УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В. Н. Шинкаренко

Одес. эконом. ун-т

We find necessary and sufficient conditions for existence of a certain class of solutions to a differential equation with an exponential nonlinearity. An asymptotic representation for such solutions is obtained.

Встановлено необхідні і достатні умови існування одного класу розв'язків диференціального рівняння з експоненціальною нелінійністю. Отримано асимптотичні зображення таких розв'язків.

1. Формулировка основных теорем и некоторые вспомогательные утверждения. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) e^{\sigma y}, \tag{1}$$

где $n \geq 2$, $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$.

При $n = 2$ асимптотику решений уравнения (1) исследовали В.М. Евтухов и Н.Г. Дрик в работах [1–5]. В случае произвольного n в работе [6] получены условия существования и асимптотические представления решений уравнения (1) со свойством $\mathcal{P}_\omega^i$, $i \in \in \{0, \ldots, n-1\}$, т. е. удовлетворяющих условиям

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = c_i \neq 0, \ \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо} & \pm\infty, \\ \text{либо} & 0, \end{cases} \qquad k = i+1, \ldots, n-1.$$

Решение y уравнения (1) будем называть $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решением, если оно определено на некотором промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и для функции $z(t) = e^{y(t)}$ выпоняются условия:

1) $z^{(n)}(t) \neq 0$ при $t \in [t_0, \omega[$;

2) при любом $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ либо $\lim\limits_{t \uparrow \omega} z^{(k)}(t) = 0$, либо $\lim\limits_{t \uparrow \omega} z^{(k)}(t) = \pm\infty$;

3) существует конечный или равный $\pm\infty$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[z^{(n-1)}(t)]^2}{z^{(n)}(t) z^{(n-2)}(t)} = \lambda_{n-1}^0,$$

причем при $\lambda_{n-1}^0 = 1$ для любого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ либо $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \left(\dfrac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k-1)} = 0$, либо $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \left(\dfrac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k-1)} = \pm\infty$.

Среди $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(\lambda^0_{n-1})$-решений наиболее сложными для изучения являются те, для которых $\lambda^0_{n-1} = 1$. Именно таким решениям посвящена настоящая статья. Здесь для уравнения (1) будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция* $p : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ n *раз непрерывно дифференцируема и такова, что*

$$\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)} \neq 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k-1)} = \begin{cases} \textit{либо } 0, \\ \textit{либо } \pm\infty \end{cases} \qquad k = 1,\ldots,n-1. \tag{2}$$

Тогда для существования $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$*-решений уравнения* (1)*, для каждого из которых существует конечный или равный* $\pm\infty$ *предел* $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{y^{(n)}(t)}$*, необходимо, чтобы*

$$\alpha_0\sigma\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)} < 0 \quad \textit{при } t \in [a,\omega[\tag{3}$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k)}}{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{k+1}} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k)}}{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k-1)}\frac{p'(t)}{p(t)}} = 0, \quad k = 1,\ldots,n-1. \tag{4}$$

Более того, любое такое решение допускает при $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$y(t) = \ln\left|\frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{\sigma p(t)}\right|^{\frac{1}{\sigma}} + o(1), \tag{5}$$

$$y^{(k)}(t) = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k-1)}[1+o(1)], \qquad k = 1,\ldots,n-1. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть функция* $p : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ $n+1$ *раз непрерывно дифференцируема, удовлетворяет условиям* (2)–(4) *и такова, что*

$$\int_a^\omega\left|\left(\frac{p'(s)}{p(s)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{1}{n}} ds = +\infty, \tag{7}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n)}}{\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{n+1}{n}}} = 0. \tag{8}$$

Тогда если выполняется одно из следующих условий:

$$\alpha_0\sigma > 0 \quad \textit{и} \quad n \neq 4m; \qquad \alpha_0\sigma < 0 \quad \textit{и} \quad n \neq 4m-2, \tag{9}$$

где $m \in \mathbf{N}$, *то существуют* $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$*-решения уравнения* (1), *допускающие при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления* (5) *и*

$$y^{(k)}(t) = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k-1)} + o\left(\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{k}{n}}\right), \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{10}$$

причем для каждого из них $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{y^{(n)}(t)} = -\sigma.$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 2 *и одно из следующих двух условий:*

$$\alpha_0\sigma > 0 \quad \text{и} \quad n = 4m; \qquad \alpha_0\sigma < 0 \quad \text{и} \quad n = 4m-2, \tag{11}$$

