УДК 517.9

О СВОЙСТВАХ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ НА $(0, +\infty)$ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. В. Бельский

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3

We find the saddle point property of the system of the differential-functional equations $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(\tau(t)) + C\dot{x}(\tau(t)) + f\,(x(t), x(\tau(t)))$, $\tau(0) = 0$.

Встановлено властивість сідлової точки системи диференціально-функціональних рівнянь $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(\tau(t)) + C\dot{x}(\tau(t)) + f\,(x(t), x(\tau(t)))\,,$ $\tau(0) = 0$.

Рассмотрим систему дифференциально-функциональных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(\tau(t)) + C\dot{x}(\tau(t)) + f\,(x(t), x(\tau(t)))\,, \tag{1}$$

где A, B, C — комплексные матрицы размерности $n \times n$, функция $f : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ непрерывна, а функция $\tau(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$ и такая, что выполняются соотношения

$$\tau(0) = 0, \quad 0 < \inf_{t \geq 0} \dot{\tau}(t) \leq \sup_{t \geq 0} \dot{\tau}(t) < 1. \tag{2}$$

Будем исследовать свойства непрерывно дифференцируемых на $(0, +\infty)$ решений уравнения (1), удовлетворяющих условию

$$\exists \lim_{t \to 0+} x(t) \overset{\mathrm{df}}{=} x(0) \in \mathbb{C}^n. \tag{3}$$

Различные частные случаи таких уравнений изучались многими математиками, и в настоящее время имеется ряд интересных результатов, касающихся изучения свойств их решений. Так, в [1] достаточно полно исследованы асимптотические свойства решений скалярного уравнения (1) ($n = 1$) при $\tau(t) = qt$, $C = 0$, $f \equiv 0$, в [2] установлены новые свойства решений этого уравнения при $n = 1$, $\tau(t) = qt$, $A = 0$, $C = 0$, $f \equiv 0$, в [3] получены условия существования аналитических, почти периодических решений уравнения (1) при $n = 1$, $\tau(t) = qt$, $C = 0$, $f \equiv 0$, в [4] построено представление общего решения уравнения (1) при $n = 1$, $\tau(t) = qt$, $|C| > 1$, $f \equiv 0$, в [5] получен ряд новых результатов о существовании ограниченных и финитных решений уравнений с линейно преобразованным аргументом, в [6] определены мажоранты для решений уравнения (1) при $n = 1$, $\tau(t) = qt$, $f \equiv 0$. Несмотря на обилие результатов, посвященных исследованию асимптотических свойств решений широких классов дифференциально-функциональных уравнений, и их важные приложения (см. [7, 8] и приведенную в них библиографию), многие вопросы теории дифференциально-функциональных уравнений вида (1) изучены недостаточно. Особенно это касается исследования свойств решений уравнения (1) в окрестностях особых точек $t = 0$ и $t = +\infty$. Поэтому главной целью данной работы является установление новых свойств непрерывно дифференцируемых на $(0, +\infty)$ решений уравнения (1) при достаточно общих предположениях относительно матриц A, B, C и функции f.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что:*

1) $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2),\ \operatorname{Re}\lambda(A_1) < 0,\ \operatorname{Re}\lambda(A_2) > 0$*, т. е. существуют проекторы* $P_- = \operatorname{diag}(I_k, 0),\ P_+ = \operatorname{diag}(0, I_l),\ P_- + P_+ = I$ *такие, что* $\exists K > 0, a > 0$*:*

$$\left|e^{At}P_-x\right| < Ke^{-at}\left|P_-x\right|, \quad t \ge 0,$$
$$\left|e^{At}P_+x\right| < Ke^{at}\left|P_+x\right|, \quad t \le 0, \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n; \tag{4}$$

2) непрерывная функция $f : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ *такова, что* $f(0,0) = 0$ *и для всех* $x, y, \tilde{x}, \tilde{y}$, $\max\{|x|, |y|, |\tilde{x}|, |\tilde{y}|\} \le \sigma$*, выполняется неравенство*

$$|f(x,y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| \le \delta(\sigma)|x - \tilde{x}| + \eta(\sigma)|y - \tilde{y}|, \tag{5}$$

где функции $\delta(\sigma), \eta(\sigma)$ *являются определенными на* $[0, +\infty)$ *и такими, что* $\delta(\sigma) \to 0$, $\eta(\sigma) \to 0$ *при* $\sigma \to 0$*;*

