УДК 517.9

УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

А. П. Огуленко, О. Д. Кичмаренко

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
Украина, 65026, Одесса, ул. Дворянская, 2

We substantiate a numerical-asymptotic method for solving an optimal control problem on time scales.

Обґрунтовано чисельно-асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування системою на часових шкалах.

Введение. Выдающиеся результаты Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1, 2] не только заложили основу новых теоретических исследований, но и нашли свое применение в различных отраслях прикладных наук. Н. Н. Моисеев [3] впервые применил метод усреднения к исследованию задач оптимального управления. В работах В. А. Плотникова и его учеников метод усреднения применяется для новых классов задач управления системами с запаздыванием, с разрывной правой частью и импульсами, с многозначной и нечеткой правой частью, системами на дискретном времени и др. [4 – 13]. Такое разнообразие математических моделей возникло из-за необходимости исследования сложных процессов, существенно отличающихся своими особенностями.

С появлением работы S. Hilger [14] принципиально изменился подход к пониманию природы времени в динамических системах. Понятие временной шкалы позволило построить общую теорию динамических систем, описывающую и непрерывные системы, и дискретные, и, что особенно важно, смешанные случаи. Подробное изложение теории динамических систем на временных шкалах представлено в [15, 16].

Метод усреднения для динамической системы на временной шкале приведен в [17], где рассматривается вопрос близости решения исходной системы на временной шкале и решения усредненного обобщенного дифференциального уравнения.

Нами было получено обоснование схемы полного усреднения [18] (аналог теоремы Боголюбова) при условии, что усредненная система имеет ту же природу, что и исходная, причем обе динамические системы определены на одной и той же временной шкале.

Целью данной работы является построение метода усреднения для управляемых систем на временных шкалах, установление алгоритма соответствия управлений исходной и усредненной систем и, наконец, обоснование численно-асимптотического метода решения задачи управления системой на временной шкале.

Вспомогательные сведения. Приведем основные сведения о временных шкалах, которые необходимы для изложения полученных результатов. Определения и понятия вводятся и обозначаются в соответствии с [15, 16].

Под временной шкалой понимается непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел, она обозначается символом $\mathbb{T}$. Свойства временной шкалы определяются тремя функциями:

1) оператором перехода вперед:

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\};$$

2) оператором перехода назад:

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

(при этом полагается $\inf\varnothing = \sup\mathbb{T}$ и $\sup\varnothing = \inf\mathbb{T}$);

3) функцией зернистости

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Поведение операторов перехода вперед и назад в конкретной точке временной шкалы определяет тип этой точки. Соответствующая классификация точек временной шкалы представлена в таблице.

t справа рассеянная	$t < \sigma(t)$
t справа плотная	$t = \sigma(t)$
t слева рассеянная	$\rho(t) < t$
t слева плотная	$\rho(t) = t$
t изолированная	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t плотная	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Определим множество $\mathbb{T}^\kappa$ следующим образом:

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T}\setminus\{M\}, & \text{если существует справа рассеянная точка} \quad M \in \mathbb{T}: \\ & M = \sup\mathbb{T}, \sup\mathbb{T} < \infty, \\ \mathbb{T} & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Далее полагаем $[a, b] = \{t \in \mathbb{T} : a \leqslant t \leqslant b\}$.

Определение 1. *δ-Разбиение отрезка временной шкалы $[t_0, t_f]$ определим следующим образом: задавшись диаметром разбиения δ, положим первую точку разбиения равной t_0, а дальнейшие точки определим по формуле*

$$t_i = \begin{cases} \sup\,(t_{i-1}, t_{i-1} + \delta], & \textit{если} \quad t_{i-1} + \delta \in \mathbb{T}^\kappa, \\ \sigma(t_{i-1}), & \textit{если} \quad t_{i-1} + \delta \notin \mathbb{T}^\kappa. \end{cases}$$

Замечание 1. Можно показать [16, с. 120], что построенное таким образом разбиение имеет следующие свойства: для любого i либо $t_i - t_{i-1} \leq \delta$ (будем считать, что в этом случае $i \in I_\delta$), либо $t_i - t_{i-1} > \delta$ и $\sigma(t_{i-1}) = t_i$ (тогда $i \in I_\sigma$). Всюду далее полагаем $N = |I_\delta| + |I_\sigma|$, т. е. N — количество точек δ-разбиения. Кроме того, мы используем обозначение $I = I_\delta \cup I_\sigma$ для множества индексов всех точек δ-разбиения.