где $m \in \mathbf{N}$. *Тогда если*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n)} I^2(t)}{\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{n+1}{n}}} = 0, \quad I(t) = \int\limits_a^t \left|\left(\frac{p'(s)}{p(s)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{1}{n}} ds, \tag{12}$$

то существуют $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$*-решения уравнения* (1), *допускающие при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления* (5) *и* (6) *с уточнениями вида*

$$y(t) = \ln\left|\frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{\sigma p(t)}\right|^{\frac{1}{\sigma}} + o\left(\frac{1}{I(t)}\right), \tag{13}$$

$$y^{(k)}(t) = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k-1)} + o\left(I^{-1}(t)\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{k}{n}}\right), \; k = 1, \ldots, n-1, \tag{14}$$

причем для каждого из них

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{y^{(n)}(t)} = -\sigma.$$

При доказательстве сформулированных теорем будут использованы приведенные ниже вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (см. лемму 2.2 из [7]). *Пусть функция* $f : [\alpha, \omega[\times(A, B) \longrightarrow \mathbf{R}(-\infty < \alpha < < \omega \le +\infty, -\infty < \mathbf{A} < \mathbf{B} \le +\infty)$ *непрерывна и такова, что для любого* $c \in (A, B)$, *за возможным исключением не более чем счетного множества значений,* $f(t, c)$ *является знакоопределенной на некотором промежутке* $[t_c, \omega[\subset [\alpha, \omega[$. *Тогда любое решение* z *дифференциального уравнения*

$$z' = f(t, z),$$

заданное в левой окрестности ω, имеет конечный или равный $\pm\infty$ предел при $t \uparrow \omega$.

Лемма 2 (см. лемму 10.3 из [8]). *Пусть y(t) является $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$-решением уравнения (1). Тогда при $k = 2, \dots, n$ выполняются условия*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{z^{(k)}(t) z^{(k-2)}(t)}{[z^{(k-1)}(t)]^2} = 1.$$

Лемма 3. *Пусть y(t) является $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$-решением уравнения (1). Тогда при $k = 1, 2, \dots, n-1$ выполняются условия*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)}}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k+1)}} = 0.$$

Справедливость леммы 3 непосредственно следует из леммы 2 и формулы нахождения k-й производной ($k \geq 2$) частного двух функций (см. [9, с. 49], гл. 1, §3,).

2. Доказательство основных теорем. ***Доказательство теоремы 1.*** Пусть $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$ — произвольное $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$-решение уравнения (1), для которого существует конечный или равный $\pm\infty$ $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{y^{(n)}(t)}$. Тогда функция $z(t) = e^{y(t)}$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{z'}{z}\right)^{(n-1)} = \alpha_0\, p(t)\, z^\sigma, \tag{15}$$

условиям 1 – 3 определения $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$-решения и для нее существует конечный или равный $\pm\infty$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(n-1)}}. \tag{16}$$

Кроме того, в силу леммы 2 имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{z^{(k)}(t) z^{(k-2)}(t)}{[z^{(k-1)}(t)]^2} = 1, \quad k = 2, \dots, n. \tag{17}$$

Отсюда с учетом тождества

$$\frac{z^{(k)}(t) z^{(k-2)}(t)}{[z^{(k-1)}(t)]^2} \equiv \frac{\left(\frac{z^{(k-1)}(t)}{z^{(k-2)}(t)}\right)'}{\left[\frac{z^{(k-1)}(t)}{z^{(k-2)}(t)}\right]^2} + 1, \quad k = 2, \dots, n,$$

и второго из условий определения $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$-решения следует

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\frac{z^{(k-1)}(t)}{z^{(k-2)}(t)}\right)'}{\left[\frac{z^{(k-1)}(t)}{z^{(k-2)}(t)}\right]^2} = 0, \ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) z^{(k-1)}(t)}{z^{(k-2)}(t)} = \pm\infty, \quad k = 2, \dots, n, \tag{18}$$

где $\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = \infty, \\ t - \omega, & \text{если } \omega < \infty. \end{cases}$

Использовав эти факты, установим сначала, что для функции

$$u_n(t) = \frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(n)}}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(n-1)} \frac{z'(t)}{z(t)}} \tag{19}$$

существует конечный или равный $\pm\infty$ предел при $t \uparrow \omega$. Действительно, в силу (15)

$$u_n(t) = \frac{\frac{p'(t)}{p(t)} + \sigma \frac{z'(t)}{z(t)}}{\frac{z'(t)}{z(t)}} = \frac{\frac{p'(t)}{p(t)}}{\frac{z'(t)}{z(t)}} + \sigma. \tag{20}$$

