УДК 517.9

УМОВИ АБСОЛЮТНОЇ НЕСТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@USUWM.rv.ua

We find conditions for absolute instability of solutions of differential-difference equations.

Отримано умови абсолютної нестійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь.

1. Скалярні диференціально-різницеві рівняння загаяного типу. Розглянемо диференціально-різницеве рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_0 x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x(t-\Delta_k),\ t \geq 0, \tag{1}$$

де $a_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, $\Delta_l \geq 0$, $l \geq 1$, і

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty. \tag{2}$$

Нульовий розв'язок рівняння (1) (або аналогічного нелінійного рівняння) будемо називати *абсолютно нестійким* по відношенню до відхилень аргументу, якщо цей розв'язок нестійкий для всіх сталих невід'ємних Δ_k, $k \geq 1$, для яких

$$\sup_{k \geq 1} \Delta_k < \infty. \tag{3}$$

Теорема 1. *Нульовий розв'язок рівняння (1) абсолютно нестійкий тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k > 0. \tag{4}$$

Доведення. Нехай справджується співвідношення (1) і Δ_k, $k \geq 1$, — довільні невід'ємні числа, що задовольняють (3). Використаємо характеристичний квазіполіном

$$\chi(p) = p - a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-p\Delta_k}.$$

Оскільки

$$\chi(0) = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k < 0,$$

$$\lim_{p \to +\infty} \chi(p) = +\infty$$

і функція $\chi(p)$ є неперервною на $[0, +\infty)$, то за теоремою Больцано – Коші [1] існує таке число $\varepsilon > 0$, що

$$\chi(\varepsilon) = 0.$$

Тому функція $x = e^{\varepsilon t}$ є розв'язком рівняння (1).

Звідси, з довільності вибору невід'ємних чисел Δ_k, $k \geq 1$, що задовольняють (3), та з того, що $\varepsilon > 0$, випливає абсолютна нестійкість нульового розв'язку рівняння (1).

Отже, з (4) випливає абсолютна нестійкість нульового розв'язку рівняння (1).

Доведемо обернене твердження.

Нехай нульовий розв'язок рівняння (1) абсолютно нестійкий. Тоді нульовий розв'язок цього рівняння нестійкий і для $\Delta_k = 0$, $k \geq 1$. У цьому випадку рівняння (1) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) x(t), \ t \geq 0.$$

Нестійкість нульового розв'язку цього рівняння можлива лише у випадку виконання співвідношення (4).

Отже, з абсолютної нестійкості нульового розв'язку рівняння (1) випливає виконання співвідношення (4).

Теорему 1 доведено.

Твердження теореми 1 справджується й у випадку малих нелінійних збурень правої частини рівняння (1).

Нехай l_∞ — банахів простір обмежених послідовностей

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots)$$

дійсних чисел з нормою

$$\|\tau\|_{l_\infty} = \sup_{t \geq 1} |\tau_k|.$$

Позначимо через $\mathcal{F}$ множину неперервних відображень $f : [0, +\infty) \times l_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$, для кожного з яких існують функція $\gamma : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, для якої

$$\lim_{t \to +0} \frac{\gamma(t)}{t} = 0,$$

та додатні числа a і M такі, що

$$\sup_{t\geq 0}|f(t,x_1,\ldots,x_n,\ldots)-f(t,y_1,\ldots,y_n,\ldots)|\leq$$

$$\leq M\sup_{n\geq 1}|x_n-y_n|$$

і

$$\sup_{t\geq 0}|f(t,x_1,\ldots,x_n,\ldots)|\leq \gamma\left(\sup_{n\geq 1}|x_n|\right),$$

якщо

$$\sup_{n\geq 1}|x_n|\leq a$$

і

$$\sup_{n\geq 1}|y_n|\leq a.$$

Розглянемо нелінійне диференціально-різницеве рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt}=a_0x(t)+\sum_{k=1}^{\infty}a_kx(t-\Delta_k)+$$
$$+f(t,x(t),x(t-\Delta_1),\ldots,x(t-\Delta_n),\ldots),\ t\geq 0, \tag{5}$$

де $a_k\in\mathbb{R}$, $k\geq 0$, і Δ_k, $k\geq 1$, задовольняють відповідно співвідношення (2) і (3), і $f\in\mathcal{F}$.