Определение 2 [15]. *Пусть $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Число $f^\Delta(t)$ называется Δ-производной функции f в точке t, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки t (т. е. $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}, \delta < 0$), что*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U.$$

Определение 3 [15]. *Если $f^\Delta(t)$ существует для любого $t \in \mathbb{T}^\kappa$, то $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется Δ-дифференцируемой на $\mathbb{T}^\kappa$. Функция $f^\Delta(t) : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ называется дельта-производной функции f на $\mathbb{T}^\kappa$.*

Если f дифференцируема по t, то

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t).$$

Определение 4 [15]. *Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется регулярной, если во всех плотных справа точках временной шкалы $\mathbb{T}$ она имеет конечные правосторонние пределы, а во всех слева плотных точках — конечные левосторонние пределы.*

Определение 5 [15]. *Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется rd-непрерывной, если в справа плотных точках она непрерывна, а в слева плотных точках имеет конечные левосторонние пределы. Множество таких функций обозначается $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T})$, а множество дифференцируемых функций, производная которых rd-непрерывна, обозначается как $C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T})$.*

Определение 6 [15]. *Для любой регулярной функции $f(t)$ существует функция F, дифференцируемая в области D, такая, что для всех $t \in D$ выполняется равенство*

$$F^\Delta(t) = f(t).$$

Эта функция называется предпервообразной для $f(t)$ и определяется она неоднозначно.

Неопределенный интеграл на временной шкале имеет вид

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C,$$

где C — произвольная константа интегрирования, а $F(t)$ — предпервообразная для $f(t)$. Далее, если для всех $t \in \mathbb{T}^\kappa$ выполняется $F^\Delta(t) = f(t)$, где $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ — rd-непрерывная функция, то $F(t)$ называется первообразной функции $f(t)$. Если $t_0 \in \mathbb{T}$, то

$$F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Delta s$$

для всех t. Определенный Δ-интеграл для любых $r, s \in \mathbb{T}$ определяется так:

$$\int\limits_{r}^{s} f(t)\Delta t = F(s) - F(r).$$

Определение 7 [15]. *Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала и X — банахово пространство. Функцию $f : \mathbb{T} \times X \to X$ будем называть:*

1) rd-непрерывной, если функция $g(t) = f(t, x(t))$ rd-непрерывна для любой непрерывной функции $x : \mathbb{T} \to X$;

2) ограниченной в области $Q \subset \mathbb{T} \times X$, если существует константа $M > 0$ такая, что $\|f(t,x)\| \le M$ для любой точки $(t,x) \in Q$;

3) липшицевой по x в области $Q \subset \mathbb{T} \times X$, если существует константа $\lambda > 0$ такая, что

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le \lambda \|x_1 - x_2\| \quad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in Q.$$

Определение 8 [15]. *Функцию $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ будем называть регрессивной, если*

$$1 + mu(t)p(t) \ne 0, \quad t \in \mathbb{T}^\kappa.$$

Множество регрессивных и rd-непрерывных функций обозначается $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T})$.

Как показано в [15], функции p из класса $\mathcal{R}$ можно поставить в соответствие функцию $e_p(t,s)$, которая по своим свойствам является аналогом экспоненты, определенной на $\mathbb{R}$.

В дальнейшем понадобится также неравенство Гронуолла, которое мы сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 1 (неравенство Гронуолла, [15]). *Пусть y — rd-непрерывная на $\mathbb{T}$ функция, $p \in \mathcal{R}^+$, $p \ge 0$, и $\alpha \in \mathbb{R}$. Если выполняется неравенство*

$$y(t) \le \alpha + \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)p(\tau)\Delta\tau, \quad \tau \in \mathbb{T},$$

то

$$y(t) \le \alpha e_p(t, t_0), \quad \tau \in \mathbb{T}.$$

Основные результаты. Рассмотрим задачу оптимального управления системой на временной шкале

$$\begin{aligned} &x^\Delta(t) = \varepsilon[f(t,x(t)) + A(x(t))\varphi(t,u(t))], \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

с терминальным функционалом качества

$$\min J[u] = \Phi(x(t_1)). \tag{2}$$

Здесь $\mathbb{T}$ — временная шкала — непустое замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, $\sup \mathbb{T} = +\infty$, $t \in \mathbb{T}$ — время, $x \in \mathbb{R}^n$, x^Δ — Δ-производная, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $f(t,x)$ — n-мерная вектор-функция, $A(x)$ — $(n \times m)$-матрица, $\varphi(t,u)$ — m-мерная вектор-функция, $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u(t) \in U$ — r-мерный вектор управления, $U \in \operatorname{comp}(R^r)$, $t_0 < \inf \mathbb{T}$.