3) $$+\infty > \sup_{t\ge 0}\left|P_\pm\left(B + \frac{AC}{\dot\tau(t)} + \frac{C\ddot\tau(t)}{(\dot\tau(t))^2}\right)\right| \stackrel{\mathrm{df}}{=} b_\pm, \qquad +\infty > \sup_{t\ge 0}\left|\frac{C}{\dot\tau(t)}\right| \stackrel{\mathrm{df}}{=} c_1,$$

$$c_1 + K\left(\left|P_-\frac{C}{\dot\tau(0)}\right| + \frac{b_-}{a} + \frac{b_+}{a}\right) < 1.$$

Тогда существуют ограниченные окрестности $V, U,\ V \supset U$*, точки* $x = 0$ *такие, что* U *содержит* k*-мерное устойчивое многообразие, т. е. любое решение задачи (1), (3), удовлетворяющее условиям* $x(0) \in U$, $x(t) \in V$ *при* $t \ge 0$*, начинается на этом многообразии и стремится к нулю при* $t \to +\infty$*.*

Доказательство. Обозначим $P_-x(0) \stackrel{\mathrm{df}}{=} x_-$. Ограниченное решение задачи (1), (3) удовлетворяет уравнению

$$x(t) = e^{At}x_- + \frac{C}{\dot\tau(t)}x(\tau(t)) - e^{At}P_-\frac{C}{\dot\tau(0)}x(0) +$$
$$+ \int_0^t e^{A(t-s)}P_-\left[\left(B + \frac{AC}{\dot\tau(s)} + \frac{C\ddot\tau(s)}{(\dot\tau(s))^2}\right)x(\tau(s)) + f(x(s), x(\tau(s)))\right]ds +$$
$$+ \int_t^{+\infty} e^{A(t-s)}P_+\left[\left(B + \frac{AC}{\dot\tau(s)} + \frac{C\ddot\tau(s)}{(\dot\tau(s))^2}\right)x(\tau(s)) + f(x(s), x(\tau(s)))\right]ds. \tag{6}$$

Исследуем уравнение (6) методом последовательных приближений, которые определим с помощью соотношений

$$x_m(t) = e^{At}x_- + \frac{C}{\dot\tau(t)}x_{m-1}(\tau(t)) - e^{At}P_-\frac{C}{\dot\tau(0)}x_{m-1}(0)+$$

$$+\int\limits_0^t e^{A(t-s)}P_-\left[\left(B+\frac{AC}{\dot\tau(s)}+\frac{C\ddot\tau(s)}{(\dot\tau(s))^2}\right)x_{m-1}(\tau(s)) + f\left(x_{m-1}(s), x_{m-1}(\tau(s))\right)\right]ds+$$

$$+\int\limits_t^{+\infty} e^{A(t-s)}P_+\left[\left(B+\frac{AC}{\dot\tau(s)}+\frac{C\ddot\tau(s)}{(\dot\tau(s))^2}\right)x_{m-1}(\tau(s)) + f\left(x_{m-1}(s), x_{m-1}(\tau(s))\right)\right]ds, \tag{7}$$

$$m \geq 1, x_0(t) \equiv 0.$$

В силу (4) имеем

$$|x_1(t) - x_0(t)| = |x_1(t)| \leq Ke^{-at}\,|x_-| \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

Принимая во внимание (5), (7), получаем

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \left|\frac{C}{\dot\tau(t)}\right| |x_1(\tau(t)) - x_0(\tau(t))| +$$

$$+ Ke^{-at}\left|P_-\frac{C}{\dot\tau(0)}\right| |x_1(0) - x_0(0)| +$$

$$+\int\limits_0^t Ke^{-a(t-s)}\left[\left|P_-\left(B+\frac{AC}{\dot\tau(s)}+\frac{C\ddot\tau(s)}{(\dot\tau(s))^2}\right)\right| |x_1(\tau(s)) - x_0(\tau(s))|+\right.$$

$$\left.+\,|P_-|\,\delta(\sigma)\,|x_1(s) - x_0(s)| + |P_-|\,\eta(\sigma)\,|x_1(\tau(s)) - x_0(\tau(s))|\right]ds+$$

$$+\int\limits_t^{+\infty} Ke^{a(t-s)}\left[\left|P_+\left(B+\frac{AC}{\dot\tau(s)}+\frac{C\ddot\tau(s)}{(\dot\tau(s))^2}\right)\right| |x_1(\tau(s)) - x_0(\tau(s))|+\right.$$

