УДК 517.929

ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ ДО РЕГУЛЯРНО І СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

М. О. Перестюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

І. І. Клевчук

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
Україна, 58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

We consider a singularly perturbed system of differential-difference equations. We obtain a representation of an integral manifold of this system. The averaging method is applied for studying periodic solutions of a conservative system with small delay. We use the second approximation in the averaging method to study stability of a system of weakly coupled oscillators with time delay. A sufficient stability (instability) condition is obtained for a linear system of differential-difference equations.

Рассматривается система сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений. Получено представление интегрального многообразия этой системы. Метод усреднения применяется к исследованию периодических решений консервативной системы с малым запаздыванием. Второе приближение в методе усреднения применено к исследованию устойчивости системы слабосвязанных осцилляторов с запаздыванием. Получено достаточное условие устойчивости (неустойчивости) линейной системы дифференциально-разностных уравнений.

1. Побудова інтегрального многовиду сингулярно збуреної системи. Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \\ \varepsilon\frac{dy}{dt} &= G(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon P(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \end{aligned} \tag{1}$$

де ε — малий додатний параметр, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Припустимо, що виконуються умови:

1) для всіх $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$ рівняння $G(t, x, y, y) = 0$ має ізольований розв'язок $y = \varphi(t, x)$, причому функція $\varphi(t, x)$ та її похідні по t і x до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені;

2) функції $f(t, x, y, z)$, $h(t, x, y, z)$, $G(t, x, y, z)$, $P(t, x, y, z)$ та їх частинні похідні по t, x, y, z до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $|y - \varphi(t, x)| \le \rho$, $|z - \varphi(t, x)| \le \rho$.

Лінеаризуючи функцію $G(t, x, y, z)$ у точці $y = \varphi(t, x)$, $z = \varphi(t, x)$ відносно y, z, одержуємо

$$G(t, x, \varphi(t, x) + y, \varphi(t, x) + z) = B_1(t, x)y + B_2(t, x)z + G_1(t, x, y, z),$$

причому при досить малому ρ для $|y| \leq \rho$, $|z| \leq \rho$ виконується нерівність

$$|G_1(t,x,y,z)| \leq K(|y|^2 + |z|^2), \quad K > 0.$$

Нехай виконується умова:

3) всі корені характеристичного рівняння

$$\det(B_1(t,x) + B_2(t,x)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$$

лежать у півплощині $\mathrm{Re}\lambda \leq -2\alpha < 0$.

Для регулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь існування інтегральних многовидів доведено в [1], а для сингулярно збурених — в [2] та ін. Згідно з [2], при деякому $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, існує інтегральний многовид системи (1), який можна подати у вигляді $y_t = \varphi(t,x) + \xi(t,x,\varepsilon)$, де $\xi(t,x,0) = 0$. У праці [3] отримано зображення інтегрального многовиду лінійної системи. У цій статті одержано наближене зображення інтегрального многовиду нелінійної сингулярно збуреної системи більш загального вигляду, ніж у [3, 4].

Теорема 1. *Нехай для системи (1) виконуються умови 1–3. Тоді інтегральний многовид системи (1) можна зобразити у вигляді*

$$y_t = \varphi(t,x) + g(t,x,\varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

де

$$g(t,x,\varepsilon) = \varepsilon[B_1(t,x) + B_2(t,x)]^{-1}\left[(E + \Delta B_2(t,x))\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right) - \right.$$

$$\left. - P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right] + \theta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right], \ -\varepsilon\Delta \leq \theta \leq 0.$$

Доведення. Інтегральний многовид системи (1) будемо шукати у вигляді

$$y(t) = \varphi(t,x(t)) + \varepsilon\psi(t,x(t)) + O(\varepsilon^2),$$

де $\psi(t,x)$ — функція, яку ми визначимо пізніше. Тоді

$$\begin{aligned} y(t+\theta) &= \varphi(t+\theta, x(t+\theta)) + \varepsilon\psi(t,x) + O(\varepsilon^2) = \\ &= \varphi\left(t+\theta, x + \theta\frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon\psi(t,x) + O(\varepsilon^2) = \\ &= \varphi(t,x) + \theta\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \theta\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \varepsilon\psi(t,x) + O(\varepsilon^2) = \\ &= \varphi(t,x) + \theta\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \theta\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)) + \varepsilon\psi(t,x) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Звідси

$$y(t-\varepsilon\Delta) = \varphi(t,x) - \varepsilon\Delta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right] + \varepsilon\psi(t,x) + O(\varepsilon^2).$$

