УДК 517.9

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ НЕТЕРОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ВЫРОЖДЕННОГО ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ*

С. М. Чуйко

Славян. пед. ун-т
Украина, 84112, Славянск Донецкой обл., ул. Г. Батюка, 19
e-mail: chujko-slav@inbox.ru

We find conditions fro regularizing a linear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations with impulsive effect. We also construct a generalized Green's operator and find the form of a linear impulsive perturbation of the regularized linear boundary-value problem.

Знайдено умови регуляризації лінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом. Побудовано узагальнений оператор Гріна та знайдено вигляд лінійного імпульсного збурення регуляризованої лінійної крайової задачі.

1. Постановка задачи. Создание теории импульсно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений неразрывно связано с развитием киевской школы нелинейных колебаний. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов впервые использовали импульсную модель для изучения механизма часов, в котором затухание колебаний, вызванное трением, компенсировалось периодическими толчками анкера [1]. Исследования Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова были продолжены в работах А. М. Самойленко и А. Д. Мышкиса [2, 3]. Конструктивная теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием создана в монографиях А. М. Самойленко и Н. А. Перестюка [4, 5]. В работах А. М. Самойленко, Н. А. Перестюка и А. А. Бойчука [4–9] найдены необходимые и достаточные условия существования решений импульсно возмущенных нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в критических и некритических случаях, конструкция обобщенного оператора Грина краевой задачи с импульсным воздействием, а также критерии регуляризации некорректно поставленных нетеровых краевых задач с помощью импульсного воздействия [9].

В продолжение исследования условий регуляризации краевых задач с помощью импульсного воздействия [9] предположим, что линейная нетерова $(m \neq n)$ краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [5, 9]

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha \tag{1}$$

некорректно поставлена для произвольной непрерывной функции $f(t)$ и произвольного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$:

$$P_{Q^*}\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} \neq 0, \quad Q := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \operatorname{rank} Q := n_1,$$

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований (№ 0112U000372).

в пространстве $z(t) \in C^1[a,b]$. Здесь $A(t)$ и $f(t)$ — непрерывные по t на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $X_0(t)$ — фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (1), $P_{Q^*} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q^*)$. Исследуем задачу о регуляризации [11, 13] краевой задачи (1) с помощью импульсного воздействия [5, 9, 10, 12, 14 – 16]

$$\Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0) + \mu, \quad \Delta z(\tau) := z(\tau + 0) - z(\tau - 0), \quad S \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

В отличие от монографии [9] и статьи [15] поставим задачу не об условиях разрешимости линейной нетеровой краевой задачи (1) с фиксированным импульсным воздействием, а о нахождении решения

$$z(t) \in C^1 \left\{[a,b] \setminus \{\tau\}_I\right\}, \quad \tau \in [a,b],$$

а также матрицы S, которая бы гарантировала разрешимость этой задачи для произвольной непрерывной функции $f(t)$ и произвольного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Поставленная задача продолжает исследование условий регуляризации нетеровых краевых задач с помощью импульсного воздействия, приведенных в монографии [9, с. 248] и статье [15], в случае не фиксированной матрицы S.

2. Условия разрешимости задачи о регуляризации. Линейный ограниченный векторный функционал

$$\ell z(\cdot) : C[a,b] \to \mathbb{R}^m$$

представим в виде

$$\ell z(\cdot) = \ell_0 z(\cdot) + \ell_1 z(\cdot), \quad \ell_0 z(\cdot) : C[a,\tau] \to \mathbb{R}^m, \quad \ell_1 z(\cdot) : C[\tau,b] \to \mathbb{R}^m.$$

В пространстве

$$z(t) \in C^1 \left\{[a,b] \setminus \{\tau\}_I\right\}, \quad a < \tau < b,$$

решение дифференциальной системы (1) подчиняем краевому условию

$$\mathcal{L}z(\cdot) = \alpha, \quad \mathcal{L}z(\cdot) := \ell_0 z(\cdot) + \ell_1 z(\cdot).$$

