УДК 517.954

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. Н. Витюк, А. В. Голушков

Одеск. нац. ун-т
Ин-т математики, экономики и механики
Украина, 65026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: Alexander VG@ukr.net

We find sufficient conditions for existence and uniqueness of a solution to a differential system with fractional order partial derivative considered on spaces of integrable functions.

Отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку системи диференціальних рівнянь з частинними похідними дробового порядку в просторах сумовних функцій.

Пусть $P = (0, a] \times (0, b]$, $0 < a, b < \infty$. Обозначим через R^n пространство n-мерных векторов, $R_+ = [0, +\infty)$. $L(P)$ — пространство интегрируемых по Лебегу функций $f : P \to R^1$ с нормой

$$\|f(x,y)\|_1 = \int_P\int |f(x,y)|dxdy.$$

Пусть $0 < \alpha, \beta \le 1$, $r = (\alpha, \beta)$. Для $f \in L(P)$ выражение

$$(I_0^r f)(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1} f(s,t)dsdt,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, назовем [1, с. 341] левосторонним смешанным интегралом Римана – Лиувилля порядка r. В частности,

$$(I_0^1 f)(x,y) = \int_0^x \int_0^y f(s,t)dsdt, (I_0^0 f)(x,y) = f(x,y) \quad \text{для почти всех} \quad (x,y) \in P.$$

Если $f_{1-r}(x,y) = (I_0^{1-r} f)(x,y)$, то смешанной дробной производной Римана – Лиувилля порядка r называем [1, с. 342] выражение $(D_0^r f)(x,y) = D_{xy} f_{1-r}(x,y)$, где $D_{xy} = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

1. Пусть $q = (\gamma, \delta)$, $q > 0$. Имеет место соотношение [1, с. 342]

$$(I_0^q I_0^r f)(x,y) = (I_0^{q+r} f)(x,y). \tag{1}$$

Рассмотрим систему

$$(D_0^{r_i} u_i)(x,y) = f_i[x, y, u(x,y)] \equiv f_i[x, y, u_1(x,y), \ldots, u_n(x,y))], \tag{2}$$

решения которой удовлетворяют условиям

$$u_{i,1-r_i}(x,0) = \varphi_i(x),\ 0 \le x \le a,$$
$$u_{i,1-r_i}(0,y) = \psi_i(y),\ 0 \le y \le b,\ \varphi(0) = \psi(0), \tag{3}$$

причем $r_i = (\alpha_i, \beta_i), 0 < \alpha_i, \beta_i \le 1, \varphi_i(x) \in AC([0,a]), \psi_i(y) \in AC([0,b]), i = \overline{1,n}.$

Вопросы существования решений задачи типа Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка в пространствах суммируемых функций рассматривались во многих работах (см., например, [2, 3]).

Настоящая работа посвящена исследованию условий существования и единственности решений задачи (2), (3) в пространствах суммируемых функций. Заметим, что аналогичная задача в пространствах непрерывных функций рассматривалась в [4].

Решением задачи (2), (3) назовем вектор-функцию $u(x,y) = (u_1(x,y), \ldots, u_n(x,y))$ такую, что $u_i(x,y)$ принадлежат $L(P)$, удовлетворяют условиям (3) и системе (2) для почти всех $(x,y) \in P$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$(D_0^r u)(x,y) = f(x,y),\ f(x,y) \in L(P), \tag{4}$$

$$u_{1-r}(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le a,$$
$$u_{1-r}(0,y) = \psi(y),\ 0 \le y \le b,\ \varphi(0) = \psi(0), \tag{5}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ абсолютно непрерывны.

Под решением задачи (4), (5) понимаем функцию $u(x,y) \in L(P)$, которая удовлетворяет условиям (5) и уравнению (4) для почти всех $(x,y) \in P$.