Кроме того, в силу условий (2) и существования предела (16) на основании правила Лопиталя получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{p'(t)}{p(t)}}{\frac{z'(t)}{z(t)}} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)'}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)'} = \ldots = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(n-1)}}. \tag{21}$$

Значит,

$$\lim_{t\uparrow\omega} u_n(t) = \sigma + \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(n-1)}}. \tag{22}$$

Введем теперь функции $u_k,\ k = 1, \ldots, n-1$, положив

$$u_k(t) = \frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)}}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k-1)} \frac{z'(t)}{z(t)}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Для каждой такой функции имеем

$$u'_k(t) =$$

$$= \frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k+1)}}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k-1)} \frac{z'(t)}{z(t)}} - \frac{\left[\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)}\right]^2}{\left[\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k-1)}\right]^2 \frac{z'(t)}{z(t)}} - \frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)} \left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)'}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k-1)} \left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)}}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k-1)}} \left[\frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k+1)}}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)} \frac{z'(t)}{z(t)}} - \frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)}}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k-1)} \frac{z'(t)}{z(t)}} - \frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)'}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^2} \right],$$

т. е. для $k = 1, \ldots, n-1$

$$u_k'(t) = \frac{z'(t)}{z(t)}\, u_k(t) \left[u_{k+1}(t) - u_k(t) - \frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)'}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^2} \right] \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[. \tag{23}$$

Здесь в силу первого из условий (18) (при $k = 2$)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)'}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^2} = 0. \tag{24}$$

Поэтому если при некотором $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ существует конечный или равный $\pm\infty$ $\lim\limits_{t \uparrow \omega} u_{k+1}(t)$, то для любого $c \in \mathbf{R}$, за возможным исключением не более чем двух значений, функция

$$f(t, c) = \frac{z'(t)}{z(t)} c \left[u_{k+1}(t) - c - \frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)'}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^2} \right]$$

сохраняет знак в некоторой левой окрестности ω. Но тогда согласно лемме 1 каждое решение уравнения (23), определенное в левой окрестности ω, а значит и $u_k(t)$, имеет конечный или равный $\pm\infty$ предел при $t \uparrow \omega$. Отсюда с учетом установленного выше существования предела (22) следует, что при любом $k \in \{1, \ldots, n\}$ для функции u_k существует конечный или равный $\pm\infty$ предел при $t \uparrow \omega$. Остается лишь доказать, что этим пределом может быть только 0. Чтобы в этом убедиться, предварительно при фиксированном $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ установим предельное соотношение

$$\lim_{t \uparrow \omega} u_k(t) = \lim_{t \uparrow \omega} u_{k+1}(t). \tag{25}$$

Допустим, что это не так, и рассмотрим три возможных случая: 1) $\lim\limits_{t \uparrow \omega} u_k(t) = \pm\infty$, 2) $\lim\limits_{t \uparrow \omega} u_k(t) = c = \text{const} \neq 0$, 3) $\lim\limits_{t \uparrow \omega} u_k(t) = 0$.

1) $\lim\limits_{t \uparrow \omega} u_k(t) = \pm\infty$. В этом случае из (23) следует, что при некотором $t_1 \in [t_0, \omega[$ и $c_1 \neq 0$, где $\operatorname{sign} c_1 = \operatorname{sign} z'(t)$, при $t \in [t_1, \omega[$ выполняется одно из неравенств

$$u_k'(t) > \frac{c_1 z'(t)}{z(t)} u_k^2(t), \quad u_k'(t) < -\frac{c_1 z'(t)}{z(t)} u_k^2(t).$$

После деления этих неравенств на $u_k^2(t)$ и интегрирования на промежутке от t_1 до t ($t < \omega$) получаем либо

$$\frac{1}{u_k(t_1)} - \frac{1}{u_k(t)} > c_1 \ln \frac{z(t)}{z(t_1)},$$

либо

$$\frac{1}{u_k(t_1)} - \frac{1}{u_k(t)} < -c_1 \ln \frac{z(t)}{z(t_1)}.$$

Поскольку $z(t) > 0$ и согласно определению $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$-решения либо $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z(t) = 0$ $(c_1 < 0)$, либо $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z(t) = +\infty$ $(c_1 > 0)$, при $t \uparrow \omega$ выражение, стоящее справа в первом неравенстве, стремится к $+\infty$, а во втором — к $-\infty$. Но это противоречит тому, что в них выражения, стоящие слева, в силу условия 1 имеют конечный предел при $t \uparrow \omega$.