Таким образом, получаем краевую задачу с импульсным воздействием

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) + f(t), \quad \Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0) + \mu, \quad \mathcal{L}z(\cdot) = \alpha. \tag{2}$$

Обозначим через $X_0(t)$ нормальную $(X(\tau - 0) = I_n)$ фундаментальную матрицу однородной части дифференциальной системы (1). Общее решение

$$z(t) \in C^1\{[a,b] \setminus \{\tau\}_I\}$$

дифференциальной системы (2) представимо в виде

$$z(t,c) = X(t)c + \mathcal{K}[f(s)](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$\mathcal{K}[f(s)](t) := \begin{cases} -X_0(t) \displaystyle\int_t^\tau X_0^{-1}(s)f(s)\,ds, & t \in [a, \tau[, \\ X_0(t) \displaystyle\int_\tau^t X_0^{-1}(s)f(s)\,ds, & t \in [\tau, b], \end{cases}$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши $z(\tau - 0) = c$ для дифференциальной системы (2), непрерывный в точке $t = \tau$, и $X(t)$ — нормальная $(X(\tau - 0) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2) с импульсным воздействием:

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [a, \tau[, \\ X_0(t)(I_n + S), & t \in [\tau, b]. \end{cases}$$

Обозначим матрицу $\mathcal{Q} := \mathcal{L}X(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и ее ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$, а также матрицы

$$Q_0 := \ell_0 X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad Q_1 := \ell_1 X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Имеют место равенства

$$\mathcal{Q} = Q_0 + Q_1(I_n + S), \quad Q = Q_0 + Q_1.$$

Подставляя общее решение дифференциальной системы (2)

$$z(t, c) = X(t)c + \mathcal{K}[f(s)](t)$$

в краевое условие (2) и полагая $\mu := 0$, получаем уравнение

$$\mathcal{Q}\cdot c = \alpha - \mathcal{L}\mathcal{K}[f(s)](\cdot),$$

разрешимое тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathcal{Q}^*}\{\alpha - \mathcal{L}\mathcal{K}[f(s)](\cdot)\} = 0.$$

Таким образом, разрешимость краевой задачи (2) для произвольной непрерывной функции $f(t)$ и произвольного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$ гарантирует условие $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, равносильное уравнению

$$(Q + Q_1 S)(Q + Q_1 S)^+ = I_m \tag{3}$$

относительно неизвестной матрицы $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Заметим, что в критическом случае:

$$P_{Q^*} \neq 0$$

уравнение (3) разрешимо лишь для фредгольмовой $(m = n)$ либо недоопределенной $(m < n)$ краевой задачи (2). Действительно, предположим задачу (2) переопределенной $(m > n)$, при этом

$$\operatorname{rank}(Q + Q_1 S)(Q + Q_1 S)^+ \le \operatorname{rank}(Q + Q_1 S) = \operatorname{rank}(Q + Q_1 S)^+ \le n < m,$$

что противоречит равенству рангов левой и правой частей уравнения (3).

Уравнение (3), в частности, разрешимо для фредгольмовой $(m = n)$ краевой задачи (2) при условии

$$\det(Q + Q_1 S) \neq 0,$$

при этом существует по меньшей мере одна матрица $\mathcal{S}$, являющаяся решением уравнения (3).

Предположим, что уравнение (3) имеет решение $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, которому соответствует нормальная $(X(\tau - 0) = I_n)$ фундаментальная матрица $X(t)$ однородной части системы (2):

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [a, \tau[, \\ X_0(t)(I_n + \mathcal{S}), & t \in [\tau, b]. \end{cases}$$