Тому

$$G(t,x,y(t),y(t-\varepsilon\Delta)) = G(t,x,\varphi(t,x)+\varepsilon\psi(t,x),\varphi(t,x)-$$

$$-\varepsilon\Delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \varepsilon\psi(t,x)) + O(\varepsilon^2) =$$

$$= \varepsilon B_1(t,x)\psi(t,x) + \varepsilon B_2(t,x)\psi(t,x) - \varepsilon\Delta B_2(t,x)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right) + O(\varepsilon^2).$$

Крім того,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\varphi(t,x)}{dt} + O(\varepsilon) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)) + O(\varepsilon).$$

Підставляючи знайдені вирази в систему (1) і зберігаючи тільки члени порядку ε, одержуємо

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)) = \varepsilon B_1(t,x)\psi(t,x) + \varepsilon B_2(t,x)\psi(t,x)-$$

$$-\varepsilon\Delta B_2(t,x)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right) + \varepsilon P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)),$$

звідки

$$[B_1(t,x)+B_2(t,x)]\psi(t,x) = (E+\Delta B_2(t,x))\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right) -$$

$$-P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)),$$

або

$$\psi(t,x) = (B_1(t,x)+B_2(t,x))^{-1}\times$$

$$\times\left[(E+\Delta B_2(t,x))\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right) - P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right].$$

Звідси знаходимо шуканий вираз:

$$g(t,x,\varepsilon) = \varepsilon[B_1(t,x)+B_2(t,x)]^{-1}\times$$

$$\times \left[((E + \Delta B_2(t,x)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)) \right) - \right.$$

$$\left. - P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))] + \theta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)) \right], \quad -\varepsilon\Delta \le \theta \le 0.$$

Тому інтегральний многовид системи (1) можна зобразити у вигляді

$$y_t = \varphi(t,x) + g(t,x,\varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

Теорему доведено.

Позначимо

$$\eta(t,x) = \frac{1}{\varepsilon} g(t,x,\varepsilon)|_{\theta=-\varepsilon\Delta} = [B_1(t,x) + B_2(t,x)]^{-1} \times$$

$$\times \left[(E - \Delta B_1(t,x)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)) \right) - P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)) \right].$$

Тоді рівняння на многовиді системи (1) набере вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\varphi(t,x) + \varepsilon\psi(t,x),\varphi(t,x) + \varepsilon\eta(t,x)) + \varepsilon h(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)) + O(\varepsilon^2).$$

2. Періодичні коливання в автономних рівняннях з малим запізненням. Розглянемо сингулярно збурену систему

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = f(x(t),y(t),y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(x(t),y(t),y(t-\varepsilon\Delta)), \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} = G(x(t),y(t),y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon P(x(t),y(t),y(t-\varepsilon\Delta)), \end{gathered} \tag{2}$$

де ε — малий додатний параметр, Δ — фіксоване додатне число, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Нехай виконуються такі умови:

1) для всіх $x \in \mathbb{R}$ рівняння $G(x,y,y) = 0$ має ізольований розв'язок $y = \varphi(x)$, причому функція $\varphi(x)$ та її похідні по x до третього порядку включно рівномірно неперервні й обмежені;

2) функції $f(x,y,z)$, $h(x,y,z)$, $G(x,y,z)$, $P(x,y,z)$ і їх частинні похідні по x, y, z до третього порядку включно рівномірно неперервні й обмежені при $x \in \mathbb{R}$, $|y - \varphi(x)| \le \rho$, $|z - \varphi(x)| \le \rho$.

Лінеаризуючи функцію $G(x,y,z)$ у точці $y = \varphi(x)$, $z = \varphi(x)$ відносно y, z, одержуємо $G(x, y + \varphi(x), z + \varphi(x)) = B_1(x)y + B_2(x)z + G_1(x,y,z)$, де $G_1(x,y,z) = O(|y|^2 + |z|^2)$ при $|y| + |z| \to 0$.

Нехай виконується умова:

3) всі корені характеристичного рівняння $\det(B_1(x) + B_2(x)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$ лежать у півплощині $\operatorname{Re}\lambda \le -2\alpha < 0$.