2) $\lim\limits_{t\uparrow\omega} u_k(t) = c = \mathrm{const} \neq 0$. В этом случае из (23) следует, что существуют такие $t_1 \in [t_0, \omega[$ и $c_1 \neq 0$, где $\operatorname{sign} c_1 = \operatorname{sign} z'(t)$, что при $t \in [t_1, \omega[$ выполняется одно из неравенств вида

$$u_k'(t) > \frac{c_1 z'(t)}{z(t)}, \quad u_k'(t) < -\frac{c_1 z'(t)}{z(t)}.$$

Отсюда после интегрирования на промежутке от t_1 до t $(t < \omega)$ соответственно получим

$$u_k(t) - u_k(t_1) > c_1 \ln \frac{z(t)}{z(t_1)} \quad \text{либо} \quad u_k(t) - u_k(t_1) < c_1 \ln \frac{z(t)}{z(t_1)}.$$

Здесь выражение, стоящее справа в первом неравенстве, стремится при $t \uparrow \omega$ к $+\infty$, а во втором — к $-\infty$, что противоречит условию 2, в силу которого выражения, стоящие в этих неравенствах слева, имеют конечный предел при $t \uparrow \omega$.

3) $\lim\limits_{t\uparrow\omega} u_k(t) = 0$. При этом условии в силу (23) найдутся такие $t_1 \in [t_0, \omega[$ и $c_1 \neq$ $\neq 0$ $(\operatorname{sign} c_1 = \operatorname{sign} z'(t) u_k(t))$, что на промежутке $[t_1, \omega[$ будет выполняться одно из неравенств

$$u_k'(t) > c_1 \frac{z'(t)}{z(t)} u_k(t) \quad \text{либо} \quad u_k'(t) < c_1 \frac{z'(t)}{z(t)} u_k(t),$$

или с учетом вида функции u_k одно из неравенств

$$u_k'(t) > c_1 \frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)}}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k-1)}} \quad \text{либо} \quad u_k'(t) < c_1 \frac{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)}}{\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k-1)}}.$$

Интегрируя эти неравенства на промежутке от t_1 до t $(t < \omega)$, получаем

$$u_k(t) - u_k(t_1) > c_1 \ln \left| \left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k-1)} \right|, \ u_k(t) - u_k(t_1) < c_1 \ln \left| \left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k-1)} \right|.$$

Здесь в силу третьего из условий определения $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$-решения и знака c_1 выражения, стоящие справа, стремятся при $t \uparrow \omega$ соответственно к $+\infty$ и $-\infty$, что невозможно, поскольку выражения, стоящие слева, имеют конечный предел при $t \uparrow \omega$.

Полученные противоречия приводят к выводу, что предположение о выполнении неравенства $\lim\limits_{t\uparrow\omega} u_k(t) \neq \lim\limits_{t\uparrow\omega} u_{k+1}(t)$ было неверным. Значит, при любом $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ имеет место предельное соотношение (25). А поскольку согласно (24) $\lim\limits_{t\uparrow\omega} u_1(t) = 0$, отсюда следует

$$\lim_{t\uparrow\omega} u_k(t) = 0 \quad \text{для любого} \quad k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{26}$$

В силу (26) при $k = n$ из (20) и (21) при $t \uparrow \omega$ получаем представления вида

$$\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k-1)} = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k-1)}[1+o(1)], \quad k = 1,\dots,n, \tag{27}$$

которым ввиду того, что $z(t) = e^{y(t)}$, соответствуют асимптотические представления (6).

Кроме того, из (15) с учетом (27) при $k = n$ имеем

$$-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}[1+o(1)] = \alpha_0 p(t) z^{\sigma} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

или

$$z^{\sigma}(t) = -\frac{\alpha_0}{\sigma}\frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{p(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $z(t) = e^{y(t)}$, получаем знаковое условие (3) и асимптотическое представление (5). Условия (4) непосредственно следуют из (26) и леммы 3, если учесть асимптотические представления (27).

Теорема доказана.