Теорема 2. *Нульовий розв'язок рівняння (5) абсолютно нестійкий для всіх $f\in\mathcal{F}$ тоді і тільки тоді, коли справджується співвідношення (4).*

Доведення. Якщо виконується співвідношення (4), то для всіх Δ_k, $k\geq 1$, що задовольняють співвідношення (4), і $f\in\mathcal{F}$ нульовий розв'язок рівняння (5) є нестійким завдяки теоремі про нестійкість за лінійним наближенням (див., наприклад, [2]) та тому, що для характеристичного квазіполінома $\chi(p)$ лінійного рівняння (1) множина $\{p:\operatorname{Re}p>0,\chi(p)=0\}$ є непорожньою і скінченною.

Навпаки, якщо нульовий розв'язок рівняння (5) є абсолютно нестійким для всіх $f\in\mathcal{F}$, то цей розв'язок абсолютно нестійкий, якщо $f=0$. Тоді за теоремою 1 справджується співвідношення (4).

Теорему 2 доведено.

2. Скалярні диференціально-різницеві рівняння нейтрального типу. Твердження, аналогічні теоремам 1 і 2, мають місце і для диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу.

Спочатку розглянемо диференціально-різницеве рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{dx(t-\delta_k)}{dt} = c_0 x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x(t-\tau_k), \ t \geq 0, \tag{6}$$

де $b_k \in \mathbb{R}$, $\delta_k, \tau_k \in [0, +\infty)$, $k \geq 1$, і $c_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, причому

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| + \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty \tag{7}$$

і

$$\sup_{k \geq 1} (\delta_k + \tau_k) < \infty. \tag{8}$$

Нульовий розв'язок рівняння (6) (або аналогічного нелінійного рівняння) будемо називати *абсолютно нестійким* по відношенню до відхилень аргументу, якщо цей розв'язок нестійкий для всіх сталих невід'ємних δ_k і τ_k, $k \geq 1$, для яких виконується співвідношення (8).

Теорема 3. *Нехай*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < 1. \tag{9}$$

Нульовий розв'язок рівняння (6) абсолютно нестійкий тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k > 0. \tag{10}$$

Доведення. Нехай справджується співвідношення (10) і $\delta_k, \ \tau_k, k \geq 1$, — довільні невід'ємні числа, що задовольняють (8). Оскільки для характеристичного квазіполінома рівняння (6)

$$\chi(p) = p\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-p\delta_k}\right) - c_0 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-p\tau_k}$$

виконуються співвідношення

$$\chi(0) = -\sum_{k=0}^{\infty} c_k < 0$$

і

$$\lim_{p \to +\infty} \chi(p) = +\infty$$

(з урахуванням нерівності (9)), то на підставі неперервності функції $\chi(p)$ на $[0, +\infty)$ і теореми Больцано – Коші існує таке число $\varepsilon > 0$, що

$$\chi(\varepsilon) = 0.$$

Тому функція $x = e^{\varepsilon t}$ є розв'язком рівняння (6). Звідси випливає абсолютна нестійкість нульового розв'язку рівняння (6).

Отже, із співвідношення (10) випливає нестійкість нульового розв'язку рівняння (6).

Доведемо обернене твердження.

Нехай нульовий розв'язок рівняння (6) абсолютно нестійкий. Тоді нульовий розв'язок цього рівняння нестійкий і для $\delta_k = \tau_k = 0$, $k \geq 1$. У цьому випадку рівняння (6) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) \frac{dx(t)}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k\right) x(t), \; t \geq 0.$$

Нестійкість нульового розв'язку цього рівняння на підставі (9), очевидно, можлива тільки у випадку виконання співвідношення (10).