Тоді згідно з теоремою 1 інтегральний многовид системи (2) можна зобразити у вигляді

$$y_t = \varphi(x) + \varepsilon\Psi(x,z) + \theta z \frac{d\varphi(x)}{dx} + O(\varepsilon^2), \quad -\varepsilon\Delta \le \theta \le 0,$$

де

$$\Psi(x,z) = (B_1(x)+B_2(x))^{-1}\left[z(E+\Delta B_2(x))\frac{d\varphi}{dx} - P(x,\varphi(x),\varphi(x))\right].$$

Позначимо $\eta(x,z) = \Psi(x,z) - \Delta z \dfrac{d\varphi}{dx}$. Тоді рівняння на многовиді системи (2) наберуть вигляду

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = f(x,\varphi(x)+\varepsilon\Psi(x,z),\varphi(x)+\varepsilon\eta(x,z)) + \varepsilon h(x,\varphi(x),\varphi(x)) + O(\varepsilon^2). \qquad (3)$$

Підставляючи $z = \dfrac{dx}{dt}$ у друге рівняння системи (3), одержуємо рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x,\varphi(x)+\varepsilon\Psi\left(x,\frac{dx}{dt}\right),\varphi(x)+\varepsilon\eta\left(x,\frac{dx}{dt}\right)\right) + \varepsilon h(x,\varphi(x),\varphi(x)) + O(\varepsilon^2). \qquad (4)$$

Рівняння (4) зведемо до вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q(x) = \varepsilon Q\left(x,\frac{dx}{dt},\varepsilon\right), \qquad (5)$$

де

$$q(x) = -f(x,\varphi(x),\varphi(x)),$$

$$Q(x,y,\varepsilon) = \Psi(x,y)\left.\frac{\partial f(x,y,\varphi(x))}{\partial y}\right|_{y=\varphi(x)} + \eta(x,y)\left.\frac{\partial f(x,\varphi(x),z)}{\partial z}\right|_{z=\varphi(x)} + h(x,\varphi(x),\varphi(x)) + O(\varepsilon).$$

Нехай рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q(x) = 0 \qquad (6)$$

має періодичний розв’язок

$$x = z(\psi,a), \quad z(\psi+2\pi,a) = z(\psi,a), \quad \psi = w(a)t + \varphi, \qquad (7)$$

де стала a належить деякому інтервалу, φ — довільна стала.

Дослідженню рівняння (5) присвячено праці М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського [5], І. Г. Малкіна [6], А. М. Самойленка [7] та ін. У цій статті за допомогою методу усереднення [5] встановлено існування періодичних розв’язків рівняння (5). Ці результати застосовано до рівнянь із запізненням. Метод усереднення застосовано також до дослідження стійкості систем із запізненням.

Виконаємо у рівнянні (5) заміну

$$x = z(\psi, a), \quad \frac{dx}{dt} = w(a)z'_\psi(\psi, a). \tag{8}$$

Врахувавши співвідношення $w^2(a)z''_{\psi^2} + q(z) = 0$, рівняння (5) зведемо до стандартної форми

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{D(a)} Q(z, wz'_\psi, \varepsilon)z'_\psi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = w(a) - \frac{\varepsilon}{D(a)} Q(z, wz'_\psi, \varepsilon)z'_a,$$

де $D(a) = -wz'_a z''_{\psi^2} + z'_\psi(wz'_\psi)'_a$.

Поділивши в цій системі перше рівняння на друге, отримаємо

$$\frac{da}{d\psi} = \frac{\varepsilon}{D(a)w(a)} Q(z, wz'_\psi, \varepsilon)z'_\psi + O(\varepsilon^2). \tag{9}$$

Поставимо у відповідність рівнянню (9) усереднене рівняння $\dfrac{da_1}{d\psi} = \varepsilon G(a_1)$, де

$$G(a) = \frac{\Phi(a)}{D(a)w(a)}, \quad \Phi(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(z(\psi, a), w(a)z'_\psi(\psi, a), 0)z'_\psi(\psi, a)\, d\psi.$$

Теорема 2. *Нехай для системи (2) виконуються умови 1–3. Припустимо, що рівняння (6) має періодичний розв'язок (7) для* a, *що належать деякому околу значення* $\bar{a}$. *Якщо* $\Phi(\bar{a}) = 0$, $D(\bar{a}) \neq 0$, $w(\bar{a}) \neq 0$, $G'(\bar{a}) \neq 0$, *то система (2) має цикл з періодом, близьким до* $2\pi/w(\bar{a})$. *Цей цикл буде стійким, якщо* $G'(\bar{a}) < 0$, *і нестійким, якщо* $G'(\bar{a}) > 0$.

Для доведення досить застосувати до рівняння (9) другу теорему Боголюбова про усереднення на нескінченному інтервалі [5].