Найденной матрице $X(t)$ соответствует по меньшей мере одно решение задачи (2)

$$z(t, c) = X(t) \cdot \mathcal{Q}^{+}\{\alpha - \mathcal{L}\mathcal{K}[f(s)](\cdot)\} + \mathcal{K}[f(s)](t).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *Если краевая задача (1) в классе $z(t) \in C^1[a, b]$ является некорректно поставленной,*

$$P_{Q^*}\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} \neq 0$$

и уравнение (3) имеет действительное решение $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то для произвольной непрерывной функции $f(t) \in C[a, b]$ и произвольного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$ в классе

$$z(t) \in C^1\{[a, b] \setminus \{\tau\}_I\}$$

существует по меньшей мере одно решение

$$z(t) = \mathcal{G}[f(s), \alpha](t)$$

краевой задачи с импульсным воздействием (3), где $S = \mathcal{S}$, $\mu := 0$,

$$\mathcal{G}[f(s), \alpha](t) := X(t) \cdot \mathcal{Q}^{+}\{\alpha - \mathcal{L}\mathcal{K}[f(s)](\cdot)\} + \mathcal{K}[f(s)](t)$$

— обобщенный оператор Грина в задаче о регуляризации с помощью импульсного воздействия (2),

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [a, \tau[, \\ X_0(t)(I_n + S), & t \in [\tau, b], \end{cases}$$

— нормальная $(X(\tau - 0) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2) с импульсным воздействием.

В зависимости от матрицы $\mathcal{S}$ импульсное воздействие (2) при условии

$$\det(I_n + \mathcal{S}) \neq 0$$

является невырожденным [5, 9] либо вырожденным [18, 19]:

$$\det(I_n + \mathcal{S}) = 0.$$

Пример 1. Условия доказанной теоремы выполняются для антипериодической задачи

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t), \quad z(0) + z(\pi) = 0,$$

которая для произвольной непрерывной функции $f(t) \in C[0,\pi]$ не имеет решений в классе функций $z(t) \in C^1[0;\pi]$. В то же время в классе

$$z(t) \in C^1\{[0,\pi] \setminus \{\tau\}_I\}, \quad \tau := \frac{\pi}{2},$$

антипериодическая краевая задача с импульсным воздействием

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t), \quad t \neq \tau, \quad z(0) + z(\pi) = 0, \quad \Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0) \tag{4}$$

разрешима для произвольной непрерывной функции $f(t) \in C[0,\pi]$. Здесь

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$X_0(t) = \begin{bmatrix} e^{t-\frac{\pi}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & -\cos t \\ 0 & \cos t & \sin t \end{bmatrix},$$

то

$$Q = \begin{bmatrix} e^{-\frac{\pi}{2}}(1+e^{\pi}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{Q^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, в случае антипериодической задачи для дифференциального уравнения (4) имеет место критический случай, при этом необходимое и достаточное условие существования гладкого решения в классе $z(t) \in C^1[0,\pi]$ для произвольной непрерывной функции $f(t) \in C[0,\pi]$ не выполнено, в том числе для данной функции $f(t)$:

$$P_{Q^*}\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \frac{\pi}{2} \\ \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Далее вычисляем матрицы

$$Q_0 = I_3, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} e^{\frac{\pi}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

и ортопроектор $P_{Q_1^*} = 0$. В случае фредгольмовой краевой задачи (4) решением уравнения (3) является любая матрица $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, для которой

$$\det(Q + Q_1\mathcal{S}) \neq 0.$$

Положим

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

при этом нормальная $\left(X\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = I_3\right)$ фундаментальная матрица $X(t)$ однородной части части дифференциальной системы с импульсным воздействием (4)

$$X(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} e^{t-\frac{\pi}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & -\cos t \\ 0 & \cos t & \sin t \end{bmatrix}, & t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \\ \\ \begin{bmatrix} e^{t-\frac{\pi}{2}} & 0 & e^{t-\frac{\pi}{2}} \\ -\cos t & 2\sin t & -\cos t \\ \sin t & 2\cos t & \sin t \end{bmatrix}, & t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \end{cases}$$

гарантирует разрешимость неоднородной задачи (4) для произвольной непрерывной функции $f(t)$, так как $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$. Здесь

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{\pi}{2}}(1 + e^{\pi}) & 0 & e^{\frac{\pi}{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