$$\left.+\,|P_+|\,\delta(\sigma)\,|x_1(s) - x_0(s)| + |P_+|\,\eta(\sigma)\,|x_1(\tau(s)) - x_0(\tau(s))|\right]ds \leq$$

$$\leq \left|\frac{C}{\dot\tau(t)}\right| Ke^{-a\tau(t)}\,|x_-| + K^2e^{-at}\left|P_-\frac{C}{\dot\tau(0)}\right|\,|x_-| +$$

$$+\int\limits_0^t Ke^{-a(t-s)}\left[\left|P_-\left(B+\frac{AC}{\dot\tau(s)}+\frac{C\ddot\tau(s)}{(\dot\tau(s))^2}\right)\right| Ke^{-a\tau(s)}\,|x_-|+\right.$$

$$\left.+\,|P_-|\,\delta(\sigma)Ke^{-as}\,|x_-| + |P_-|\,\eta(\sigma)Ke^{-a\tau(s)}\,|x_-|\right]ds+$$

$$+\int\limits_t^{+\infty} Ke^{a(t-s)}\left[\left|P_+\left(B+\frac{AC}{\dot\tau(s)}+\frac{C\ddot\tau(s)}{(\dot\tau(s))^2}\right)\right| Ke^{-a\tau(s)}\,|x_-|+\right.$$

$$\left.+\,|P_+|\,\delta(\sigma)Ke^{-as}\,|x_-| + |P_+|\,\eta(\sigma)Ke^{-a\tau(s)}\,|x_-|\right]ds.$$

Для сокращения записей обозначим $\inf\limits_{t\geq 0}\left(1\pm\dfrac{d}{dt}\left(\tau^m(t)\right)\right)\stackrel{\mathrm{df}}{=} w_{m\pm}$, где

$$\tau^m(t)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\underbrace{\tau(\tau(..........(\tau}_{m}(t))...).$$

Учитывая (2), нетрудно показать, что

$$0 < w_{m\pm}\to 1,\qquad m\to+\infty. \tag{8}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $D(\varepsilon)\in R$ такое, что $e^{-at}t < D(\varepsilon)e^{(-a+\varepsilon)t}$, $t\geq 0$. В силу (2) можно выбрать $\varepsilon > 0$ такое, что $1-\dfrac{\varepsilon}{a}-\dot\tau(t) > 0$ при $t\geq 0 \Rightarrow (-a+\varepsilon)t\leq$ $\leq -a\tau(t), t\geq 0$. Поскольку

$$\int\limits_0^t e^{a(s-\tau(s))}ds = \int\limits_0^t \frac{de^{a(s-\tau(s))}}{a(1-\dot\tau(s))}\leq$$

$$\leq\frac{1}{aw_{1-}}\left(e^{a(t-\tau(t))}-1\right)\leq\frac{e^{a(t-\tau(t))}}{aw_{1-}},$$

$$\int\limits_t^{+\infty} e^{-a(s+\tau(s))}ds = \int\limits_t^{+\infty}\frac{de^{-a(s+\tau(s))}}{-a(1+\dot\tau(s))}\leq\frac{e^{-a(t+\tau(t))}}{aw_{1+}},$$

то

$$
\begin{aligned}
|x_2(t)-x_1(t)| \le\ & c_1 K e^{-a\tau(t)}\,|x_-| + K^2 e^{-at}\left|P_-\frac{C}{\dot\tau(0)}\right||x_-| + \\
& + K^2 b_- \frac{e^{-a\tau(t)}}{aw_{1-}}\,|x_-| + |P_-|\,\delta(\sigma)K^2 D(\varepsilon)e^{(-a+\varepsilon)t}\,|x_-| + \\
& + |P_-|\,\eta(\sigma)K^2\frac{e^{-a\tau(t)}}{aw_{1-}}\,|x_-| + K^2 b_+\frac{e^{-a\tau(t)}}{aw_{1+}}\,|x_-| + \\
& + |P_+|\,\delta(\sigma)K^2\frac{e^{-at}}{2a}\,|x_-| + |P_+|\,\eta(\sigma)K^2\frac{e^{-a\tau(t)}}{aw_{1+}}\,|x_-|\,.
\end{aligned}
$$

