УДК 517.928

СТІЙКІСТЬ ІНТЕГРАЛЬНОГО МНОГОВИДУ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ЧАСТОТАМИ ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Р. І. Петришин, П. М. Дудницький

Чернів. нац. ун-т
Україна, 58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
e-mail: rompetr@math.chnu.cv.ua

Using uniform estimates for oscillating integrals and sums, we prove theorems on asymptotic and conditional asymptotic stability of the integral manifold of a multifrequence differential system with impulsive effects at fixed times.

На підставі рівномірних оцінок осциляційних інтегралів і сум доведено теореми про асимптотичну та умовну асимптотичну стійкість інтегрального многовиду багаточастотної системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

Метод інтегральних многовидів у теорії диференціальних рівнянь є потужним математичним апаратом, оскільки дослідження розв'язків таких рівнянь значно спрощується, якщо вони належать многовиду меншого виміру, ніж вимір фазового простору. Цей метод було поширено на різні класи диференціальних рівнянь [1 – 5], в тому числі і на квазілінійні системи з імпульсною дією [6]. У роботі [7] встановлено умови існування інтегрального многовиду одночастотної імпульсної коливної системи, а у [8] цей результат узагальнено на випадок багаточастотних резонансних систем.

Основний результат даної статті полягає в тому, що на підставі рівномірних оцінок осциляційних інтегралів і сум вивчено питання стійкості побудованого у [8] інтегрального многовиду імпульсної коливної системи з повільно змінними частотами.

Розглянемо нелінійну коливну систему звичайних диференціальних рівнянь із повільно змінними частотами та імпульсною дією у фіксовані моменти часу $t_\nu = \varepsilon^{-1}\tau_\nu$ вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\tau) + \tilde{a}(x,\varphi,\tau) + \varepsilon A(x,\varphi,\tau,\varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \tau \neq \tau_\nu, \tag{1}$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon p(x,\tau_\nu) + \varepsilon\tilde{p}(x,\varphi,\tau_\nu) + \varepsilon^2 P(x,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon), \quad \Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(x,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),$$

де $x \in D \subset R^n, \varphi \in R^m, (0,\varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, $\tau = \varepsilon t \in R$, $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = \varepsilon\theta$ для всіх $\nu \in Z$, θ — додатне число, D — обмежена область, праві частини рівностей в (1) належать певним класам гладких і 2π-періодичних за кожною із координат φ_s, $s = \overline{1,m}$, вектора φ функцій. Не втрачаючи загальності, середні по φ в кубі періодів функцій $\tilde{a}$ і $\tilde{p}$ можна вважати тотожними нулями.

Нехай

$$(a, \tilde{a}, A, b, p, \tilde{p}, P, q) \in C^1_{x,\varphi,\tau}(G, \sigma_1),$$

$$\sum_{k\neq 0} \|k\|^{\mu} \Bigg[\|k\| \sup_G \|c_k\| + \sup_G \left\| \frac{\partial c_k}{\partial x} \right\| + \sup_G \left\| \frac{\partial c_k}{\partial \tau} \right\| +$$

$$+ \|k\|^2 \left(\|k\| \sup_G \|r_k\| + \sup_G \left\| \frac{\partial r_k}{\partial x} \right\| + \sup_G \left\| \frac{\partial r_k}{\partial \tau} \right\| \right) \Bigg] \leq \sigma_1, \tag{2}$$

$$\sup_{\tau\in R} \|(V_l^*(\tau)V_l(\tau))^{-1}V_l^*(\tau)\| \leq \sigma_1,$$

причому функції $\dfrac{d^g\omega_s(\tau)}{d\tau^g}$, $g = \overline{0,l}$, $l \geq m$, $s = \overline{1,m}$, рівномірно неперервні на R, а матриця $B(x,\tau) = \dfrac{\partial}{\partial x}(a(x,\tau), p(x,\tau))$ розмірності $2n \times n$ одностайно по $\tau \in R$ рівномірно неперервна по $x \in D$, тобто для довільного $\delta_1 > 0$ існує таке не залежне від τ, x і y число $\delta_2 > 0$, що

$$\|B(x,\tau) - B(y,\tau)\| < \delta_1, \quad x \in D, \quad y \in D, \quad \tau \in R, \tag{3}$$

при $\|x - y\| < \delta_2$. В умовах (2) $G = D \times R^m \times R \times (0, \varepsilon_0]$, μ — число, яке буде уточнене нижче, σ_1 — додатна стала, $C^1_{x,\varphi,\tau}(G,\sigma_1)$ — множина вектор-функцій, які при кожному $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ мають неперервні та обмежені σ_1 частинні похідні першого порядку по x, φ, τ на множині $D \times R^{m+1}$, $c_k = c_k(x,\tau,\varepsilon)$ і $r_k = r_k(x,\tau,\varepsilon)$ — коефіцієнти Фур'є 2π-періодичних по φ_s, $s = \overline{1,m}$, вектор-функцій $c(x,\varphi,\tau,\varepsilon) = (\tilde{a}(x,\varphi,\tau), b(x,\varphi,\tau,\varepsilon))$ і $r(x,\varphi,\tau,\varepsilon) = (\tilde{p}(x,\varphi,\tau), q(x,\varphi,\tau,\varepsilon))$, k — m-вимірний вектор з цілочисловими координатами, $V_l(\tau)$ і $V_l^*(\tau)$ позначають відповідно матрицю

$$\left(\frac{d^g\omega_s(\tau)}{d\tau^g} \right)_{g,s=1}^{l,m}$$

розмірності $l \times m$ і транспоновану матрицю. Під нормою вектора розуміємо евклідову норму, а норму матриці узгоджено з евклідовою нормою вектора.