При этом антипериодическая краевая задача с импульсным воздействием (4), регуляризованная с помощью импульсного воздействия

$$\Delta z(\tau) = \mathcal{S}z(\tau - 0),$$

имеет единственное решение

$$\mathcal{G}[f(s), 0](t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2\pi e^{t-\frac{\pi}{2}} \\ \\ -e^{-\pi}(\pi(2 + e^{\pi}) + 2e^{\pi}t)\cos t \\ \\ -2\cos t + (\pi + 2\pi e^{-\pi} + 2t)\sin t \end{bmatrix}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

$$\mathcal{G}[f(s),0](t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\pi e^{t-\frac{3\pi}{2}} \\ \\ (\pi - 2\pi e^{-\pi} - 2t)\cos t \\ \\ -2\cos t + (\pi(2e^{-\pi}-1)+2t)\sin t \end{bmatrix}, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Заметим, что $\det(I_3 + \mathcal{S}) = 0$, поэтому импульсное воздействие в случае антипериодической краевой задачи (4) является вырожденным [18, 19].

Пример 2. Краевую задачу (4) можно также регуляризовать с помощью невырожденного импульсного воздействия.

Действительно, положим

$$\mathcal{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

тогда нормальная $\left(X\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = I_3\right)$ фундаментальная матрица $X(t)$ однородной части дифференциальной системы с импульсным воздействием (4)

$$X(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} e^{t-\frac{\pi}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & -\cos t \\ 0 & \cos t & \sin t \end{bmatrix}, & t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \\ \\ \begin{bmatrix} e^{t-\frac{\pi}{2}} & e^{t-\frac{\pi}{2}} & 0 \\ -\cos t & \sin t & \sin t - \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t + \cos t \end{bmatrix}, & t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \end{cases}$$

гарантирует разрешимость неоднородной задачи (4) для произвольной непрерывной функции $f(t)$, так как

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{\pi}{2}}(1+e^{\pi}) & e^{\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P_{\mathcal{Q}^*} = 0.$$

При этом антипериодическая краевая задача с импульсным воздействием (4), регуляризованная с помощью невырожденного

$$\det(I_3 + \mathcal{S}_1) = 2 \neq 0$$

импульсного воздействия

$$\Delta z(\tau) = \mathcal{S}_1 z(\tau - 0),$$

имеет единственное решение

$$\mathcal{G}[f(s),0](t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2\pi e^{t-\frac{\pi}{2}} \\ \\ (\pi - 2t)\cos t + 2e^{-\pi}(1+e^{\pi})\pi\sin t \\ \\ 2(\pi - 1 + \pi e^{-\pi})\cos t - (\pi - 2t)\sin t \end{bmatrix}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

$$\mathcal{G}[f(s),0](t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\pi e^{t-\frac{3\pi}{2}} \\ \\ (3\pi - 2t)\cos t + 2\pi(1+e^{-\pi})\sin t \\ \\ 2(\pi - 1 + \pi e^{-\pi})\cos t + (2t - 3\pi)\sin t \end{bmatrix}, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

При наличии действительных корней $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ уравнения (3) будем говорить, что задача о регуляризации линейной краевой задачи с помощью импульсного воздействия корректна. В противном случае, при отсутствии действительных корней уравнения (3), будем говорить, что задача о регуляризации линейной краевой задачи с помощью импульсного воздействия некорректна, при этом может быть поставлена задача о бифуркации решений линейной краевой задачи с импульсным возмущением.

3. Задача о бифуркации решений линейной краевой задачи с импульсным воздействием. Предположим, что уравнение (3) не имеет действительных корней. Это возможно, например, в критическом случае для переопределенной $(m > n)$ нетеровой краевой задачи (2).