Задаче (1), (2) поставим в соответствие усредненную задачу оптимального управления системой на той же временной шкале

$$\begin{aligned} &\xi^{\Delta} = \varepsilon[\bar{f}(\xi) + A(\xi)v], \\ &\xi(t_0) = x_0, \end{aligned} \tag{3}$$

с критерием качества

$$\min \bar{J}[v] = \Phi(\xi(t_1)). \tag{4}$$

Усреднение проводится следующим образом:

$$\begin{gathered} \bar{f}(x) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ T\in\mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T} f(t,x)\Delta t, \\ v \in V, \quad V = \mathrm{co}\left(\lim_{\substack{T\to\infty \\ T\in\mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T} \varphi(t,U)\Delta t\right). \end{gathered} \tag{5}$$

Последний интеграл в (5) понимается как аналог интеграла Аумана на временной шкале, а сходимость соответствующего предела — в смысле метрики Хаусдорфа.

Рассмотрим теперь алгоритм, который позволяет установить соответствие между допустимыми управлениями задач (1), (2) и (3), (4). Пусть сначала задано допустимое управление $v(t) \in V$ усредненной задачи. Поставим ему в соответствие управление $u(t) \in U$ исходной задачи следующим образом:

1) зададимся некоторым δ-разбиением временной шкалы $\mathbb{T}$, точки которого обозначим t_i;

2) вычислим точки $v_i = \dfrac{1}{t_{i+1}-t_i} \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} v(s)\Delta s$, $i = 0, 1, 2, \ldots$;

3) построим управление $u(t) = \{u_i(t), t_i \le t < t_{i+1}\}$, где $u_i(t)$ — решение задачи минимизации нормы $\left\| \dfrac{1}{t_{i+1}-t_i} \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t,u(t))\Delta t - v_i \right\|$, т. е.

$$u_i(t) = \operatorname*{argmin}_{u(t)\in U} \left\| \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t,u(t))\Delta t - v_i \right\|.$$

Замечание 2. Можно показать, что множество точек

$$\left\{ \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t,u(t))\Delta t, u(t) \in U \right\}$$

является выпуклым компактом.

Замечание 3. Управление $u_i(t)$, вообще говоря, находится неоднозначным образом.

Обратно, управлению $u(t) \in U$ исходной задачи поставим в соответствие управление $v(t) \in V$ усредненной задачи следующим образом:

1) зафиксируем δ-разбиение $\mathbb{T}$, определенное выше;

2) вычислим точки $w_i = \dfrac{1}{t_{i+1} - t_i} \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t, u_i(t))\Delta t$, $i = 0, 1, 2, \ldots$;

3) построим управление $v(t) = \{v_i, t_i \leq t < t_{i+1}\}$, где $v_i(t)$ находится из условия

$$v_i = \arg\min_{v \in V} \|w_i - v\|.$$

Замечание 4. Управление v_i, вообще говоря, находится неоднозначным образом.

Следующая теорема дает обоснование применения метода усреднения для уравнений управляемого движения систем (1) и (3).

Теорема 1. *Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D \subset \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^r\}$ выполнены следующие условия:*

1) функция $f(t, x)$ rd-непрерывна по t, регрессивна и для нее выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши, причем для любого $(t, x) \in Q$ $\|f(t, x)\| \leq M$, $M > 0$, $f(t, x)$ липшицева по x с константой $\lambda > 0$;

2) функция $A(x)$ удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной λ_A и ограничена константой M;

3) функция $\varphi(t, u)$ rd-непрерывна по t и непрерывна по u, ограничена константой M;

4) для любых допустимых управлений $v(t)$ решение $\xi(t)$ усредненной системы (3) с начальным условием $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ вместе с ρ-окрестностью лежит в области D;

5) существует такое число $\mu_0 > 0$, что для любого $t \in \mathbb{T}^\kappa$ либо $\mu(t) = 0$, либо $\mu(t) > \mu_0$.