Лемма 1. *Для того чтобы функция $u(x,y) \in L(P)$ была решением задачи (4), (5), необходимо и достаточно, чтобы $u(x,y)$ для почти всех $(x,y) \in P$ удовлетворяла уравнению*

$$u(x,y) = \mu(x,y) + (I_0^r f)(x,y), \tag{6}$$

где

$$\mu(x,y) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(I_0^\beta \dot{\psi})(y) + \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(I_0^\alpha \dot{\varphi})(x) + \frac{x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\varphi(0)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

(точкой обозначаем дифференцирование).

Доказательство. Пусть $u(x,y) \in L(P)$ — решение задачи (4), (5). Тогда с учетом определения производной $(D_0^r u)(x,y)$ имеем

$$u_{1-r}(x,y) = \gamma(x,y) + (I_0^1 f)(x,y),\ \gamma(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0).$$

Отсюда в силу (1) получаем

$$(I_0^{1-r}(u(x,y)-(I_0^1 f)(x,y))(x,y)=\gamma(x,y),$$

$$(I_0^r(I_0^{1-r}(u(x,y)-(I_0^r f)(x,y)))(x,y))(x,y)=(I_0^r\gamma)(x,y),$$

$$(I_0^1(u(x,y)-(I_0^r f)(x,y)))(x,y)=(I_0^r\gamma)(x,y). \tag{7}$$

Преобразуем правую часть (7):

$$(I_0^r\gamma)(x,y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}(\varphi(s)+\psi(t)-\varphi(0))dsdt=$$

$$=A_1+A_2+A_3.$$

Поскольку $\varphi(x)=\varphi(0)+\int_0^x\dot{\varphi}(s)ds$, то

$$A_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}\left(\varphi(0)+\int\limits_0^s\dot{\varphi}(\tau)d\tau\right)dsdt=$$

$$=\frac{y^\beta}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}\int\limits_0^x(x-s)^{\alpha-1}\int\limits_0^s\dot{\varphi}(\tau)d\tau ds+\frac{x^\alpha y^\beta\varphi(0)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}=$$

$$=\frac{y^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\int\limits_0^x\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}\dot{\varphi}(\tau)d\tau\right)ds+\frac{x^\alpha y^\beta\varphi(0)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}.$$

Аналогично получаем

$$A_2+A_3=\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^y\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t(t-\tau)^{\beta-1}\dot{\psi}(\tau)d\tau\right)dt.$$

Следовательно,

$$(I_0^r\gamma)(x,y)=\frac{x^\alpha y^\beta\varphi(0)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}+\frac{y^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\int\limits_0^x\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}\dot{\varphi}(\tau)d\tau\right)ds+$$

$$+\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^y\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t(t-\tau)^{\beta-1}\dot{\psi}(\tau)d\tau\right)dt. \tag{8}$$

Поскольку $(I_0^\alpha \dot{\varphi})(x) \in L(0,a)$, $(I_0^\beta \dot{\psi})(y) \in L(0,b)$, то $\int_0^x (I_0^\alpha \dot{\varphi})(s)ds$ и $\int_0^y (I_0^\beta \dot{\psi})(t)dt$ — абсолютно непрерывные функции. Следовательно, для почти всех $(x,y) \in P$ существует $D_{xy}^2(I_0^r\gamma)(x,y)$. Применив операцию D_{xy}^2 к обеим частям (7) с учетом (8), получаем, что $u(x,y)$ для почти всех $(x,y) \in P$ удовлетворяет (6).