Контрпример. Уравнение (3) не разрешимо для фредгольмовой $(m = n = 3)$ антипериодической задачи

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t), \quad z(0) + z(\pi) = 0, \tag{5}$$

которая для произвольной непрерывной функции $f(t)$ не имеет решений в классе функций $z(t) \in C^1[0; 2\pi]$. Здесь

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$X_0(t) = \begin{bmatrix} e^{t-\pi} & 0 & 0 \\ 0 & -\cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & -\cos t \end{bmatrix},$$

то

$$Q = \begin{bmatrix} 1+e^{-\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{Q^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, в случае антипериодической задачи (5) имеет место критический случай, при этом необходимое и достаточное условие существования гладкого решения в классе $z(t) \in C^1[0, 2\pi]$ для произвольной непрерывной функции $f(t) \in C[0, 2\pi]$ не выполнено. Уравнение (3) для фредгольмовой задачи (5) принимает вид

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \neq 0,$$

следовательно, задача о регуляризации линейной двухточечной краевой задачи (5) с помощью импульсного воздействия поставлена некорректно.

Подставляя общее решение дифференциальной системы (2)

$$z(t,c) = X(t)c + \mathcal{K}[f(s)](t)$$

в краевое условие (2) и полагая $\mu := 0$, получаем уравнение

$$R(c)\, c = \alpha - \mathcal{L}\mathcal{K}[f(s)](\cdot) - Qc, \quad R(c) := Q_1 S \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

относительно неизвестной матрицы $R(c)$, разрешимое тогда и только тогда, когда

$$\{\alpha - \mathcal{L}\mathcal{K}[f(s)](\cdot) - Qc\}P_c = 0.$$

Здесь $P_c \in \mathbb{R}^1$ — ортопроектор $P_c : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{N}(c)$. При условии $c \neq 0$ имеет место равенство $P_c = 0$, гарантирующее существование по меньшей мере одной матрицы

$$R(c) := \{\alpha - \mathcal{L}\mathcal{K}[f(s)](\cdot) - Qc\}c^+.$$

Таким образом, для нахождения матрицы S приходим к уравнению $Q_1 S = R(c)$, разрешимому тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_1^*}\{\alpha - \mathcal{L}\mathcal{K}[f(s)](\cdot) - Qc\}c^+ = 0. \tag{6}$$

Если уравнение (6) имеет действительный корень $c = \vartheta \in \mathbb{R}^n$, то существует по меньшей мере одна матрица

$$S = Q_1^+\{\alpha - \mathcal{L}\mathcal{K}[f(s)](\cdot) - Q\vartheta\}\vartheta^+,$$

гарантирующая разрешимость краевой задачи (2). Здесь $P_{Q_1^*} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — ортопроектор $P_{Q_1^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q_1^*)$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма. *Если краевая задача (1) в классе $z(t) \in C^1[a,b]$ является некорректно поставленной,*

$$P_{Q^*}\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} \neq 0$$

и уравнение (6) имеет действительный корень $c = \vartheta \in \mathbb{R}^n$, то для произвольной непрерывной функции $f(t) \in C[a,b]$ и произвольного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$ существует по меньшей мере одна матрица $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, для которой краевая задача с импульсным воздействием (2) при

$$S := Q_1^+\{\alpha - \mathcal{L}\mathcal{K}[f(s)](\cdot) - Q\vartheta\}\vartheta^+, \quad \mu := 0$$

в классе

$$z(t) \in C^1\{[a,b] \setminus \{\tau\}_I\}$$

имеет единственное решение

$$z(t) = \mathcal{G}[f(s),\alpha](t),$$

где

$$\mathcal{G}[f(s),\alpha](t) := X(t)\vartheta + \mathcal{K}[f(s)](t)$$

— обобщенный оператор Грина некорректно поставленной задачи о регуляризации с помощью импульсного воздействия.

Пример 3. Условия доказанной леммы выполняются для антипериодической задачи, подчиненной условию Коши

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t), \quad z(0) = \eta, \quad z(0) + z(2\pi) = 0,$$

которая не имеет решений в классе функций $z(t) \in C^1[0;2\pi]$. В то же время в классе

$$z(t) \in C^1\{[0,2\pi] \setminus \{\tau\}_I\}$$

краевая задача с антипериодическим краевым условием

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t), \quad t \neq \tau, \quad z(0) + z(2\pi) = 0, \quad \Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0) \tag{7}$$