Тогда для любых $0 < \eta \leq \rho$ и $L > 0$ найдутся такие $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ и $\delta_0 > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ справедливы следующие утверждения:

1. Для любого допустимого управления $v(t)$ системы (3) существует управление $u(t)$ системы (1) такое, что выполняется неравенство

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq \eta, \tag{6}$$

где $x(t)$ — решение системы (1), порожденное управлением $u(t)$, а $\xi(t)$ — решение системы (3), порожденное управлением $v(t)$.

2. Для любого допустимого управления $u(t) \in U$ системы (1) существует управление $v(t)$ системы (3) такое, что выполняется (6).

Доказательство. Установим вначале первое утверждение теоремы. Итак, пусть $v(t)$ — допустимое управление системы (3). Согласно алгоритму, приведенному выше, поставим ему в соответствие управление $u(t)$. Обозначим траекторию движения системы (1), соответствующую управлению $u(t)$, через $x(t)$, а траекторию движения усредненной системы под воздействием управления $v(t)$ через $\xi(t)$.

Оценим теперь близость траекторий $x(t)$ и $\xi(t)$ на промежутке временной шкалы длиной порядка ε^{-1}:

$$\|x(t)-\xi(t)\| = \left\| x_0 + \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \left[f(s,x(s)) - A(x(s))\varphi(s,u(s))\right]\Delta s - \right.$$

$$\left. - x_0 - \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \left[\bar f(\xi(s)) - A(\xi(s))v(s)\right]\Delta s \right\| \le$$

$$\le \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[f(s,x(s)) - f(s,\xi(s))\right]\Delta s + \int\limits_{t_0}^{t} \left[f(s,\xi(s)) - \bar f(\xi(s))\right]\Delta s + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_0}^{t} \left[A(x(s)) - A(\xi(s))\right]\varphi(s,u(s))\Delta s + \int\limits_{t_0}^{t} A(\xi(s))\left[\varphi(s,u(s)) - v(s)\right]\Delta s \right\| \le$$

$$\le \underbrace{\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \|(s,x(s)) - f(s,\xi(s))\|\,\Delta s}_{B_1} + \underbrace{\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \left\|f(s,\xi(s)) - \bar f(\xi(s))\right\|\Delta s}_{B_2} +$$

$$+ \underbrace{\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \|A(x(s)) - A(\xi(s))\|\,\|\varphi(s,u(s))\|\Delta s}_{B_3} + \underbrace{\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \|A(\xi(s))\left[\varphi(s,u(s)) - v(s)\right]\Delta s}_{B_4}.$$

Оценки для первых двух слагаемых в последнем выражении были получены в [18] при доказательстве аналога первой теоремы Боголюбова для систем на временных шкалах. Они имеют следующий вид:

$$B_1 \le \varepsilon\lambda \int\limits_{t_0}^{t} \|x(t)-\xi(t)\|\Delta s,$$

$$B_2 \le \frac{2\lambda M L^2}{N} + 2NF_1\left(\frac{L}{\varepsilon\delta}\right),$$

где N — количество точек δ-разбиения, а $F_1(T)$ — убывающая к нулю при $T\to\infty$ функция, существование которой гарантируется равномерной сходимостью пределов в (5).

Третье слагаемое в силу липшицевости матрицы $A(x)$ и ограниченности функции $\varphi(t,u)$ можно оценить так:

$$B_3 \le \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_A M \|x(s)-\xi(s)\|\Delta s.$$

Для оценки четвертого слагаемого разобьем интеграл в сумму интегралов. Учитывая обозначение $\xi_i = \xi(t_i)$, имеем

$$B_4 = \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \|A(\xi(s))[\varphi(s, u(s)) - v(s)]\| \Delta s =$$

$$= \sum_{i \in I} \varepsilon \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|A(\xi(s)) \left[\varphi(s, u(s)) - v(s)\right] - A(\xi_i) \left[\varphi(s, u(s)) - v(s)\right] +$$

$$+ A(\xi_i) \left[\varphi(s, u(s)) - v(s)\right]\| \, \Delta s \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i \in I} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|\left[A(\xi(s)) - A(\xi_i)\right] \left[\varphi(s, u(s)) - v(s)\right]\| \, \Delta s +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i \in I} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|A(\xi_i) \left[\varphi(s, u(s)) - v(s)\right] \| \Delta s.$$