Доказательство теорем 2 и 3. Сначала покажем, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{k}{n}}}{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k-1)}} = 0 \quad \text{для любого} \quad k \in \{1,\dots,n-1\}. \tag{28}$$

Положим

$$z_{n-1}(t) = \frac{\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{n-1}{n}}}{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-2)}}.$$

Тогда с учетом знакового условия (3) получим

$$z'_{n-1}(t) = \frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-2)}}\left[-\frac{n-1}{n}\frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n)}}{\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{n+1}{n}}} - \frac{\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{n-1}{n}}}{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-2)}}\right],$$

или

$$z'_{n-1}(t) = -\alpha_0 \operatorname{sign}\sigma\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{1}{n}} z_{n-1}(t)\left[\frac{-(n-1)\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n)}}{n\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{n+1}{n}}} - z_{n-1}(t)\right]. \tag{29}$$

В силу (8) и (3) соответствующая (29) функция

$$f(t,c) = -\alpha_0 \mathrm{sign}\,\sigma \left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{1}{n}} c \left[-\frac{n-1}{n}\frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n)}}{\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{n+1}{n}}} - c\right]$$

для каждого вещественного $c \neq 0$ сохраняет знак в некоторой левой окрестности ω. Поэтому согласно лемме 1 функция z_{n-1} имеет конечный или равный $\pm\infty$ предел при $t \uparrow \omega$. Если бы этот предел был равен $\pm\infty$, то из (29) ввиду условия (8) получили бы соотношение

$$\frac{z'_{n-1}(t)}{z^2_{n-1}(t)} = \alpha_0 \mathrm{sign}\,\sigma \left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{1}{n}} [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

из которого следовало бы, что

$$\frac{1}{z_{n-1}(a)} - \frac{1}{z_{n-1}(t)} = \alpha_0 \mathrm{sign}\,\sigma \int\limits_a^t \left|\left(\frac{p'(s)}{p(s)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{1}{n}} ds[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Однако это невозможно, поскольку здесь выражение, стоящее слева, имеет конечный предел при $t \uparrow \omega$, а стоящие справа — бесконечный в силу условия (7). Если же предположить, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z_{n-1}(t) = c = \mathrm{const} \neq 0$, то из (29) будем иметь

$$z'_{n-1}(t) = \alpha_0 c^2 \mathrm{sign}\,\sigma \left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{1}{n}} [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда после интегрирования на промежутке от a до t $(t < \omega)$ также получим противоречивое соотношение. Значит, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z_{n-1}(t) = 0$.

Установив справедливость (28) при $k = n-1$, заметим, учитывая условия (2), что если $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-2)} = 0$, то и $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)} = 0$. Если же $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-2)} = \pm\infty$, то при $\omega = +\infty$ для любого $k \in \{1,\dots,n-2\}$ также имеем $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k-1)} = \pm\infty$. При $\omega < +\infty$ из условия (8) следует асимптотическое соотношение

$$\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{-\frac{1}{n}} = c + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где c — некоторая постоянная, которое не противоречит (7) лишь при $c = 0$. Отсюда следует, что при $\omega < +\infty$ $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)} = \pm\infty$, и поэтому ввиду (4) $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k-1)} = \pm\infty$ для любого $k \in \{1,\dots,n\}$.

В силу изложенного выше, при вычислении предела (28) для каждого $k \in \{1, \dots, n-2\}$ имеем либо неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, либо случай, когда знаменатель имеет равный $\pm\infty$ предел при $t \uparrow \omega$. Следовательно, допустимо применение правила Лопиталя в форме Штольца. Применяя его, получаем предельное рекуррентное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{k}{n}}}{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k-1)}} = -\alpha_0 \operatorname{sign}\sigma \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{k+1}{n}}}{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k)}} \frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n)}}{\left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{n+1}{n}}}$$

при $k \in \{1, \dots, n-2\}$.

Из него с учетом (8) и установленного при $k = n-1$ предельного соотношения (28) следует справедливость (28) при любом $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Теперь, применяя к уравнению (1) преобразование

$$\tau(t) = \int\limits_a^t \left|\left(\frac{p'(s)}{p(s)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{1}{n}} ds, \;\; y(t) = \ln\left|\frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{\sigma p(t)}\right|^{\frac{1}{\sigma}} + v_1(\tau),$$

$$y^{(k)}(t) = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(k-1)} + \left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{k}{n}} v_{k+1}(\tau), \;\; k = 1, \dots, n-1, \tag{30}$$

получаем, с учетом знакового условия (3), систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{q(\tau)}{\sigma} + v_2, \\ v_k' &= -\frac{k-1}{n} q(\tau) v_k + v_{k+1}, \quad k = 2, \dots, n-1, \\ v_n' &= v_1 \operatorname{sign}(\alpha_0\sigma) - \frac{n-1}{n} q(\tau) v_n + V(v_1), \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$q(\tau) = q(\tau(t)) = \frac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n)}}{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)} \left|\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}\right|^{\frac{1}{n}}},$$

$$V(v_1) = \frac{\alpha_0}{|\sigma|}\left[e^{\sigma v_1} - 1 - \sigma v_1\right].$$