Учитывая выбор ε, имеем

$$
\begin{aligned}
|x_2(t)-x_1(t)| \le\ & \Bigg[c_1 K + K^2\left|P_-\frac{C}{\dot\tau(0)}\right| + \\
& + K^2 b_-\frac{1}{aw_{1-}} + |P_-|\,\delta(\sigma)K^2 D(\varepsilon) + |P_-|\,\eta(\sigma)K^2\frac{1}{aw_{1-}} + \\
& + K^2 b_+\frac{1}{aw_{1+}} + |P_+|\,\delta(\sigma)K^2\frac{1}{2a} + \\
& + |P_+|\,\eta(\sigma)K^2\frac{1}{aw_{1+}}\Bigg] e^{-a\tau(t)}\,|x_-| \stackrel{\mathrm{df}}{=} K_1 e^{-a\tau(t)}\,|x_-|\,.
\end{aligned}
$$

Аналогично находим

$$
\begin{aligned}
|x_3(t)-x_2(t)| \le\ & c_1 K_1 e^{-a\tau^2(t)}\,|x_-| + K_1 K e^{-at}\left|P_-\frac{C}{\dot\tau(0)}\right||x_-| + \\
& + K_1 K b_-\frac{e^{-a\tau^2(t)}}{aw_{2-}}\,|x_-| + K_1 K\,|P_-|\,\delta(\sigma)\frac{e^{-a\tau(t)}}{aw_{1-}}\,|x_-| + \\
& + K_1 K\,|P_-|\,\eta(\sigma)\frac{e^{-a\tau^2(t)}}{aw_{2-}}\,|x_-| + K_1 K b_+\frac{e^{-a\tau^2(t)}}{aw_{2+}}\,|x_-| + \\
& + K_1 K\,|P_+|\,\delta(\sigma)\frac{e^{-a\tau(t)}}{aw_{1+}}\,|x_-| + K_1 K\,|P_+|\,\eta(\sigma)\frac{e^{-a\tau^2(t)}}{aw_{2+}}\,|x_-| =
\end{aligned}
$$

$$= \left[c_1 + K\left|P_- \frac{C}{\dot\tau(0)}\right| + Kb_- \frac{1}{aw_{2-}} + K\left|P_-\right|\delta(\sigma)\frac{1}{aw_{1-}} + K\left|P_-\right|\eta(\sigma)\frac{1}{aw_{2-}} + \right.$$

$$\left. + Kb_+ \frac{1}{aw_{2+}} + K\left|P_+\right|\delta(\sigma)\frac{1}{aw_{1+}} + K\left|P_+\right|\eta(\sigma)\frac{1}{aw_{2+}}\right] K_1 e^{-a\tau^2(t)}\left|x_-\right| \overset{\mathrm{df}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=} K_2 K_1 e^{-a\tau^2(t)}\left|x_-\right|.$$

Рассуждая методом математической индукции, получаем

$$\left|x_{m+1}(t) - x_m(t)\right| \le K_m K_{m-1} ... K_1 e^{-a\tau^m(t)}\left|x_-\right|,$$

где

$$K_m = c_1 + K\left[\left|P_- \frac{C}{\dot\tau(0)}\right| + b_- \frac{1}{aw_{m-}} + \left|P_-\right|\delta(\sigma)\frac{1}{aw_{(m-1)-}} + \left|P_-\right|\eta(\sigma)\frac{1}{aw_{m-}} + \right.$$

$$\left. + b_+ \frac{1}{aw_{m+}} + \left|P_+\right|\delta(\sigma)\frac{1}{aw_{(m-1)+}} + \left|P_+\right|\eta(\sigma)\frac{1}{aw_{m+}}\right], \quad m \ge 2.$$

Из (8) следует

$$\lim_{m\to+\infty} K_m = c_1 + K\left[\left|P_- \frac{C}{\dot\tau(0)}\right| + \left(b_- + \left|P_-\right|\delta(\sigma) + \left|P_-\right|\eta(\sigma)\right)\frac{1}{a} + \right.$$

$$\left. + \left(b_+ + \left|P_+\right|\delta(\sigma) + \left|P_+\right|\eta(\sigma)\right)\frac{1}{a}\right].$$

Поскольку

$$c_1 + K\left[\left|P_- \frac{C}{\dot\tau(0)}\right| + \frac{b_-}{a} + \frac{b_+}{a}\right] < 1,$$

то при достаточно малом σ имеем $\lim\limits_{m\to+\infty} K_m < 1$, ряд

$$S(t, x_-) \overset{\mathrm{df}}{=} Ke^{-at}\left|x_-\right| + K_1 e^{-a\tau(t)}\left|x_-\right| + K_2 K_1 e^{-a\tau^2(t)}\left|x_-\right| + \ldots$$

$$\ldots + K_m K_{m-1} ... K_1 e^{-a\tau^m(t)}\left|x_-\right| + \ldots \tag{9}$$

равномерно сходится при $t \ge 0$ и $S(t, x_-) < \sigma$ при

$$\left|x_-\right| < \frac{\sigma}{1 + K + K_1 + K_2 K_1 + \ldots + K_m K_{m-1} \ldots K_1 + \ldots} \overset{\mathrm{df}}{=} \mu(\sigma).$$

Таким образом, в достаточно малой окрестности нуля существует ограниченное непрерывное решение $x(t,x_-),\ P_-x(0,x_-)=x_-$, уравнения (6).