Вважатимемо, що усереднена за всіма кутовими змінними система диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = a(\tilde{x},\tau), \quad \tau \neq \tau_\nu, \quad \Delta x|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon p(\tilde{x},\tau_\nu) \tag{4}$$

має розв'язок $\tilde{x} = \xi(\tau,\varepsilon)$, який визначений для всіх $\tau \in R$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ і належить D разом із своїм ρ-околом, $\rho > 0$, а відповідна цьому розв'язку система у варіаціях [6]

$$\frac{dz}{d\tau} = H(\tau,\varepsilon)z, \quad \Delta z|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G(\tau_\nu,\varepsilon)z \tag{5}$$

гіперболічна [6] рівномірно по ε. При такому обмеженні (5) розпадається на дві сепаратні лінійні системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією:

$$\frac{dz_+}{d\tau} = H_+(\tau,\varepsilon)z_+, \quad \tau \neq \tau_\nu, \quad \Delta z_+|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G_+(\tau_\nu,\varepsilon)z_+, \tag{6}$$

$$\frac{dz_-}{d\tau} = H_-(\tau,\varepsilon)z_-, \quad \tau \neq \tau_\nu, \quad \Delta z_-|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G_-(\tau_\nu,\varepsilon)z_-, \tag{7}$$

де $z = (z_+, z_-)$, $z_+ \in R^{n_0}$, $z_- \in R^{n-n_0}$, n_0 не залежить від ε, $H(\tau,\varepsilon) = \operatorname{diag}(H_+(\tau,\varepsilon), H_-(\tau,\varepsilon))$, $G(\tau,\varepsilon) = \operatorname{diag}(G_+(\tau,\varepsilon), G_-(\tau,\varepsilon))$, а матриціанти $Q_+(\tau,t,\varepsilon)$ і $Q_-(\tau,t,\varepsilon)$ лінійних систем (6) і (7) задовольняють нерівності

$$\begin{gathered} \|Q_+(\tau,t,\varepsilon)\| \leq Ke^{\gamma(\tau-t)}, \quad \tau \leq t \in R, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \\ \|Q_-(\tau,t,\varepsilon)\| \leq Ke^{-\gamma(\tau-t)}, \quad \tau \geq t \in R, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \end{gathered} \tag{8}$$

з не залежними від ε сталими $K \geq 1$ і $\gamma > 0$.

За таких припущень умови

$$\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0 + \underset{\sim}{\sigma}_0 < 1, \tag{9}$$

де

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{2K}{\gamma} \sup_G \left\| \frac{\partial \tilde{a}(x,\varphi,\tau)}{\partial x} \right\|, \quad \underset{\sim}{\sigma}_0 = \frac{2K}{\gamma\theta} \sup_G \left\| \frac{\partial \tilde{p}(x,\varphi,\tau)}{\partial x} \right\|,$$

у роботі [8] доведено існування інтегрального многовиду $y = Y(\psi,\tau,\varepsilon)$ системи

$$\begin{gathered} \frac{dy}{d\tau} = H(\tau,\varepsilon)y + F_1(y,\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(\xi(\tau,\varepsilon)+y,\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \tau \neq \tau_\nu, \\ \Delta y|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G(\tau_\nu,\varepsilon)y + \varepsilon\Phi_1(y,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon), \quad \Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon g(\xi(\tau_\nu,\varepsilon)+y,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon), \end{gathered} \tag{10}$$

яку одержуємо з (1) шляхом заміни $y = x - \xi(\tau,\varepsilon)$. Тут

$$F_1(y,\varphi,\tau,\varepsilon) = F(y,\tau,\varepsilon) + \tilde{a}(\xi(\tau,\varepsilon)+y,\varphi,\tau) + \varepsilon A(\xi(\tau,\varepsilon)+y,\varphi,\tau,\varepsilon),$$

$$\Phi_1(y,\varphi,\tau,\varepsilon) = \Phi(y,\tau,\varepsilon) + \tilde{p}(\xi(\tau,\varepsilon)+y,\varphi,\tau) + \varepsilon P(\xi(\tau,\varepsilon)+y,\varphi,\tau,\varepsilon),$$

$$F(y,\tau,\varepsilon) = a(\xi(\tau,\varepsilon)+y,\tau) - a(\xi(\tau,\varepsilon),\tau) - H(\tau,\varepsilon)y,$$

$$\Phi(y,\tau,\varepsilon) = p(\xi(\tau,\varepsilon)+y,\tau) - p(\xi(\tau,\varepsilon),\tau) - G(\tau,\varepsilon)y.$$

У [8] встановлено, що функція $Y(\psi,\tau,\varepsilon)$ — 2π-періодична по ψ_s, $s=\overline{1,m}$, кусково-неперервна по τ з розривами першого роду в точках τ_ν, $\|Y(\psi,\tau,\varepsilon)\|\leq d_1\varepsilon^\beta$ для всіх $\psi\in\in R^m$, $\tau\in R$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ $(\beta=(l+1)^{-1}$, d_1 — стала), задовольняє умову Ліпшиця по ψ зі сталою $d_2\varepsilon^\beta$ і її можна визначити як границю при $j\to\infty$ послідовних наближень

$$Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q(\tau,t,\varepsilon)F_1(Y_j(\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon),t,\varepsilon),\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon)dt+$$

$$+\varepsilon\sum_{-\infty<\tau_\nu<\infty}Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)\Phi_1(Y_j(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon),\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon),\qquad(11)$$