Пусть теперь $u(x,y) \in L(P)$ удовлетворяет (6). Тогда из (6) с учетом (1) следует

$$u_{1-r}(x,y) = (I_0^{1-r}\mu)(x,y) + (I_0^1 f)(x,y). \tag{9}$$

Рассмотрим слагаемое $(I_0^{1-r}\mu)(x,y) = B_1 + B_2 + B_3$. Имеем

$$B_1 = I_0^{1-r}\left(\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(I_0^\beta \dot{\psi})(y)\right)(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{-\alpha}(y-t)^{-\beta}\times$$

$$\times\left(\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(I_0^\beta \dot{\psi})(t)\right)dsdt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{-\alpha}s^{\alpha-1}\times$$

$$\times(y-t)^{-\beta}(I_0^\beta \dot{\psi})(t)dsdt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-s)^{-\alpha}s^{\alpha-1}ds\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\times$$

$$\times\int_0^y (y-t)^{-\beta}(I_0^\beta \dot{\psi})(t)dt = \frac{B(\alpha,1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\left(I_0^{1-\beta}(I_0^\beta \dot{\psi})(t)\right)(y) = (I_0^1\dot{\psi})(y) =$$

$$= \psi(y) - \psi(0),$$

где $B(z,w) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{w-1}dx = \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$. Аналогично доказываем, что $B_2 = \varphi(x) - \varphi(0)$, $B_3 = \varphi(0)$. Следовательно,

$$\begin{gathered}(I_0^{1-r}\mu)(x,y) = \gamma(x,y),\ \gamma(x,y) \in AC(\overline{P}),\ \overline{P} = [0,a]\times[0,b],\\ u_{1-r}(x,y) = \gamma(x,y) + (I_0^1 f)(x,y).\end{gathered} \tag{10}$$

Из (10) следует, что $u(x,y)$ удовлетворяет условиям (5) и $(D_0^r u)(x,y) = D_{xy}u_{1-r}(x,y) = f(x,y)$ для почти всех $(x,y) \in P$.

Лемма доказана.

Введем обозначения (ниже $i = \overline{1,n}$):

$$\mu_i(x,y) = \frac{x^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}(I_0^{\beta_i}\dot{\psi}_i)(y) + \frac{y^{\beta_i-1}}{\Gamma(\beta_i)}(I_0^{\alpha_i}\dot{\varphi}_i)(x) + \frac{x^{\alpha_i-1}y^{\beta_i-1}\varphi_i(0)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)},$$

$$G = \{(x,y,u_1(x,y),\ldots,u_n(x,y)) : (x,y) \in P,\ \|u_i(x,y) - \mu_i(x,y)\|_1 \le d_i\}.$$

Используя лемму, легко доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть для* $u(x,y) \in G$ $f_i[x,y,u(x,y)] \in L(P)$. *Для того чтобы вектор-функция* $u(x,y) \in G$ *была решением задачи (2),(3), необходимо и достаточно, чтобы* $u(x,y)$ *для почти всех* $(x,y) \in P$ *удовлетворяла системе интегральных уравнений*

$$u_i(x,y) = \mu_i(x,y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x-s)^{\alpha_i-1}(y-t)^{\beta_i-1} f_i[s,t,u(s,t)]dsdt. \qquad (11)$$

Далее приведем условия существования и единственности локального решения задачи (2), (3).

Пусть функции $f_i[x,y,u]$ удовлетворяют условиям:

а) существуют $m_i : P \to R_+$, $m_i(x,y) \in L(P)$ такие, что для $u(x,y) \in G$ и почти всех $(x,y) \in P$

$$|f_i[x,y,u(x,y)]| \leq m_i(x,y);$$

б) для любых $u(x,y), v(x,y) \in G$

$$\|f_i[x,y,u(x,y)] - f_i[x,y,v(x,y)]\|_1 \leq K \sum_{j=1}^n \|u_j(x,y) - v_j(x,y)\|_1.$$

Теорема 2. *Пусть функции* f_i *удовлетворяют условиям а), б) и*

$$\frac{a^{\alpha_i} b^{\beta_i} \|m_i(x,y)\|_1}{\Gamma(\alpha_i+1)\Gamma(\beta_i+1)} \leq d_i, \qquad (12)$$

$$\delta = n\rho K < 1, \qquad (13)$$

где

$$\rho = \max_i \frac{a^{\alpha_i} b^{\beta_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)\Gamma(\beta_i+1)}.$$