Далее, в силу равномерной сходимости к среднему найдется такая убывающая функция $F_2(T) \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} 0$, что

$$\|\varphi(s, u(s)) - v(s)\| \leq F_2 \left(\frac{L}{\varepsilon \delta} \right).$$

Оценим теперь норму разности $\|\xi(s) - \xi_i\|$:

$$\|\xi(s) - \xi_i\| \leq \left\| \varepsilon \int\limits_{t_i}^{s} \left[\bar{f}(\xi(\tau)) + A(\xi(\tau)) v(\tau) \right] \Delta \tau \right\| \leq \varepsilon \int\limits_{t_i}^{s} \left(M + M^2 \right) \Delta \tau.$$

Таким образом, для B_4 имеем

$$B_4 \leq \varepsilon \sum_{i \in I} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda \|\xi(s) - \xi_i\| \|\varphi(s, u(s)) - v(s)\| \Delta s +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i \in I} M \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|\varphi(su(s)) - v(s)\| \Delta s \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i \in I} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda \varepsilon \left(M + M^2 \right) \int\limits_{t_i}^{s} \Delta \tau F_2 \left(\frac{L}{\delta \varepsilon} \right) \Delta s + \varepsilon M \int\limits_{t_0}^{t} F_2 \left(\frac{L}{\delta \varepsilon} \right) \Delta s \leq$$

$$\leq \lambda\varepsilon^2(M+M^2)F_2\left(\frac{L}{\delta\varepsilon}\right)\sum_{i\in I}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\int\limits_{t_i}^{s}\Delta\tau\Delta s+\varepsilon MF_2\left(\frac{L}{\delta\varepsilon}\right)\frac{L}{\varepsilon}\leq$$

$$\leq \lambda\varepsilon^2\left(M+M^2\right)F_2\left(\frac{L}{\delta\varepsilon}\right)\sum_{i\in I}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)\Delta s+MF_2\left(\frac{L}{\delta\varepsilon}\right)L.$$

Чтобы оценить интегралы в последней сумме, рассмотрим два случая. Если $i\in I_\delta$, то $t_{i+1}-t_i\leq\delta$ и потому $\int_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)\Delta s\leq\delta(t_{i+1}-t_i)\leq\delta^2$. Если же $i\in I_\sigma$, то $t_{i+1}=\sigma(t_i)$ и $\int_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)\Delta s=\int_{t_i}^{\sigma(t_i)}(s-t_i)\Delta s=\mu(t_i)(t_i-t_i)=0.$

Воспользуемся теперь условием 5 теоремы. Пусть $N_0=\dfrac{L}{\varepsilon\mu_0}$. Тогда для всех $N>N_0$ и $\delta=\dfrac{L}{N\varepsilon}$ имеем $\delta<\mu_0$, и сумму интегралов можно оценить следующим образом:

$$\sum_{i\in I}\int\limits_{t_i}^{s}(s-t_i)\Delta s\leq\sum_{i\in I_\delta}\delta^2=\sum_{i\in I_\delta}\frac{L^2}{N^2\varepsilon^2}<\frac{L^2}{N\varepsilon^2}.$$

Вернувшись к оценке B_4, получим неравенство

$$B_4\leq\lambda(M+M^2)F_2\left(\frac{L}{\delta\varepsilon}\right)\frac{L^2}{N}+MF_2\left(\frac{L}{\delta\varepsilon}\right)L=\left(\frac{\lambda\left(M+M^2\right)L^2}{N}+ML\right)F_2\left(\frac{L}{\delta\varepsilon}\right).$$

В итоге имеем следующую оценку нормы разности траекторий движения систем (1) и (3):

$$\|x(t)-\xi(t)\|\leq\varepsilon\lambda\int\limits_{t_0}^{t}\|x(s)-\xi(s)\|\Delta s+\frac{2\lambda ML^2}{N}+2NF_1\left(\frac{L}{\delta\varepsilon}\right)+$$

$$+\varepsilon\lambda_AM\int\limits_{t_0}^{t}\|x(s)-\xi(s)\|\Delta s+\left(\frac{\lambda L^2(M+M^2)}{N}+ML\right)F_2\left(\frac{L}{\delta\varepsilon}\right).$$