де $j\geq 0$, $Y_0=0$, $Q(\tau,t,\varepsilon)$ — n-вимірна квадратна матриця, яка визначається рівністю

$$Q(\tau,t,\varepsilon)=\begin{cases}-\mathrm{diag}\,(Q_+(\tau,t,\varepsilon),0), & \tau<t,\\ \mathrm{diag}\,(0,Q_-(\tau,t,\varepsilon)), & \tau>t,\end{cases}$$

і на підставі (8) задовольняє нерівність

$$\|Q(\tau,t,\varepsilon)\|\leq Ke^{-\gamma|\tau-t|},\quad \tau\in R,\quad t\in R,\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0],\qquad(12)$$

а $\varphi=\varphi^\tau_{t,j}(\psi,\varepsilon)$ — розв'язок системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\tau}&=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+b(\xi(\tau,\varepsilon)+Y_j(\varphi,\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon),\quad \tau\neq\tau_\nu,\\ \Delta\varphi|\tau=\tau_\nu&=\varepsilon q(\xi(\tau_\nu,\varepsilon)+Y_j(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\end{aligned}\qquad(13)$$

який при $\tau=t$ набуває значення ψ.

Дослідимо спочатку випадок $n_0=0$, тобто випадок $Q(\tau,t,\varepsilon)=Q_-(\tau,t,\varepsilon)$ при $\tau>t$ і $Q(\tau,t,\varepsilon)=0$ при $\tau<t$, завдяки чому $\xi(\tau,\varepsilon)$ — асимптотично стійкий розв'язок системи (4). Як випливає з роботи [8], при $n_0=0$ нерівність (9) можна послабити до вигляду $\sigma_0<2$.

Далі нам буде потрібне наступне твердження, в якому $x^0=\xi(\tau^0,\varepsilon)$, а $\tilde{x}^\tau_{\tau_*}(y,\varepsilon)$ і $x^\tau_{\tau_*}(y,\psi,\varepsilon)$, $\varphi^\tau_{\tau_*}(y,\psi,\varepsilon)$ — ті розв'язки систем відповідно (4) і (1), для яких

$$\tilde{x}^{\tau_*}_{\tau_*}(y,\varepsilon)=y,\quad x^{\tau_*}_{\tau_*}(y,\psi,\varepsilon)=y,\quad \varphi^{\tau_*}_{\tau_*}(y,\psi,\varepsilon)=\psi.$$

На підставі припущень (2) функції $a,\tilde{a},A,b,p,\tilde{p},P,q$ мають обмежені частинні похідні першого порядку по x,φ і при досить малому $\varepsilon_0>0$ відображення

$$x\to x+\varepsilon p(x,\tau_\nu)+\varepsilon\tilde{p}(x,\varphi,\tau_\nu)+\varepsilon^2P(x,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),$$

$$\varphi\to\varphi+\varepsilon q(x,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon)$$

взаємно однозначне. Тому розв'язки $\tilde{x}^\tau_{\tau_*}(y,\varepsilon)$ і $x^\tau_{\tau_*}(y,\psi,\varepsilon)$, $\varphi^\tau_{\tau_*}(y,\psi,\varepsilon)$ відповідних систем існують і єдині на деякому часовому проміжку $(\tau_*-\alpha,\tau_*++\alpha)$.

Теорема 1. *Нехай:*

1) виконуються умови (2) при $\mu = -1$ *і (3);*

2) існує розв'язок $\xi(\tau, \varepsilon)$ *системи (4), який визначений для всіх* $\tau \in R$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і належить* D *разом із своїм* ρ*-околом;*

3) матрицант $Q_-(\tau, t, \varepsilon)$ *системи у варіаціях (5) задовольняє нерівність*

$$\|Q_-(\tau, t, \varepsilon)\| \le Ke^{-\gamma(\tau - t)}, \quad \tau \ge t \in R, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Тоді існують такі додатні сталі c_1, c_2, h *і* ε_0^**, що при* $\varepsilon_0 \le \varepsilon_0^*$ *для кожного* $\bar\tau \in R$ *справджуються твердження:*

а) розв'язок $x_{\bar\tau}^{\tau}(x^0, \varphi^0, \varepsilon)$, $\varphi_{\bar\tau}^{\tau}(x^0, \varphi^0, \varepsilon)$ *системи (1) визначено для всіх* $\tau \in [\bar\tau, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varphi^0 \in R^m$*, причому*

$$\|x_{\bar\tau}^{\tau}(x^0, \varphi^0, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| \le c_1 \varepsilon^{\beta}, \quad \tau \in [\bar\tau, \infty), \quad \varphi^0 \in R^m, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]; \tag{14}$$

б) при $\tau \in [\bar\tau, \infty)$, $\|y\| < h$, $\varphi^0 \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *виконується нерівність*

$$\|x_{\bar\tau}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon)\| \le c_2. \tag{15}$$

Доведення. Для функції $y_{\tau_*}^{\tau} = \tilde x_{\tau_*}^{\tau}(x^0 + y, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)$ при $\tau \ge \tau_* \ge \bar\tau$ маємо зображення

$$y_{\tau_*}^{\tau} = Q_-(\tau, \tau_*, \varepsilon)y + \int\limits_{\tau_*}^{\tau} Q_-(\tau, t, \varepsilon) F(y_{\tau_*}^{t}, t, \varepsilon)dt +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\tau_* \le \tau_\nu < \tau} Q_-(\tau, \tau_\nu, \varepsilon)\Phi(y_{\tau_*}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon),$$