Тогда существует единственное решение $u(x,y) \in G$, $u_i(x,y) \in L(P)$ *задачи (2), (3).*

Доказательство. Построим последовательность функций $\left\{u_i^{(m)}(x,y)\right\}$, $m = 0,1,2,\ldots$, положив $u_i^{(0)}(x,y) = \mu_i(x,y)$:

$$u_i^{(m+1)}(x,y) = \mu_i(x,y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x-s)^{\alpha_i-1}(y-t)^{\beta_i-1} \times$$

$$\times f_i[s,t,u^{(m)}(s,t)]dsdt. \qquad (14)$$

Используя (12) – (14), условия а), б), доказываем справедливость следующих оценок:

$$\|u_i^{(m)}(x,y)-\mu_i(x,y)\|_1 \le d_i,$$
$$\|u_i^{(m+1)}(x,y)-u_i^{(m)}(x,y)\|_1 \le \frac{\max\limits_i \|m_i(x,y)\|_1}{nK}\delta^m, \quad m=1,2,\dots. \tag{15}$$

На основании оценок (15) можно утверждать, что последовательности $\left\{u_i^{(m)}(x,y)\right\}$ являются фундаментальными в $L(P)$. Пусть $v_i(x,y) \in L(P)$ — сильный предел последовательностей $\left\{u_i^{(m)}(x,y)\right\}$. Тогда существует подпоследовательность вектор-функций $\left\{u_i^{(m_k)}(x,y)\right\}$, $k=1,2,\dots$, которая почти всюду на P сходится к вектор-функции $v(x,y)$. Согласно мажорантной теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега получаем, что $v_i(x,y)$ удовлетворяют системе (11). Очевидно, что $v(x,y)\in G$.

Докажем единственность. Пусть $w(x,y)=(w_1(x,y),\dots,w_n(x,y))\in G$ — также решение задачи (2),(3). В силу условия б)

$$\|v_i(x,y)-w_i(x,y)\|_1 \le \frac{a^{\alpha_i}b^{\beta_i}K}{\Gamma(\alpha_i+1)\Gamma(\beta_i+1)}\sum_{j=1}^{n}\|v_j(x,y)-w_j(x,y)\|_1 .$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\|v_i(x,y)-w_i(x,y)\|_1 \le n\rho K\sum_{i=1}^{n}\|v_i(x,y)-w_i(x,y)\|_1 .$$

Отсюда следует, что $n\rho K \ge 1$, что противоречит условию (13).

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Условие а) будет иметь место для функций $f_i : P\times R^n \to R^1$ типа Каратеодори, т. е.:

1) $f_i[\ ,\ ,u]$ — измеримая функция для любого фиксированного $u\in R^n$;

2) $f_i[x,y,\cdot]$ — непрерывная функция для любых фиксированных $(x,y)\in P$;

3) существуют $m_i : P\to R_+$, $m_i\in L(P)$, такие, что $|f_i[x,y,u]| \le m_i(x,y)$ для $u\in R^n$ и почти всех $(x,y)\in P$.

Для выполнения условия б) достаточно потребовать еще, чтобы $f_i(x,y,u_1,\dots,u_n)$ удовлетворяли условию Липшица по последним n переменным с постоянной K.

Замечание 2. При $\alpha_i=\beta_i=1$ задача (2), (3) является хорошо изученной задачей Дарбу для системы

$$\frac{\partial^2 u_i(x,y)}{\partial x\partial y} = f_i\left[x,y,u(x,y)\right],$$

$$u_i(x,0)=\varphi_i(x),\ x\in[0,a],\ u_i(0,y)=\psi_i(y),\ y\in[0,b],\ \varphi_i(0)=\psi_i(0),$$

которая эквивалентна решению системы интегральных уравнений

$$u_i(x,y)=\varphi_i(x)+\psi_i(y)-\varphi_i(0)+\int\limits_0^x\int\limits_0^y f_i\left[s,t,u(s,t)\right]dsdt$$

(система (11) при $\alpha_i = \beta_i = 1$).