Группируя должным образом слагаемые в последнем выражении и применяя лемму Гронуолла, получаем

$$\|x(t)-\xi(t)\|\leq\left[\frac{2\lambda ML^2}{N}+2NF_1\left(\frac{L}{\delta\varepsilon}\right)+\left(\frac{\lambda L^2(M+M^2)}{N}+ML\right)F_2\left(\frac{L}{\delta\varepsilon}\right)\right]e_{\varepsilon(\lambda+\lambda_AM)}(t,t_0).$$

Исходя из свойства монотонности экспоненциальной функции [15] (теорема 2.36, пункт ii), имеем $e_{\varepsilon(\lambda+\lambda_AM)}(t,t_0)<e_{\varepsilon(\lambda+\lambda_AM)}\left(\dfrac{L}{\varepsilon},t_0\right)$. Далее, поскольку $1+\varepsilon(\lambda+\lambda_AM)\mu(t)>0$, по определению экспоненты через цилиндрическое преобразование [15, с. 59] (определение 2.30) получаем

$$e_{\varepsilon(\lambda+\lambda_A M)}\left(\frac{L}{\varepsilon}, t_0\right) =$$

$$= \exp\left(\int\limits_{t_0}^{\frac{L}{\varepsilon}} \frac{\ln(1+\varepsilon\,(\lambda+\lambda_A M)\,\mu(\tau))}{\mu(\tau)}\,\Delta\tau\right) <$$

$$< \exp\left(\int\limits_{t_0}^{\frac{L}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon(\lambda+\lambda_A M)\mu(\tau)}{\mu(\tau)}\,\Delta\tau\right) =$$

$$= \exp\left(\varepsilon(\lambda+\lambda_A M)\int\limits_{t_0}^{\frac{L}{\varepsilon}} \Delta\tau\right) < e^{(\lambda+\lambda_A M)L}.$$

Оценив таким образом экспоненту, выберем N достаточно большим, добившись выполнения неравенства

$$\frac{2\lambda M L^2}{N}\, e^{(\lambda+\lambda_A M)L} < \frac{\eta}{3}.$$

Зафиксировав теперь это значение N, выберем ε_0 так, чтобы для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнялись неравенства

$$2NF_1\left(\frac{L}{\delta\varepsilon}\right) e^{(\lambda+\lambda_A M)L} < \frac{\eta}{3},$$

$$F_2\left(\frac{L}{\delta\varepsilon}\right)\left(\frac{\lambda L^2(M+M^2)}{N} + ML\right) e^{(\lambda+\lambda_A M)} < \frac{\eta}{3}.$$

Окончательно получаем оценку

$$\|x(t) - \xi(t)\| < \eta,$$

и первое утверждение теоремы доказано.

Как видно из описания алгоритма соответствия управлений, доказательство второго утверждения теоремы может быть проведено аналогичным образом.

Теорема 1 доказана.

Замечание 5. С практической точки зрения интерес представляет именно первая часть алгоритма, которая позволяет любому управлению усредненной задачи (в силу автономности системы (3) мы считаем ее более простой) поставить в соответствие допустимое управление исходной задачи (1), (2). Доказанная теорема позволяет утверждать, что соответствующие траектории движения систем будут близки. Вторая же часть алгоритма имеет лишь теоретическое значение.

Используя метод усреднения для уравнений управляемого движения, нетрудно получить обоснование численно-асимптотического метода решения задачи оптимального управления с терминальным критерием качества (1), (2). Для этого вначале докажем несколько лемм, устанавливающих определенные соотношения между задачами оптимального управления с одинаковым критерием качества.

Итак, пусть имеются две задачи оптимального управления:

$$\begin{aligned} &x^{\Delta}(t) = f(t,x,u), \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned} \qquad J[u] = \Phi(x(T)) \to \min_{u\in U}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &y^{\Delta}(t) = g(t,y,v), \\ &y(t_0) = x_0, \end{aligned} \qquad \bar{J}[v] = \Phi(y(T)) \to \min_{v\in V}, \tag{8}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $f(t,x,u)$ и $g(t,y,u)$ — n-мерные вектор-функции, $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — липшицева функция с константой Липшица λ_Φ, $u(t) \in U$ — r-мерный вектор управления задачи (7), $U \in \operatorname{comp}(R^r)$, $v(t) \in V$ — s-мерный вектор управления (8), $V \in \operatorname{comp}(R^s)$.