з якого, як і в [6, с. 115], на підставі нерівності (3), умови 3 теореми і обмеження $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = \varepsilon\theta$ знаходимо

$$\|y_{\tau_*}^{\tau}\| \le K(1 + K\delta_1)\|y\| e^{-(\gamma - K\delta_1(1+\theta^{-1}))(\tau - \tau_*)} \le 2K\|y\| e^{-\frac{\gamma}{2}(\tau - \tau_*)}$$

при

$$\tau \ge \tau_*, \quad \delta_1 \le \min\left\{\frac{1}{2K}, \frac{\gamma}{2K(1+\theta^{-1})}\right\}, \quad \|y\| < \rho_1 = \min\left\{\frac{\rho}{4K}, \frac{\delta_2}{2K}\right\}.$$

Таким чином,

$$\|\tilde x_{\tau_*}^{\tau}(x^0 + y, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| \le 2K\|y\| e^{-\frac{\gamma}{2}(\tau - \tau_*)}, \quad \tau \ge \tau_*, \quad \|y\| < \rho_1, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{16}$$

і крива $\tilde x_{\tau_*}^{\tau}(x^0 + y, \varepsilon)$ належить D разом із своїм $\dfrac{1}{2}\rho$-околом.

Розглянемо гладку систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar x}{d\tau} = a(\bar x, \tau) + \frac{1}{\theta} p(\bar x, \tau). \tag{17}$$

Якщо через $\bar{x}^{\tau}(y^0)$ позначити той її розв'язок, для якого $\bar{x}^{\tau_*}_{\tau_*}(y^0) = y^0$, то із рівнянь (4), (17) для $\tau \in [\tau_*, \tau_* + L]$, де L — довільне фіксоване додатне число, маємо

$$\|\tilde{x}^{\tau}_{\tau_*}(x^0+y,\varepsilon) - \bar{x}^{\tau}_{\tau_*}(x^0+y)\| \le \sigma_1 \int\limits_{\tau_*}^{\tau} \|\tilde{x}^{t}_{\tau_*}(x^0+y,\varepsilon) - \bar{x}^{t}_{\tau_*}(x^0+y)\| dt +$$

$$+ \left\| \frac{1}{\theta} \int\limits_{\tau_*}^{\tau} p(\bar{x}^{t}_{\tau_*}(x^0+y), t) dt - \varepsilon \sum_{\tau_* \le \tau_\nu < \tau} p(\tilde{x}^{\tau_\nu}_{\tau_*}(x^0+y,\varepsilon), \tau_\nu) \right\|.$$

Оскільки

$$\left\| \frac{1}{\theta} \int\limits_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}} p(\bar{x}^{t}_{\tau_*}(x^0+y), t) dt - \varepsilon p(\tilde{x}^{\tau_\nu}_{\tau_*}(x^0+y,\varepsilon), \tau_\nu) \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{\theta} \int\limits_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}} \|p(\bar{x}^{t}_{\tau_*}(x^0+y), t) - p(\tilde{x}^{\tau_\nu}_{\tau_*}(x^0+y,\varepsilon), \tau_\nu)\| dt \le$$

$$\le \frac{\sigma_1}{\theta} \int\limits_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}} \|\bar{x}^{t}_{\tau_*}(x^0+y) - \tilde{x}^{t}_{\tau_*}(x^0+y,\varepsilon)\| dt + \sigma_1(2+\theta)\varepsilon^2,$$

то

$$\|\tilde{x}^{\tau}_{\tau_*}(x^0+y,\varepsilon) - \bar{x}^{\tau}_{\tau_*}(x^0+y)\| \le \sigma_1(1+\theta^{-1}) \int\limits_{\tau_*}^{\tau} \|\tilde{x}^{t}_{\tau_*}(x^0+y,\varepsilon) - \bar{x}^{t}_{\tau_*}(x^0+y)\| dt +$$

$$+ \sigma_1[(2+\theta)(L\theta^{-1}+1)+2]\varepsilon.$$

Звідси одержуємо нерівність

$$\begin{gathered} \|\tilde{x}^{\tau}_{\tau_*}(x^0+y,\varepsilon) - \bar{x}^{\tau}_{\tau_*}(x^0+y)\| \le \tilde{c}_1(L)\varepsilon, \\ \tau \in [\tau_*, \tau_*+L], \quad \|y\| < \rho_1, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \end{gathered} \tag{18}$$

зі сталою

$$\tilde{c}_1(L) = e^{\sigma_1(1+\theta^{-1})L} \sigma_1[(2+\theta)(L\theta^{-1}+1)+2].$$

Якщо вибрати додатне ε_0 настільки малим, що $\tilde{c}_1(L)\varepsilon_0 \le \dfrac{1}{4}\rho$, то при $\tau \in [\tau_*, \tau_*+L]$ і $\|y\| < \rho_1$ крива $\bar{x}^{\tau}_{\tau_*}(x^0+y)$ належатиме D разом із своїм $\dfrac{1}{4}\rho$-околом.

На підставі умови (2) з $\mu = -1$ в роботі [9] при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ встановлено оцінку

$$\|x^{\tau}_{\tau_*}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon) - \bar{x}^{\tau}_{\tau_*}(x^0 + y)\| \leq \underset{\sim}{c}_1(L)\varepsilon^{\beta} \tag{19}$$

для всіх $\tau \in [\tau_*, \tau_* + L]$, $\varphi^0 \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, причому стала $\underset{\sim}{c}_1(L)$ залежить від L, але не залежить від $\tau_*, \varphi^0, \varepsilon, y$.