Здесь в силу вида функции $\tau(t)$ и условий (7), (8) $\lim\limits_{\tau\to+\infty} q(\tau) = 0$. Кроме того, $V(0) = 0$ и $\dfrac{dV(0)}{dv_1} = 0$. Значит, система дифференциальных уравнений (31) является системой вида

(2.1) из работы [8], причем для нее предельная при $t \to +\infty$ матрица коэффициентов линейной части системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_0 \operatorname{sign} \sigma & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записав характеристическое уравнение $\det[A - \lambda E] = 0$, получим

$$\lambda^n = \alpha_0 \operatorname{sign} \sigma. \tag{32}$$

Если выполняется одно из условий (9), то это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. В этом случае на основании теоремы 2.1 работы [8] система (31) имеет хотя бы одно решение $(v_k)_{k=1}^n : [\tau_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}^n$, где t_0 — некоторая положительная постоянная, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$. Ему в силу замен (30) соответствует решение $y : [x_0, \omega[\longrightarrow \mathbf{R}$, где $x_0 \in [a, \omega[$, допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (5) и (10). Принимая во внимание эти представления, а также условия (28), (4) и лемму 3, убеждаемся в том, что это решение является $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$-решением уравнения (1), для которого $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \dfrac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{y^{(n)}(t)} = -\sigma$. Тем самым установлена справедливость теоремы 2.

Пусть теперь выполняется одно из условий (11). В этом случае характеристическое уравнение (32) заведомо имеет пару корней с нулевой действительной частью, причем эти корни являются простыми. Тогда при выполнении дополнительного условия (12) система уравнений (31) имеет согласно теореме 2.2 работы [8] по крайней мере одно решение $(v_k)_{k=1}^n : [\tau_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}^n$, где t_0 — некоторая положительная постоянная, следующего вида:

$$v_k(\tau) = o\left(\frac{1}{\tau}\right), \ k = 1, \dots, n, \quad \text{при} \quad \tau \to +\infty.$$

Этому решению в силу замен (30) соответствует решение $y : [x_0, \omega[\longrightarrow \mathbf{R}$, где $x_0 \in [a, \omega[$, допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (13) и (14). Из этих представлений, а также условий (28), (4) и леммы 3 следует, что данное решение является $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$-решением уравнения (1), для которого $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \dfrac{\left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)^{(n-1)}}{y^{(n)}(t)} = -\sigma$. Значит, справедливо утверждение теоремы 3.

Выводы. Для дифференциального уравнения (1) выделен достаточно широкий класс $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решений, отличных от решений со свойством $\mathcal{P}_\omega^i$.

В настоящей работе предложен подход, позволяющий исследовать наиболее сложные для изучения $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$-решения. При этом получены необходимые и достаточные условия существования, а также асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ таких решений и их производных до $(n-1)$-го порядка включительно.

Следует заметить, что существуют $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(1)$-решения уравнения (1) и в случаях, когда

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\, p'(t)}{p(t)} = \pm\infty, \quad \text{где } \pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = \infty, \\ t-\omega, & \text{если } \omega < \infty, \end{cases}$$

которые ранее не рассматривались.

1. *Евтухов В. М., Дрик Н. Г.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. — 1989. — **133**, № 1. — P. 29 – 32.
2. *Дрик Н. Г.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в особом случае // Дифференц. уравнения. — 1989. — **25**, № 1. — С. 1071 – 1072.
3. *Евтухов В. М., Дрик Н. Г.* Асимптотические представления решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Repts Enlarget Session Sem. I.N. Vekua Inst. Appl. Math. — 1992. — **7**, № 3. — P. 39 – 42.
4. *Дрик Н. Г.* Асимптотические поведение решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Одесса, 1992.
5. *Evtukhov V. M., Drik N. G.* Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation // Georg. Math. J. — 1996. — **3**, № 3. — P. 101 – 120.
6. *Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н.* О решениях со степенной асимптотикой дифференциальных уравнений с экспоненциальной нелинейностью // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 3. — С. 306 – 325.
7. *Евтухов В. М.* Асимптотика решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. — 1990. — **26**, № 5. — С. 776 – 787.
8. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1998.
9. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. — М.: Наука, 1965. — 424 с.

Получено 02.11.2004