Продифференцировав соотношение (7), получим

$$\dot{x}_m(t) = Ax_m(t) + Bx_{m-1}(\tau(t)) + C\dot{x}_{m-1}(\tau(t)) + f\left(x_{m-1}(t), x_{m-1}(\tau(t))\right).$$

Следовательно,

$$|\dot{x}_m(t)-\dot{x}_{m-1}(t)| \le |A|\,|x_m(t)-x_{m-1}(t)| + |B|\,|x_{m-1}(\tau(t)) - x_{m-2}(\tau(t))| +$$

$$+ |C|\,|\dot{x}_{m-1}(\tau(t)) - \dot{x}_{m-2}(\tau(t))| + \delta(\sigma)\,|x_{m-1}(t)-x_{m-2}(t)| +$$

$$+ \eta(\sigma)\,|x_{m-1}(\tau(t)) - x_{m-2}(\tau(t))|.$$

Обозначая $\alpha_m \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup\limits_{t\ge 0}|\dot{x}_m(t)-\dot{x}_{m-1}(t)|$, $\beta_m \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup\limits_{t\ge 0}|x_m(t)-x_{m-1}(t)|$, получаем

$$\alpha_m \le |A|\,\beta_m + (|B|+\delta(\sigma)+\eta(\sigma))\,\beta_{m-1} + |C|\,\alpha_{m-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\alpha_i \le |A|\sum_{i=1}^{m}\beta_i + (|B|+\delta(\sigma)+\eta(\sigma))\sum_{i=1}^{m}\beta_i + |C|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i + \alpha_1. \tag{10}$$

Поскольку согласно (2) имеем $1 > \dot{\tau}(t) > 0$, а в силу условия 3 $|C| < 1$, соотношение (10) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i \le (1-|C|)^{-1}\left(|A|\sum_{i=1}^{m}\beta_i + (|B|+\delta(\sigma)+\eta(\sigma))\sum_{i=1}^{m}\beta_i + \alpha_1\right). \tag{11}$$

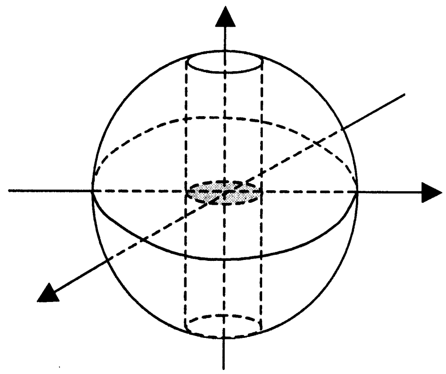
Из сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\beta_i$ и неравенства (11) следует сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\alpha_i$. Существование ограниченного непрерывно дифференцируемого решения уравнения (6) доказано.

Определим оператор

$$(Fx)(t) = e^{At}x_- + \frac{C}{\dot{\tau}(t)}x(\tau(t)) - e^{At}P_-\frac{C}{\dot{\tau}(0)}x(0) +$$

$$+\int\limits_0^t e^{A(t-s)}P_-\left[\left(B+\frac{AC}{\dot{\tau}(s)}+\frac{C\ddot{\tau}(s)}{(\dot{\tau}(s))^2}\right)x(\tau(s)) + f\left(x(s),x(\tau(s))\right)\right]ds +$$

$$+\int\limits_t^{+\infty} e^{A(t-s)}P_+\left[\left(B+\frac{AC}{\dot{\tau}(s)}+\frac{C\ddot{\tau}(s)}{(\dot{\tau}(s))^2}\right)x(\tau(s)) + f\left(x(s),x(\tau(s))\right)\right]ds,$$