Покладемо $L = \dfrac{2}{\gamma}\ln(4K)$, $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(L)$, $\underset{\sim}{c}_1 = \underset{\sim}{c}_1(L)$. Тоді за допомогою нерівностей (16), (18), (19) дістанемо

$$\|x^{\tau}_{\bar{\tau}}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| \leq \|x^{\tau}_{\bar{\tau}}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon) - \bar{x}^{\tau}_{\bar{\tau}}(x^0 + y)\| +$$

$$+ \|\bar{x}^{\tau}_{\bar{\tau}}(x^0 + y) - \tilde{x}^{\tau}_{\bar{\tau}}(x^0 + y, \varepsilon)\| + \|\tilde{x}^{\tau}_{\bar{\tau}}(x^0 + y, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| \leq$$

$$\leq (\tilde{c}_1 + \underset{\sim}{c}_1)\varepsilon^{\beta} + 2K\|y\| < K_1(\varepsilon^{\beta} + \|y\|)$$

при $\tau \in [\bar{\tau}, \bar{\tau} + L)$ і

$$\|x^{\bar{\tau}+L}_{\bar{\tau}}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon) - \xi(\bar{\tau} + L, \varepsilon)\| \leq (\tilde{c}_1 + \underset{\sim}{c}_1)\varepsilon^{\beta} + \frac{1}{2}\|y\| \leq K_2(\varepsilon^{\beta} + \|y\|),$$

де $K_2 = 2(\tilde{c}_1 + \underset{\sim}{c}_1) + 1$, $K_1 = K_2(2K + 1)$.

Аналогічно,

$$\|x^{\tau}_{\bar{\tau}+L}(x^{(1)}, \varphi^{(1)}, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| \leq \|x^{\tau}_{\bar{\tau}+L}(x^{(1)}, \varphi^{(1)}, \varepsilon) - \bar{x}^{\tau}_{\bar{\tau}+L}(x^{(1)})\| +$$

$$+ \|\bar{x}^{\tau}_{\bar{\tau}+L}(x^{(1)}) - \tilde{x}^{\tau}_{\bar{\tau}+L}(x^{(1)}, \varepsilon)\| + \|\tilde{x}^{\tau}_{\bar{\tau}+L}(x^{(1)}, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| \leq$$

$$\leq (\tilde{c}_1 + \underset{\sim}{c}_1)\varepsilon^{\beta} + 2KK_2(\varepsilon^{\beta} + \|y\|) < K_1(\varepsilon^{\beta} + \|y\|)$$

при $\tau \in [\bar{\tau} + L, \bar{\tau} + 2L)$ і

$$\|x^{\bar{\tau}+2L}_{\bar{\tau}+L}(x^{(1)}, \varphi^{(1)}, \varepsilon) - \xi(\bar{\tau} + 2L, \varepsilon)\| \leq (\tilde{c}_1 + \underset{\sim}{c}_1)\varepsilon^{\beta} + 2KK_2 e^{-\frac{\gamma}{2}L}(\varepsilon^{\beta} + \|y\|) < K_2(\varepsilon^{\beta} + \|y\|).$$

Тут $x^{(1)} = x^{\bar{\tau}+L}_{\bar{\tau}}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon)$, $\varphi^{(1)} = \varphi^{\bar{\tau}+L}_{\bar{\tau}}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon)$. За допомогою методу математичної індукції для кожного натурального $s \geq 2$ доводимо, що

$$\|x^{\tau}_{\bar{\tau}+sL}(x^{(s)}, \varphi^{(s)}, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| < K_1(\varepsilon^{\beta} + \|y\|)$$

при $\tau \in [\bar{\tau} + sL, \bar{\tau} + (s+1)L)$ і

$$\|x^{\bar{\tau}+(s+1)L}_{\bar{\tau}+sL}(x^{(s)}, \varphi^{(s)}, \varepsilon) - \xi(\bar{\tau} + (s+1)L, \varepsilon)\| < K_2(\varepsilon^{\beta} + \|y\|),$$

де

$$x^{(s)} = x_{\bar{\tau}+(s-1)L}^{\bar{\tau}+sL}(x^{(s-1)}, \varphi^{(s-1)}, \varepsilon) = x_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau}+sL}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon),$$

$$\varphi^{(s)} = \varphi_{\bar{\tau}+(s-1)L}^{\bar{\tau}+sL}(x^{(s-1)}, \varphi^{(s-1)}, \varepsilon) = \varphi_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau}+sL}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon).$$

Звідси робимо висновок, що

$$\|x_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| < K_1(\varepsilon^\beta + \|y\|) \tag{20}$$

для всіх $\tau \geq \bar{\tau}$, $\|y\| < \rho_1$, $\varphi^0 \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Нехай

$$\varepsilon_0^\beta \leq \rho(4K_1)^{-1} = \tilde{\rho}_1, \quad \|y\| < \tilde{\rho}_1.$$

Тоді крива $x_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon)$ належить D разом із своїм $\dfrac{1}{2}\rho$-околом при $\tau \geq \bar{\tau}$, $\|y\| < \rho_2 = \min\{\rho_1, \tilde{\rho}_1\}$, $\varphi^0 \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. З (20) випливає нерівність (15) з $h = \rho_2$ і нерівність (14) при $y = 0$.

Теорему доведено.

Зазначимо, що такий підхід до розбиття $[\bar{\tau}, \infty)$ на відрізки певної довжини L використовувався також в [5, 9] при доведенні оцінок вигляду (14), (15) для розв'язків багаточастотних систем.