Дослідимо періодичні коливання в рівнянні [8]

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + H(x(t), x(t-\varepsilon)) = 0, \tag{10}$$

де ε — малий додатний параметр, функція $H(x, y)$ тричі неперервно диференційовна при $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Позначимо

$$q(x) = H(x, x), \quad g(x) = \left.\frac{\partial H(x, y)}{\partial y}\right|_{y=x}.$$

Тоді

$$H(x(t), x(t-\varepsilon)) = H(x(t), x(t) - \varepsilon\frac{dx(t)}{dt} + O(\varepsilon^2)) = q(x(t)) - \varepsilon g(x(t))\frac{dx(t)}{dt} + O(\varepsilon^2).$$

Підставляючи в рівняння (10), одержуємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q(x) = \varepsilon g(x)\frac{dx}{dt} + O(\varepsilon^2).$$

Це рівняння з точністю до $O(\varepsilon^2)$ зводиться до вигляду (5), причому $Q(x, y, \varepsilon) = g(x)y + O(\varepsilon)$. Нехай рівняння (6) має періодичний розв'язок (7) для a, що належать деякому околу значення $\bar{a}$. Виконавши у рівнянні (10) заміну (8), можна одержати рівняння вигляду (9). Застосовуючи до цього рівняння другу теорему Боголюбова про усереднення на нескінченному інтервалі [5], переконуємось, що при $\Phi_1(\bar{a}) = 0$, $D(\bar{a}) \neq 0$, $w(\bar{a}) \neq 0$, $G_1'(\bar{a}) \neq 0$ система (2) має цикл з періодом, близьким до $2\pi/w(\bar{a})$. Цей цикл буде стійким, якщо $G_1'(\bar{a}) < 0$, і нестійким, якщо $G_1'(\bar{a}) > 0$. Тут позначено

$$G_1(a) = \frac{\Phi_1(a)}{D(a)}, \quad \Phi_1(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(z(\psi, a))(z_\psi'(\psi, a))^2\, d\psi.$$

Як приклад розглянемо рівняння (10) з функцією $H(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + my^3 + \delta y - \gamma x$, де $a + b + c + m = 1$, $\gamma - \delta = 1$. Тоді рівняння (10) зводиться до вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 - x = \varepsilon\delta\frac{dx}{dt} + \varepsilon\beta x^2\,\frac{dx}{dt} + O(\varepsilon^2), \tag{11}$$

де $\beta = b + 2c + 3m$. При $\varepsilon = 0$ це рівняння має періодичний розв'язок

$$x = z(\psi, k) = \sqrt{\frac{2}{2 - k^2}}\,\mathrm{dn}\,\frac{K\psi}{\pi}, \quad \psi = \frac{\pi t}{K\sqrt{2 - k^2}}, \quad w(k) = \frac{\pi}{K\sqrt{2 - k^2}},$$

де k — модуль еліптичної функції, K — повний еліптичний інтеграл.

Згідно з аналогом теореми 2 умова існування періодичних розв'язків рівняння (11) набере вигляду

$$\delta F_1(k) + \beta F_2(k) = 0, \tag{12}$$

де

$$F_1(k) = 2(2 - k^2)^{-3/2}\int\limits_0^{2K}(d')^2\, du, \quad F_2(k) = 4(2 - k^2)^{-5/2}\int\limits_0^{2K} d^2(d')^2 du.$$

Тут позначено $d = \mathrm{dn}\, u$. Для обчислення $F_1(k)$ використаємо рівність $\int_0^{2K}\mathrm{dn}^2u\, du = 2E$, де E — повний еліптичний інтеграл другого роду. Застосовуючи формули для похідних функції $d = \mathrm{dn}\, u$, одержуємо

$$(d^2)'' = 2(1 - d^2)(d^2 + k^2 - 1) + 2d^2(2 - 2d^2 - k^2).$$

Оскільки

$$\int\limits_0^{2K}(\mathrm{d}^2)''\, du = 0,$$

то

$$\int_0^{2K} d^4\,du = \frac{4}{3}\,E(2-k^2) - \frac{2}{3}K(1-k^2),$$

отже,

$$F_1(k) = 2(2-k^2)^{-3/2}\int_0^{2K}(2d^2 - d^4 + k^2 - 1 - d^2k^2)\,du =$$

$$= \frac{4}{3}\,[(2-k^2)E + 2(k^2-1)K](2-k^2)^{-3/2}.$$

Оскільки $\int_0^{2K}(\mathrm{d}^4)''\,du = 0$, то, інтегруючи рівність

$$(d^4)'' = 16(2-k^2)d^4 + 12(k^2-1)\,d^2 - 20d^6$$

в межах від 0 до $2K$, отримуємо

$$\int_0^{2K} d^6\,dt = \frac{1}{15}\,[E(16k^4 + 46 - 46k^2) + 8K(1-k^2)(k^2-2)],$$