Пусть задачи (7) и (8) имеют решение (возможно, не единственное). Обозначим через u^* оптимальное управление для задачи (7), а через v^* — оптимальное управление для задачи (8).

Лемма 2. *Пусть существует допустимое управление $v^0 \in V$ такое, что соответствующая ему траектория $y(t)$ близка к оптимальной траектории $x^*(t)$ задачи (7), а именно, для некоторого малого $\eta_1 > 0$ и любого $t \in [t_0, T]$ выполняется $\|x^*(t) - y(t)\| < \eta_1$. Пусть при этом $J[u^*] \le \bar{J}[v^*]$. Тогда*

$$\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| < \lambda_\Phi \eta_1.$$

Доказательство. В силу липшицевости $\Phi(\cdot)$ и специального выбора v^0 имеем

$$\left|J[u^*] - \bar{J}[v^0]\right| = |\Phi(x^*(T)) - \Phi(y(T))| \le \lambda_\Phi |x^*(T) - y(T)| \le \lambda_\Phi \eta_1,$$

т. е.

$$J[u^*] \ge \bar{J}[v^0] - \lambda_\Phi \eta_1. \tag{9}$$

Поскольку v^* — оптимальное управление задачи (8), то

$$\bar{J}[v^*] \le \bar{J}[v^0]. \tag{10}$$

С учетом (9) и (10) получаем следующую цепочку неравенств:

$$\bar{J}[v^0] \ge \bar{J}[v^*] \ge J[u^*] \ge \bar{J}[v^0] - \lambda_\Phi \eta_1.$$

Вычитая из неравенства $\bar{J}[v^*]$, получаем

$$J[u^*] - \bar{J}[v^*] \geq \bar{J}[v^0] - \bar{J}[v^*] - \lambda_\Phi \eta_1.$$

Тогда в силу (10) выполняется и неравенство

$$J[u^*] - \bar{J}[v^*] \geq -\lambda_\Phi \eta_1.$$

С другой стороны, по условию леммы

$$J[u^*] - \bar{J}[v^*] \leq 0 < \lambda_\Phi \eta_1.$$

Таким образом,

$$-\lambda_\Phi \eta \leq J[u^*] - \bar{J}[v^*] < \lambda_\Phi \eta_1,$$

и лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть существует такое управление u^0 для задачи (7), что соответствующая ему траектория $x(t)$ близка к оптимальной траектории $y^*(t)$ задачи (8), а именно, для малого $\eta_2 > 0$ и любого $t \in [t_0, T]$ выполняется $\|x(t) - y^*(t)\| < \eta_2$. Пусть $J[u^*] > \bar{J}[v^*]$. Тогда*

$$\left| J[u^*] - \bar{J}[v^*] \right| < \lambda_\Phi \eta_2.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2, получаем цепочку неравенств

$$J[u^0] \geq J[u^*] > \bar{J}[v^*] \geq J[u^0] - \lambda_\Phi \eta_2.$$

Вычитая из неравенства $J[u^*]$, получаем

$$\bar{J}[v^*] - J[u^*] \geq J[u^0] - J[u^*] - \lambda_\Phi \eta_2.$$

Тогда выполняется и неравенство

$$\bar{J}[v^*] - J[u^*] \geq -\lambda_\Phi \eta_2,$$

или, иначе говоря,

$$J[u^*] - \bar{J}[v^*] \leq \lambda_\Phi \eta_2.$$

С другой стороны, по условию леммы

$$J[u^*] - \bar{J}[v^*] > 0 > -\lambda_\Phi \eta_2.$$

Таким образом,

$$-\lambda_\Phi \eta < J[u^*] - \bar{J}[v^*] \leq \lambda_\Phi \eta_2,$$

и лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть, наконец, существуют одновременно и u^0, и v^0 — допустимые управления, о которых шла речь в леммах 2 и 3. Тогда*

$$\big|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\big| < \lambda_\Phi \eta_3,$$

$$J[u^0] - J[u^*] \le C\eta_3,$$

$$\bar{J}[v^0] - \bar{J}[v^*] \le C\eta_3,$$

где $\eta_3 = \max\{\eta_1, \eta_2\}$.