Зафіксуємо довільне $\bar{\tau} \in R$ і розглянемо розв'язок $x_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \psi, \varepsilon)$, $\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \psi, \varepsilon)$ системи (1), який визначено для всіх $\tau \geq \bar{\tau}$, $\psi \in R^m$, $\|y\| < \rho_2$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і повільна компонента якого згідно з теоремою 1 рівномірно обмежена. Якщо позначити $y_{\bar{\tau}}^{\tau}(y, \psi, \varepsilon) = x_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \psi, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)$, де $x^0 = \xi(\bar{\tau}, \varepsilon)$, то дістанемо зображення

$$y_{\bar{\tau}}^{\tau} = Q_-(\tau, \bar{\tau}, \varepsilon)y + \int_{\bar{\tau}}^{\tau} Q_-(\tau, t, \varepsilon)F_1(y_{\bar{\tau}}^t, \varphi_{\bar{\tau}}^t, t, \varepsilon)dt +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\bar{\tau} \leq \tau_\nu < \tau} Q_-(\tau, \tau_\nu, \varepsilon)\Phi_1(y_{\bar{\tau}}^{\tau_\nu}, \varphi_{\bar{\tau}}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \tag{21}$$

в якому $y_{\bar{\tau}}^{\tau} = y_{\bar{\tau}}^{\tau}(y, \psi, \varepsilon)$, $\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau} = \varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \psi, \varepsilon)$.

Оскільки $Q_-(\tau, \bar{\tau}, \varepsilon)Q_-(\bar{\tau}, t, \varepsilon) = Q_-(\tau, t, \varepsilon)$, то при $n_0 = 0$ маємо [8]

$$Y(\psi, \tau, \varepsilon) = Q_-(\tau, \bar{\tau}, \varepsilon)\alpha(\psi, \tau, \bar{\tau}, \varepsilon) +$$

$$+ \int_{\bar{\tau}}^{\tau} Q_-(\tau, t, \varepsilon)F_1(Y(\theta_\tau^t(\psi, \varepsilon), t, \varepsilon), \theta_\tau^t(\psi, \varepsilon), t, \varepsilon)dt +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\bar{\tau} \leq \tau_\nu < \tau} Q_-(\tau, \tau_\nu, \varepsilon)\Phi_1(Y(\theta_\tau^{\tau_\nu}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon), \theta_\tau^{\tau_\nu}(\psi, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon), \tag{22}$$

де

$$\alpha(\psi,\tau,\bar\tau,\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{\bar\tau} Q_-(\bar\tau,t,\varepsilon)F_1(Y(\theta_\tau^t(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon),\theta_\tau^t(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon)dt+$$

$$+\varepsilon\sum_{\tau_\nu<\bar\tau} Q_-(\bar\tau,\tau_\nu,\varepsilon)\Phi_1(Y(\theta_\tau^{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon),\theta_\tau^{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon),$$

$$\|\alpha(\psi,\tau,\bar\tau,\varepsilon)\| \le d_1\varepsilon^\beta,$$

а $\tilde\theta = \theta_t^\tau(\psi,\varepsilon)$ — розв'язок системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{d\tilde\theta}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(\xi(\tau,\varepsilon)+Y(\tilde\theta,\tau,\varepsilon),\tilde\theta,\tau,\varepsilon), \quad \tau\ne\tau_\nu,$$
$$\Delta\tilde\theta|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(\xi(\tau_\nu,\varepsilon)+Y(\tilde\theta,\tau_\nu,\varepsilon),\tilde\theta,\tau_\nu,\varepsilon), \tag{23}$$

який при $\tau = t$ набуває значення ψ.

З (21) і (22) при $\tau\ge\bar\tau$ отримаємо рівність

$$z_{\bar\tau}^\tau = Q_-(\tau,\bar\tau,\varepsilon)(y-\alpha(\varphi_{\bar\tau}^\tau,\tau,\bar\tau,\varepsilon))+$$
$$+\int\limits_{\bar\tau}^{\tau} Q_-(\tau,t,\varepsilon)[F_1(\bar y_{\bar\tau}^t + z_{\bar\tau}^t,\varphi_{\bar\tau}^t,t,\varepsilon)-$$
$$-F_1(Y(\theta_\tau^t(\varphi_{\bar\tau}^\tau,\varepsilon),t,\varepsilon),\theta_\tau^t(\varphi_{\bar\tau}^\tau,\varepsilon),t,\varepsilon)]dt+$$
$$+\varepsilon\sum_{\bar\tau\le\tau_\nu<\tau} Q_-(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)[\Phi_1(\bar y_{\bar\tau}^{\tau_\nu}+z_{\bar\tau}^{\tau_\nu},\varphi_{\bar\tau}^{\tau_\nu},\tau_\nu,\varepsilon)-$$
$$-\Phi_1(Y(\theta_\tau^{\tau_\nu}(\varphi_{\bar\tau}^\tau,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon),\theta_\tau^{\tau_\nu}(\varphi_{\bar\tau}^\tau,\varepsilon),t,\varepsilon)], \tag{24}$$

в якій $z_{\bar\tau}^\tau = y_{\bar\tau}^\tau - \bar y_{\bar\tau}^\tau$, $\bar y_{\bar\tau}^\tau = Y(\varphi_{\bar\tau}^\tau,\tau,\varepsilon)$. Позначимо

$$u_\tau^t = \varphi_{\bar\tau}^t - \theta_\tau^t(\varphi_{\bar\tau}^\tau,\varepsilon), \quad t\ge\bar\tau, \quad \tau\ge\bar\tau,$$

$$M_T = \sup_{\tau\in[\bar\tau,\bar\tau+T)}(\|z_{\bar\tau}^\tau\|e^{\gamma_1(\tau-\bar\tau)}),$$

де $(0,\gamma)\ni\gamma_1$ — число, яке буде означене нижче, T — довільне додатне число.