разрешима. Здесь

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad \eta := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Обозначим $\omega := 1 + e^{2\pi}$. Поскольку

$$X_0(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

то

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{Q^*} = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega^2}{1+\omega^2} & 0 & 0 & -\dfrac{\omega}{1+\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{5} & 0 & 0 & -\dfrac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{4}{5} & 0 & 0 & -\dfrac{2}{5} \\ -\dfrac{\omega}{1+\omega^2} & 0 & 0 & \dfrac{1}{1+\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{5} & 0 & 0 & \dfrac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{2}{5} & 0 & 0 & \dfrac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, в случае антипериодической задачи, подчиненной условию Коши для уравнения (7), имеет место критический случай, при этом необходимое и достаточное условие существования гладкого решения в классе $z(t) \in C^1[0,2\pi]$ для произвольной непрерывной функции $f(t) \in C[0,2\pi]$ не выполнено, в том числе для данной функции $f(t)$:

$$P_{Q^*}\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^* \neq 0.$$

Далее вычисляем матрицы

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и ортопроектор

$$P_{Q_1^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В случае нетеровой краевой задачи (7) ненулевое решение уравнения (6) единственно

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ему соответствует матрица

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} -1 - e^{-2\pi} & 0 & 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При этом антипериодическая задача, подчиненная условию Коши для уравнения (7), регуляризованная с помощью невырожденного

$$\det(I_3 + \mathcal{S}) = \begin{vmatrix} -e^{-2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -e^{-2\pi} \neq 0$$

импульсного воздействия

$$\Delta z(\tau) = \mathcal{S} z(\tau - 0),$$

имеет единственное решение

$$\mathcal{G}[f(s), \eta](t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e^t \\ -t\cos t + \sin t \\ t \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi],$$

$$\mathcal{G}[f(s),\eta](t) = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} -2e^{t-2\pi} \\ (2\pi - t)\cos t + \sin t \\ (t-2\pi)\sin t \end{array}\right], \quad t \in [\pi, 2\pi].$$

Существенным отличием обобщенного оператора Грина в случае, когда уравнение (3) имеет действительное решение $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, от некорректно поставленной задачи о регуляризации линейной краевой задачи в рамках доказанной леммы или следствия является независимость матрицы $\mathcal{S}$, а следовательно, и нормальной $(X(a) = I_n)$ фундаментальной матрицы $X(t)$ однородной части системы (2) от неоднородностей краевой задачи (2).

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937. — 365 с.
2. *Самойленко А. М.* К вопросу обоснования метода исследования колебаний в системах, подверженных импульсному воздействию // Укр. мат. журн. — 1967. — **18**, № 2. — С. 96 – 104.
3. *Мышкис А. Д., Самойленко А. М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сб. Новая сер. — 1967. — **74**, № 2. — С. 202 – 208.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Киев. гос. ун-т, 1980. — 80 с.
5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 287 с.
6. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 1978. — **14**, № 16. — С. 1034 – 1045.
7. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1982. — **34**, № 1. — С. 66 — 73.
8. *Бойчук А. А., Перестюк Н. А., Самойленко А. М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. — 1991. — **27**, № 9. — С. 1516 – 1521.
9. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — xiv + 317 p.
10. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 2001. — **37**, № 8. — С. 1132 – 1135.
11. *Азбелев Н. В., Максимов Н. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.
12. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Докл. АН. — 2001. — **379**, № 2. — С. 170 – 172.
13. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
14. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 1. — С. 51 – 65.
15. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Бифуркация решений импульсной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 1. — С. 21 – 31.
16. *Чуйко С. М.* Лекції з теорії імпульсних крайових задач. — Слов'янськ: Вид-во Маторіна, 2008. — 210 с.
17. *Бойчук А. А., Чуйко С. М., Чуйко Е. В.* Слабонелинейные краевые задачи с импульсным воздействием типа „interface conditions" // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 3. — С. 291 – 296.
18. *Бойчук А. А., Чуйко Е. В., Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 5. — С. 588 – 594.
19. *Чуйко С. М., Чуйко Е. В.* Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием // Доп. НАН України. — 1999. — № 6. — С. 43 – 47.

Получено 26.09.12