Отже, з абсолютної нестійкості нульового розв'язку рівняння (6) випливає виконання співвідношення (10).

Теорему 3 доведено.

Далі розглянемо нелінійне диференціально-різницеве рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{dx(t-\delta_k)}{dt} = c_0 x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x(t-\tau_k) +$$

$$+ f(t, x(t), x(t-\delta_1), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\delta_n), x(t-\tau_n), \ldots), \tag{11}$$

де $b_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$, $c_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, і $\delta_k, \tau_k \in [0, +\infty)$, $k \geq 1$, задовольняють відповідно співвідношення (7) і (8) і $f \in \mathcal{F}$.

Теорема 4. *Нехай виконується співвідношення (9).*

Нульовий розв'язок рівняння (11) абсолютно нестійкий для всіх $f \in \mathcal{F}$ тоді і тільки тоді, коли справджується співвідношення (10).

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 2.

Зауважимо, що застосування диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу з абсолютно нестійким нульовим розв'язком наведено в [3].

3. Системи диференціально-різницевих рівнянь. Розглянемо систему диференціально-різницевих рівнянь

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(0)} x_j(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(k)} x_j(t-\Delta_k), \; i = \overline{1, m}, \tag{12}$$

де $t \geq 0$, m — натуральне число, $a_{ij}^{(k)}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$, $k \geq 1$, — дійсні числа, для яких

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}| < \infty,$$

і Δ_k, $k \geq 1$, — довільні невід'ємні числа, що задовольняють співвідношення (3).

Позначимо через A_k матрицю, утворену з коефіцієнтів $a_{ij}^{(k)}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$.

Наведемо просту достатню умову абсолютної нестійкості нульового розв'язку системи рівнянь (12), що збігається з (4) у випадку скалярного рівняння ($m = 1$).

Теорема 5. *Нехай*

$$\det \left(-\sum_{k=0}^{\infty} A_k \right) < 0. \tag{13}$$

Тоді нульовий розв'язок системи рівнянь (12) абсолютно нестійкий.

Доведення. Нехай Δ_k, $k \geq 1$, — довільні невід'ємні числа, що задовольняють співвідношення (3). Використаємо характеристичний квазіполіном системи рівнянь (12)

$$\chi(p) = \det \left(pI - A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-p\Delta_k} A_k \right).$$

Оскільки

$$\chi(0) = \det \left(-\sum_{k=0}^{\infty} A_k \right) < 0,$$

$$\chi(s) > 0$$

для досить великого додатного числа s і функція $\chi(p)$ є неперервною на $[0, +\infty)$, то за теоремою Больцано – Коші існує таке число $\varepsilon > 0$, що

$$\chi(\varepsilon) = 0.$$

Тому система рівнянь (12) має розв'язок

$$x_i(t) = e^{\varepsilon t} a_i, \; i = \overline{1,m},$$

де $a_1, \ldots, a_m$ — координати ненульового вектора a, для якого

$$\left(pI - A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varepsilon\Delta_k} A_k \right) a = 0.$$

Звідси, з довільності вибору невід'ємних чисел Δ_k, $k \geq 1$, та з того, що $\varepsilon > 0$, випливає абсолютна нестійкість нульового розв'язку системи рівнянь (12).

Теорему 5 доведено.

Зауважимо, що твердження цієї роботи є узагальненнями відповідних тверджень із монографії [3].

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального исчисления: В 3 т. — М.: Наука, 1966. — Т. 2. — 800 с.
2. *Слюсарчук В. Ю.* Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі. — Рівне: Вид-во Укр. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2003. — 366 с.
3. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. — Рівне: Вид-во Укр. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2003. — 288 с.

Одержано 09.06.2004