Доказательство. Из двух величин $J[u^*]$ и $\bar{J}[v^*]$ одна обязательно больше (в крайнем случае равна) другой. Поэтому справедлива либо лемма 2, либо лемма 3 и в любом случае выполняется неравенство

$$\big|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\big| < \lambda_\Phi \eta_3.$$

Поэтому

$$J[u^0]-J[u^*]=J[u^0]-\bar{J}[v^*]+\bar{J}[v^*]-J[u^*]\le|J[u^0]-\bar{J}[v^*]|+|\bar{J}[v^*]-J[u^*]|\le\lambda_\Phi\eta_2+\lambda_\Phi\eta_3<C\eta_3,$$

где $C = 2\lambda_\Phi$.

Лемма 4 доказана.

Теорема 2. *Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D \subset \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^r\}$ выполнены условия теоремы 1 и, кроме того,*

1) $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ липшицева с константой Липшица λ_Φ;

2) существуют оптимальное управление $u^*(t) \in U$ задачи (1), (2) и оптимальное управление $v^*(t) \in V$ задачи (3), (4).

Тогда для любых $0 < \eta \le \rho$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \le t \le L\varepsilon^{-1}$ выполняются следующие неравенства:

$$\big|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\big| < \eta,$$

$$J\left[u_{v^*}\right] - J[u^*] < \eta,$$

где u_{v^*} — управление системы (1), построенное по алгоритму и соответствующее оптимальному управлению v^* задачи (3), (4).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно заметить, что алгоритм метода усреднения позволяет управлению v^* поставить в соответствие такое допустимое управление u_{v^*} задачи (1), (2), что соответствующие траектории будут близки:

$$\|x_{v^*}(t) - \xi^*(t)\| < \eta.$$

Обозначим через ε_1 значение малого параметра ε, при котором, согласно теореме 1, выполняется последнее неравенство.

С другой стороны, тот же алгоритм позволяет построить управление v_{u^*} усредненной системы, соответствующее оптимальному управлению исходной системы. При этом по теореме 1 найдется такое ε_2, что соответствующие траектории также будут близки:

$$\|x^*(t) - \xi_{u^*}(t)\| < \eta.$$

Применяя лемму 4, непосредственно получаем оба неравенства теоремы.

Теорема 2 доказана.

Теорема 2 завершает обоснование численно-асимптотического метода решения задачи оптимального управления (1), (2).

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН СССР, 1937. — 363 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 503 с.
3. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
4. *Бойцова И. А.* Численно-асимптотический метод решения дискретных задач оптимального управления с быстрыми и медленными переменными // Вест. Белорус. гос. ун-та. Сер. I. — 2011. — № 1. — С. 105 – 110.
5. *Комлева Т. А., Плотникова Л. И., Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Усреднение нечетких управляемых систем // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 3. — С. 325 – 332.
6. *Плотников А. В.* Асимптотическое исследование уравнений управляемого движения с многозначными траекториями // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 10. — С. 1409 – 1412.
7. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: Астропринт, 1999. — 356 с.
8. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. — Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.
9. *Плотников В. А., Плотникова Л. И., Яровой А. Т.* Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 2. — С. 241 – 254.
10. *Плотников В. А., Плотникова Л. И.* Усреднение уравнений управляемого движения в метрическом пространстве // Кибернетика и систем. анализ. — 1997. — № 4. — С. 175 – 180.
11. *Плотников В. А., Кичмаренко О. Д.* Усреднение управляемых уравнений с производной Хукухары // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 3. — С. 376 – 385.
12. *Плотников В. А., Кичмаренко О. Д.* Усреднение уравнений с производной Хукухары, многозначным управлением и запаздыванием // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2007. — **12**, вип. 7. — С. 130 – 139.
13. *Plotnikov A. V.* The averaging of control linear fuzzy differential equations // J. Adv. Res. Appl. Math. — 2011. — **3**, № 3. — P. 1 – 20.
14. *Hilger S.* Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten: Ph.D. Thesis. — Univ. Würzburg, 1988.
15. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales: an introduction with applications. — Basel: Birkhäuser, 2001. — 358 p.
16. *Bohner M. et al.* Advances in dynamic equations on time scales. — Springer, 2002. — 368 p.
17. *Slavík A.* Averaging dynamic equations on time scales // J. Math. Anal. and Appl. — 2012. — **388**, № 2. — P. 996 – 1012.
18. *Огуленко О. П., Кичмаренко О. Д.* Схема полного усереднення на временных шкалах // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2012. — **17**, вип. 4 (16). — С. 67 – 77.

Получено 06.09.13,
после доработки — 22.01.14