который действует в банаховом пространстве непрерывных ограниченных на $[0, +\infty)$ функций таких, что $P_- x(0) = x_-$, с нормой $\rho(x, y) = \sup\limits_{t \geq 0} |x(t) - y(t)|$. Тогда

$$\rho(Fx, Fy) \leq \left(c_1 + K\left[\left|P_- \frac{C}{\dot{\tau}(0)}\right| + (b_- + |P_-|\,\delta(\sigma) + |P_-|\,\eta(\sigma))\,\frac{1}{a} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \, (b_+ + |P_+|\,\delta(\sigma) + |P_+|\,\eta(\sigma))\,\frac{1}{a}\right]\right) * \rho(x, y).$$

В силу условий теоремы имеем

$$c_1 + K\left(\left|P_- \frac{C}{\dot{\tau}(0)}\right| + \frac{b_-}{a} + \frac{b_+}{a}\right) < 1,$$

откуда следует, что в достаточно малой окрестности нуля оператор F не может иметь две неподвижные точки и, следовательно, единственность ограниченного решения уравнения (6) доказана.

Подытоживая изложенное выше, заключаем, что для любого $x_- \in P_-\mathbb{C}^n \cap B(\mu(\sigma))$ существует ограниченное $C^1(0, +\infty)$-решение задачи (1), (3) $x(t, x_-)$ такое, что $P_- x(0, x_-) = x_-$, $|x(t, x_-)| < \sigma \quad \forall t \geq 0$. Таким образом, подмножество начальных значений $H \stackrel{\text{df}}{=} \{x(0) \in \mathbb{C}^n | P_- x(0) \in B(\mu(\sigma))$, существует $C^1(0, +\infty)$-решение задачи (1), (3) $x(t)$ такое, что $|x(t)| < \sigma,\ t \geq 0\}$ является подмножеством пересечения

$$\{x \in \mathbb{C}^n | P_- x \in B(\mu(\sigma))\} \cap B(\sigma) \stackrel{\text{df}}{=} U.$$

Положим $V \stackrel{\text{df}}{=} B(\sigma)$. Для понимания этих рассуждений приведем схематический рисунок. Серый срез вертикального цилиндра является множеством $P_-\mathbb{C}^n \cap B(\mu(\sigma))$, шар — $B(\sigma)$. Вертикальный цилиндр, ограниченный сферой, является окрестностью нуля U.

Покажем, что множество H гомеоморфно множеству $P_-\mathbb{C}^n \cap B(\mu(\sigma))$. Действительно, гомеоморфизм осуществляется посредством отображения $g(x_-) \stackrel{\text{df}}{=} x(0, x_-)$, $x_- \in P_-\mathbb{C}^n \cap$

$\cap B(\mu(\sigma))$. Непрерывность g следует из непрерывности $x(t, x_-)$ как предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций $x_m(t, x_-)$. Обратное отображение $g^{-1} = P_-$ также является непрерывной функцией. Сходимость к нулю искомых решений следует из оценки

$$|x(t, x_-)| \leq \Big(Ke^{-at} + K_1 e^{-a\tau(t)} + K_2 K_1 e^{-a\tau^2(t)} + \ldots$$

$$\ldots + K_m K_{m-1} \ldots K_1 e^{-a\tau^m(t)} + \ldots\Big) |x_-| < \sigma \quad \text{при} \quad t \geq 0$$

или

$$|x(t, x_-)| \leq \Big(Ke^{-at} + K_1 e^{-a\tau(t)} + K_2 K_1 e^{-a\tau^2(t)} + \ldots$$

$$\ldots + K_m K_{m-1} \ldots K_1 e^{-a\tau^m(t)} + \ldots\Big) |P_-| \, |x(0, x_-)| \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

Теорема доказана.

Заметим, что из доказательства легко получить следующую оценку:

$$|P_+ x(0, x_-)| \leq \left(\left|P_+ \frac{C}{\dot{\tau}(0)}\right| + K\left(b_+ + |P_+|\,\delta(\sigma) + |P_+|\,\eta(\sigma)\right)\frac{1}{a}\right) *$$

$$* \left(K + K_1 + K_2 K_1 + \ldots + K_m K_{m-1} \ldots K_1 + \ldots\right) |x_-|.$$

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891–937.

2. *De Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x + \beta} F(x-1)$. I, II // Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56. Indag. Math. — 1953. —**15**. — P. 449–464.

3. *Frederickson P. O.* Series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes Math. — 1971. — **243**. — P. 249–254.

4. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 119 с.

5. *Дерфель Г. А.* Вероятностный метод исследования одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 10.

6. *Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений линейных дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 1. — С. 48–52.

7. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. — Рівне: Вид-во УДУВГП, 2003. — 288 с.

8. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes Math. — 1980. — **809**. — 267 p.

Получено 25.06.2004