 1)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{27_i}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (26_i), $i = 1, 2, \ldots$, то, взявши до уваги (26_0) та умови 1, 2, покажемо, що ряди (27_i) $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки

$$\left|y_i^1(t)\right| \leq \widehat{M}\theta^i,$$

$$\left|y_i^2(t)\right| \leq \widehat{M}\theta^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{28_i}$$

Дійсно, враховуючи (26_0), згідно з (27_1) отримуємо

$$\left|y_1^1(t)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\tilde{\Lambda}_1\right|^j |B_{11} y_0^1(q^{-(j+1)}t + 1) + B_{12} y_0^2(q^{-(j+1)}t + 1)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda}^* + \delta_1)^j \left(|B_{11}| \left|y_0^1\left(q^{-(j+1)}t + 1\right)\right| + |B_{12}| \left|y_0^2\left(q^{-(j+1)}t + 1\right)\right|\right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda}^* + \delta_1)^j \, \widehat{M}(|B_{11}| + |B_{12}|) \leq \widehat{M} b_1 \sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda}^* + \delta_1)^j \leq \frac{\widehat{M} b_1}{1-(\underline{\lambda}^* + \delta_1)} \leq \widehat{M}\theta,$$

$$\left|y_1^2(t)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|\tilde{\Lambda}_2^{-1}\right|^{j+1}\left|B_{21}y_0^1(q^jt+1)+B_{22}y_0^2(q^jt+1)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{j+1}\widehat{M}(|B_{21}|+|B_{22}|) \leq$$

$$\leq \widehat{M}b_2\sum_{j=0}^{\infty}\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{j+1} \leq \frac{\widehat{M}b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1} \leq \widehat{M}\theta.$$

Отже, оцінки (28_i) мають місце при $i = 1$. За індукцією припустимо, що оцінки (28_i) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо їх справедливість для $i+1$. Дійсно, відповідно до (27_{i+1}) і (28_i) маємо

$$\left|y_{i+1}^1(t)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|\tilde{\Lambda}_1\right|^{j}\left|B_{11}y_i^1(q^{-(j+1)}t+1)+B_{12}y_i^2(q^{-(j+1)}t+1)\right| \leq$$

$$\leq \widehat{M}\theta^i\sum_{j=0}^{\infty}(\underline{\lambda}^*+\delta_1)^j\,(|B_{11}|+|B_{12}|) \leq$$

$$\leq \widehat{M}\theta^i b_1\sum_{j=0}^{\infty}(\underline{\lambda}^*+\delta_1)^j \leq \widehat{M}\theta^i\frac{b_1}{1-(\underline{\lambda}^*+\delta_1)} = \widehat{M}\theta^{i+1},$$

$$\left|y_{i+1}^2(t)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|\tilde{\Lambda}_2^{-1}\right|^{j+1}\left|B_{21}y_i^1(q^jt+1)+B_{22}y_i^2(q^jt+1)\right| \leq$$

$$\leq \widehat{M}\theta^i\sum_{j=0}^{\infty}\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{j+1}(|B_{21}|+|B_{22}|) \leq$$

$$\leq \widehat{M}\theta^i\frac{b_2\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)}{1-\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)} \leq \widehat{M}\theta^i\frac{b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1} = \widehat{M}\theta^{i+1}, \quad i = 1,2,\ldots.$$

Отже, оцінки (28_i) виконуються при всіх $i \geq 1$, $t \geq T > 0$. Звідси безпосередньо випливає, що ряди (24) рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, яка є розв'язком системи рівнянь (22) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{\widehat{M}}{1-\theta}.$$

Теорему 5 доведено.

1. *Agarwal R. P.* Difference equations and inequalities, theory, methods and applications. — Second Ed. — 2000. — 972 p.

2. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — **12**. — P. 243 – 284.
3. *Trjitzinsky W. J.* Analytic theory of linear q-difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1933. — **61**. — P. 1 – 38.
4. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1972. — 248 с.
5. *Миролюбов А. А., Солдатов М. А.* Линейные неоднородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1986. — 128 с.
6. *Пелюх Г. П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Докл. АН. — 2006. — **407**, № 5. — С. 600 – 603.
7. *Пелюх Г. П., Сивак О. А.* Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 1. — С. 75 – 95.
8. *Сивак О. А.* Структура множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Наук. вісті Нац. техн. ун-ту України „КПІ". — 2011. — № 4. — С. 81 – 87.

Одержано 12.06.14