Лема 1. *Якщо $\sigma_0 < 2$, виконуються умови (2) при $\mu = 0$, (3), (9) і (12) при $n_0 = 0$, то для довільного $\gamma_2 > 0$ існує таке $\bar\varepsilon_0 = \bar\varepsilon_0(\gamma_2)$, що при $\varepsilon_0 \leq \bar\varepsilon_0$ для всіх $t \in [\bar\tau, \bar\tau + T)$, $\tau \in [\bar\tau, \bar\tau + T)$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\|y\| < \rho_2$ справджується нерівність*

$$\|u_\tau^t\| \leq c_3 M_T e^{\gamma_2|t-\tau|-\gamma_1(\min(t,\tau)-\bar\tau)} \tag{25}$$

з деякою додатною сталою c_3.

Доведення. Оскільки

$$\varphi_{\bar\tau}^{\tau} = \psi + \int\limits_{\bar\tau}^{\tau}\left[\frac{\omega(l)}{\varepsilon} + b(\xi(l,\varepsilon) + \bar y_{\bar\tau}^{l} + z_{\bar\tau}^{l}, \varphi_{\bar\tau}^{l}, l, \varepsilon)\right]dl +$$

$$+\varepsilon\sum_{\bar\tau\leq\tau_\nu<\tau} q(\xi(\tau_\nu,\varepsilon) + \bar y_{\bar\tau}^{\tau_\nu} + z_{\bar\tau}^{\tau_\nu}, \varphi_{\bar\tau}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \tag{26}$$

$$\theta_{\bar\tau}^{\tau}(\psi,\varepsilon) = \psi + \int\limits_{\bar\tau}^{\tau}\left[\frac{\omega(l)}{\varepsilon} + b(\xi(l,\varepsilon) + Y(\theta_{\bar\tau}^{l}(\psi,\varepsilon), l, \varepsilon), \theta_{\bar\tau}^{l}(\psi,\varepsilon), l, \varepsilon)\right]dl +$$

$$+\varepsilon\sum_{\bar\tau\leq\tau_\nu<\tau} q(\xi(\tau_\nu,\varepsilon) + Y(\theta_{\bar\tau}^{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon), \theta_{\bar\tau}^{\tau_\nu}(\psi,\varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon), \tag{27}$$

то на підставі нерівності

$$\|Y(\theta_\tau^l(\varphi_{\bar\tau}^\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) - \bar y_{\bar\tau}^l\| \leq d_2\varepsilon^\beta\|u_\tau^l\|$$

із (26), (27) при $\tau \geq t+1$ дістанемо

$$\|u_\tau^t\| \leq \sigma_1\int\limits_t^\tau(\|z_{\bar\tau}^l\| + d_2\varepsilon^\beta\|u_\tau^l\|)dl + \varepsilon\sigma_1\sum_{t\leq\tau_\nu<\tau}(\|z_{\bar\tau}^{\tau_\nu}\| + d_2\varepsilon^\beta\|u_\tau^{\tau_\nu}\|) +$$

$$+\sum_{k\neq0}\sum_{s=0}^{s_0}\left[\left\|\int\limits_{T_s}\tilde b_k\Omega_k(l,\bar\tau,\varepsilon)dl\right\| + \left\|\varepsilon\sum_{\alpha_s\leq\tau_\nu<\beta_s}\tilde q_{k\nu}\Omega_k(\tau_\nu,\bar\tau,\varepsilon)\right\|\right]. \tag{28}$$

Тут

$$\tilde b_k = b_k(\xi(l,\varepsilon) + Y(\theta_\tau^l(\varphi_{\bar\tau}^\tau,\varepsilon), l, \varepsilon), l, \varepsilon)e^{i(k,\tilde\varphi_{\bar\tau}^l)}(1 - e^{i(k,u_\tau^l)}),$$

$$\tilde q_{k\nu} = q_k(\xi(\tau_\nu,\varepsilon) + Y(\theta_\tau^{\tau_\nu}(\varphi_{\bar\tau}^\tau,\varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon)e^{i(k,\tilde\varphi_{\bar\tau}^{\tau_\nu})}(1 - e^{i(k,u_\tau^{\tau_\nu})}),$$

$$\tilde\varphi_{\bar\tau}^l = \varphi_{\bar\tau}^l - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\bar\tau}^l\omega(z)dz, \quad \Omega_k(l,\bar\tau,\varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\bar\tau}^l(k,\omega(z))dz},$$

i — уявна одиниця, b_k і q_k — коефіцієнти Фур'є 2π-періодичних по φ_r, $r = \overline{1,m}$, функцій b і q, (k,ω) — скалярний добуток векторів, s_0 — ціла частина числа $\tau - t - 1$, $T_s = [t+s, t+ +s+1] = [\alpha_s, \beta_s]$ при $0 \le s \le s_0 - 1$ і $T_{s_0} = [t + s_0 - 1, \tau] = [\alpha_{s_0}, \beta_{s_0}]$.