звідки

$$F_2(k) = \frac{8}{15}\,[2(1-k^2+k^4)E + (k^2-2)(1-k^2)K](2-k^2)^{-5/2}.$$

Із рівності (12) знаходимо $\frac{\beta}{\delta} = -\frac{F_1(k)}{F_2(k)}$. При збільшенні модуля k від 0 до 1 функція $\frac{F_1(k)}{F_2(k)}$ монотонно зростає, причому $\lim_{k\to 1-0}\frac{F_1(k)}{F_2(k)} = \frac{5}{4}$, $\lim_{k\to 0+0}\frac{F_1(k)}{F_2(k)} = 1$. Отже, якщо $-\frac{5}{4} < \frac{\beta}{\delta} < -1$, то при малих значеннях $\varepsilon > 0$ існує періодичний розв'язок рівняння (11) та відповідного йому рівняння (10). Внаслідок симетрії рівняння (11) існує ще один періодичний розв'язок з протилежним знаком.

3. Дослідження стійкості лінійних систем із запізненням. Розглянемо систему слабкозв'язаних осциляторів із запізненням

$$y'' + L^2y + \varepsilon P(t)y(t-h) = 0, \tag{13}$$

де ε — малий додатний параметр, $y = (y_1,\ldots,y_q)^T$, L — діагональна матриця з додатними різними діагональними елементами, $L = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_q\}$, $\lambda_s > 0$, $\lambda_k \neq \lambda_s$ при $k \neq s$, $h > 0$, $P(t)$ — матриця з елементами

$$P_{js}(t) = \sum_{m=1}^{n}(b_{jsm}e^{ia_mt} + \bar{b}_{jsm}e^{-ia_mt}), \quad b_{jsm}\in\mathbb{C}, \quad a_m \geq 0.$$

Стійкість розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку вивчалась у багатьох роботах (див., наприклад, [1, 9, 10]). Далі використаємо методику з цих робіт і знайдемо умови стійкості системи (13) у термінах її коефіцієнтів. Друге наближення в методі усереднення застосуємо для дослідження стійкості розв'язків лінійної системи.

Систему (13) запишемо у вигляді

$$y_j'' = -\lambda_j^2 y_j - \varepsilon \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t) y_s(t-h), \quad j \in \{1, \ldots, q\}.$$

Позначимо $z_j = y_j'/\lambda_j$, тоді одержимо систему

$$y_j' = \lambda_j z_j, \quad z_j' = -\lambda_j y_j - \frac{\varepsilon}{\lambda_j} \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t) y_s(t-h).$$

Перейдемо до комплексних змінних $u_j = y_j + iz_j$, тоді

$$u_j' = -i\lambda_j u_j - \frac{\varepsilon i}{2\lambda_j} \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t)(u_s(t-h) + \bar{u}_s(t-h)).$$

Виконавши заміну $u_j = x_j \exp(-i\lambda_j t)$, одержимо систему в стандартній формі

$$x' = \varepsilon F(t) x(t-h) + \varepsilon G(t) \bar{x}(t-h), \tag{14}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_q)^T$, $F(t)$ та $G(t)$ — матриці з елементами

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j - \lambda_s)t} e^{i\lambda_s h}, \quad G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j + \lambda_s)t} e^{-i\lambda_s h}$$

відповідно.

Позначимо $c_j = b_{jj1} + \bar{b}_{jj1}$.

Теорема 3 [11]. *Нехай $a_1 = 0$, $a_m > 0$ при $m \geq 2$ і немає резонансу, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq 0$ при $|j - s| + |m - 1| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$ для всіх j, s, m. Тоді нульовий розв'язок системи (13) асимптотично стійкий, якщо $c_j \sin(\lambda_j h) < 0$ при $j \in \{1, \ldots, q\}$, і нестійкий, якщо існує k, для якого $c_k \sin(\lambda_k h) > 0$.*

Стійкість розв'язків системи (13) рівносильна стійкості розв'язків системи (14). Тому для доведення теореми 3 можна застосувати метод усереднення [12].

Нехай тепер $a_m > 0$ для всіх m. Тоді перше наближення в методі усереднення не дає відповіді на питання про стійкість. Отже, потрібно застосувати друге наближення.