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу:

$$\left(D_0^r u\right)(x,y) = \lambda u(x,y) + f(x,y),\ r = (\alpha,\beta),\ 0 < \alpha,\beta \le 1,\ f \in L(P),$$

$$u_{1-r}(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,a],\ u_{1-r}(0,y) = \psi(y),\ y \in [0,b],$$

$$\varphi(x) \in AC([0,a]),\ \psi(y) \in AC([0,b]),\ \varphi(0) = \psi(0),\ f(x,y) \in L(P).$$

Построим решение этой задачи. С этой целью, как и в теореме 2, построим последовательность $\{u_m(x,y)\}$, $m = 0,1,2,\ldots$, положив $u_0(x,y) = \mu(x,y)$,

$$u_{m+1}(x,y) = \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\lambda\int_0^x\int_0^y (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}u_m(s,t)\,dsdt + \right.$$

$$\left. + \int_0^x\int_0^y (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}f(s,t)\,dsdt\right].$$

Используя индукцию, доказываем, что

$$u_m(x,y) = x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\varphi(0)T_{\alpha,\beta}^{(m)}\left(\lambda x^\alpha y^\beta\right) + x^{\alpha-1}\int_0^y (y-t)^{\beta-1}T_{\alpha,\beta}^{(m)}\left(\lambda x^\alpha (y-t)^\beta\right)\dot\psi(t)\,dt +$$

$$+ y^{\beta-1}\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}T_{\alpha,\beta}^{(m)}\left(\lambda (x-s)^\alpha y^\beta\right)\dot\varphi(s)\,ds +$$

$$+ \int_0^x\int_0^y (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}T_{\alpha,\beta}^{(m)}\left(\lambda (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}\right)f(s,t)\,dsdt,$$

где

$$T_{\alpha,\beta}^{(m)} = \sum_{k=0}^m \frac{z^k}{\Gamma\left((k+1)\alpha\right)\Gamma\left((k+1)\beta\right)}\,.$$

При $m \to \infty$ получаем

$$u(x,y) = x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\varphi(0)E_{\alpha,\beta}\left(\lambda x^{\alpha}y^{\beta}\right) + x^{\alpha-1}\int\limits_0^y (y-t)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda x^{\alpha}(y-t)^{\beta}\right)\dot{\psi}(t)dt +$$

$$+ y^{\beta-1}\int\limits_0^x (x-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda(x-s)^{\alpha}y^{\beta}\right)\dot{\varphi}(s)ds +$$

$$+ \int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda(x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}\right)f(s,t)dsdt,$$

где

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left((k+1)\alpha\right)\Gamma\left((k+1)\beta\right)}.$$

При $\alpha = \beta = 1$ имеем задачу Гурса для так называемого телеграфного уравнения, а

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k!)^2}$$

является для него функцией Римана [5, с. 130].

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. Н.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Техника, 1987. — 688 с.

2. *Семенчук Н. П.* Об одном классе дифференциальных уравнений нецелого порядка //Дифференц. уравнения. — 1982. — **18**, №10. — С. 1831 – 1833.

3. *Килбас А. А., Бонилла Б., Трухилло Х.* Нелинейные дифференциальные уравнения дробного порядка в пространстве интегрируемых функций //Докл. РАН. — 2000. — **374**, №4. — С. 445 – 449.

4. *Витюк А. Н.* Существование решений дифференциальных включений с частными производными дробных порядков // Изв. вузов. Математика. — 1997. — №8. — С. 13 – 19.

5. *Гурса Э.* Курс математического анализа. — М.: Гостехтеориздат, 1933. — Т. 3, ч. 1. — 269 с.

Получено 01.03.2004