Позначимо $d_s = \mathrm{Re}\{\delta_s\}$,

$$\delta_s = \sum_{k=1}^{q} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{b_{skm} \bar{b}_{ksm} \exp(i(2\lambda_s + a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} + \frac{\bar{b}_{skm} b_{ksm} \exp(i(2\lambda_s - a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)} \right).$$

У випадку симетричної матриці $P(t)$ маємо $b_{ksm} = b_{skm}$, отже,

$$d_s = \sum_{k=1}^{q} \sum_{m=1}^{n} |b_{skm}|^2 \left(\frac{\sin((2\lambda_s + a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} + \frac{\sin((2\lambda_s - a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)} \right).$$

Теорема 4 [11]. *Нехай $a_m > 0$ для всіх m і немає резонансу, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$ при $|j - s| + |m - k| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m + a_k \neq 0$ для всіх j, s, m, k. Тоді нульовий розв'язок системи (13) асимптотично стійкий, якщо $d_s > 0$ при $s \in \{1, \ldots, q\}$, і нестійкий, якщо існує k, для якого $d_k < 0$.*

Розглянемо систему

$$x' = \varepsilon F(t) x(t - h), \tag{15}$$

де ε — малий додатний параметр, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}^p$, $F(t) = \sum_{m=1}^{n} (A_m e^{ib_m t} + \overline{A}_m e^{-ib_m t})$, b_m — дійсні додатні різні числа, A_m — матриці з комплексними елементами.

У системі (15) виконаємо заміну $x(t) = \xi(t) + \varepsilon \tilde{F}(t) \xi(t)$, де

$$\tilde{F}(t) = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{ib_m} A_m e^{ib_m t} - \frac{1}{ib_m} \overline{A}_m e^{-ib_m t} \right).$$

Тоді $x(t - h) = \xi - h\xi' + \varepsilon \tilde{F}(t - h)\xi + O(\varepsilon^2) = \xi + \varepsilon \tilde{F}(t - h)\xi + O(\varepsilon^2)$, оскільки $\xi' = O(\varepsilon^2)$. Підставляючи в систему (15), одержуємо

$$\xi' + \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon \tilde{F}(t)\xi' = \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon^2 F(t) \tilde{F}(t - h)\xi + O(\varepsilon^3),$$

або

$$\xi' = \varepsilon^2 F(t) \tilde{F}(t - h)\xi + O(\varepsilon^3). \tag{16}$$

До системи (16) можна ще раз застосувати метод усереднення [7] і одержати усереднену систему $\xi' = \varepsilon^2 B \xi$, де $B = -\sum_{m=1}^{n} \dfrac{1}{b_m} \sin(b_m h)(A_m \overline{A}_m + \overline{A}_m A_m)$.

Теорема 5 [11]. *Якщо всі власні значення матриці B мають від'ємні дійсні частини, то система (15) асимптотично стійка, а якщо існує власне значення матриці B з додатною дійсною частиною, то система (15) нестійка.*

Доведення теореми випливає з теореми Хейла про усереднення [12]. Якщо існують власні значення матриці B з нульовою та додатною дійсними частинами, то треба використати схему доведення теореми про стійкість за першим наближенням.

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
2. *Митропольский Ю. А., Фодчук В. И., Клевчук И. И.* Интегральные многообразия, устойчивость и бифуркация решений сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. — 1986. — **38**, № 3. — С. 335 – 340.

3. *Клевчук І. І.* Біфуркація стану рівноваги сингулярно збуреної системи із загаюванням // Укр. мат. журн. — 1995. — **47**, № 8. – С. 1022 – 1028.

4. *Клевчук І. І.* Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 4. — С. 563 – 567.

5. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1971. — 440 с.

6. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехтеориздат, 1956. — 491 с.

7. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

8. *Долгий Ю. Ф., Захаров А. В.* Периодические колебания в консервативных системах с малым запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 2005. — **41**, № 10. — С. 1299 – 1309.

9. *Фодчук В. І., Клевчук І. І.* Розщеплення лінійних диференціально-функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1986. — № 8. — С. 23 – 25.

10. *Клевчук И. И.* О принципе сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. — 1999. — **35**, № 4. — С. 464 – 472.

11. *Клевчук І. І.* Застосування методу усереднення до дослідження стійкості диференціально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 3. — С. 318 – 324.

12. *Hale J. K.* Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter // J. Different. Equat. — 1966. — **2**, № 1. — P. 57 – 73.

Одержано 18.12.12