При прийнятих для частот $\omega_r(\tau)$, $r = \overline{1,m}$, припущеннях мають місце оцінки [10]

$$\|J_k\| \le \bar{\sigma}\varepsilon^{\beta}\left[\sup_{[\bar{t},\bar{t}+L]}\|f(t,\varepsilon)\| + \frac{1}{\|k\|}\left(\sup_{\substack{[\bar{t},\bar{t}+L]\\ t\ne\tau_\nu}}\left\|\frac{d}{dt}f(t,\varepsilon)\right\| + \sum_{\bar{t}\le\tau_\nu<\bar{t}+L}\|f_\nu(\varepsilon)\|\right)\right], \tag{29}$$

$$\|\tilde{J}_k\| \le \bar{\sigma}\varepsilon^{\beta}\|k\|\left(\sup_{[\bar{t},\bar{t}+L]}\|f(t,\varepsilon)\| + \sup_{\substack{[\bar{t},\bar{t}+L]\\ t\ne\tau_\nu}}\left\|\frac{d}{dt}f(t,\varepsilon)\right\| + \sum_{\bar{t}\le\tau_\nu<\bar{t}+L}\|f_\nu(\varepsilon)\|\right) \tag{30}$$

осциляційних інтеграла і суми

$$J_k = \int\limits_{\bar{t}}^{\bar{t}+\tau} f(t,\varepsilon)\Omega_k(t,\bar{\tau},\varepsilon)dt, \quad \tilde{J}_k = \varepsilon\sum_{\bar{t}\le\tau_\nu<\bar{t}+\tau} f(\tau_\nu,\varepsilon)\Omega_k(\tau_\nu,\bar{\tau},\varepsilon),$$

в яких $\tau \in [0, L]$, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(L)$ — стала, $\bar{t} \in R$, $\bar{\tau} \in R$, $0 \ne k$ — вектор з цілочисловими координатами, $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = \varepsilon\theta$, матриця $f(t,\varepsilon)$ неперервно диференційовна по $t \in R$ за винятком точок τ_ν, причому

$$\Delta f|_{t=\tau_\nu} = f_\nu(\varepsilon).$$

На підставі оцінок (29) і (30) з (28) одержуємо нерівність

$$\|u_\tau^t\| \le \sigma_1\int\limits_t^\tau(\|z_{\bar{\tau}}^l\| + d_2\varepsilon^\beta\|u_\tau^l\|)dl + \varepsilon\sigma_1\sum_{t\le\tau_\nu<\tau}(\|z_{\bar{\tau}}^{\tau_\nu}\| + d_2\varepsilon^\beta\|u_\tau^{\tau_\nu}\|) +$$

$$+\bar{\sigma}\varepsilon^\beta\sum_{k\ne0}\left[\|k\|\sup_G\|b_k\| + \sup_G\left\|\frac{\partial b_k}{\partial x}\right\| + \sup_G\left\|\frac{\partial b_k}{\partial\tau}\right\| + \|k\|^2\left(\|k\|\sup_G\|q_k\| + \sup_G\left\|\frac{\partial q_k}{\partial x}\right\| +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sup_G\left\|\frac{\partial q_k}{\partial\tau}\right\|\right)\right](1+5\sigma_1)\sum_{s=0}^{s_0}\left(\sup_{l\in T_s}\|u_\tau^l\| + \sup_{l\in T_s}\left\|\frac{d}{dl}u_\tau^l\right\|\right) +$$

$$+\bar{\sigma}\varepsilon^\beta\sum_{t\le\tau_\nu<\tau}\sum_{k\ne0}\left(\frac{1}{\|k\|}\|\Delta(\tilde{b}_k)|_{l=\tau_\nu}\| + \|k\|\|\Delta(\tilde{q}_k)|_{l=\tau_\nu}\|\right). \tag{31}$$

Оскільки

$$\|\Delta(\tilde{b}_k)|_{l=\tau_\nu}\| = \|\tilde{b}_k|_{l=\tau_\nu+0} - \tilde{b}_k|_{l=\tau_\nu}\| \le$$

$$\le \left(\|k\|^2 \sup_G \|b_k\| + \|k\| \sup_G \left\|\frac{\partial b_k}{\partial x}\right\|\right) \varepsilon\sigma_1(\|u_\tau^{\tau_\nu}\| + \|\Delta(u_\tau^l)|_{l=\tau_\nu}\|)$$

і

$$\|\Delta(u_\tau^l)|_{l=\tau_\nu}\| = \|\varphi_{\bar\tau}^{\tau_\nu+0} - \varphi_{\bar\tau}^{\tau_\nu} - (\theta_\tau^{\tau_\nu+0}(\varphi_{\bar\tau}^\tau, \varepsilon) - \theta_\tau^{\tau_\nu}(\varphi_{\bar\tau}^\tau, \varepsilon))\| =$$

$$= \varepsilon\|q(\xi(\tau_\nu, \varepsilon) + \bar{y}_{\bar\tau}^{\tau_\nu} + z_{\bar\tau}^{\tau_\nu}, \varphi_\tau^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon) - q(\xi(\tau_\nu, \varepsilon) + Y(\theta_\tau^{\tau_\nu}(\varphi_{\bar\tau}^\tau, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon),$$

$$\theta_\tau^{\tau_\nu}(\varphi_{\bar\tau}^\tau, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon)\| \le \varepsilon\sigma_1(\|z_{\bar\tau}^{\tau_\nu}\| + (d_2\varepsilon^\beta + 1)\|u_\tau^{\tau_\nu}\|), \tag{32}$$

то при $d_2\varepsilon_0^\beta \le 1$

$$\|\Delta(\tilde{b}_k)|_{l=\tau_\nu}\| \le \varepsilon 3\sigma_1 \left(\|k\|^2 \sup_G \|b_k\| + \|k\| \sup_G \left\|\frac{\partial b_k}{\partial x}\right\|\right)(\|u_\tau^{\tau_\nu}\| + \|z_{\bar\tau}^{\tau_\nu}\|). \tag{33}$$

Оцінка (33) залишається справедливою і тоді, коли в ній замість $\tilde{b}_k$ і b_k покласти відповідно $\tilde{q}_k$ і q_k.

Таким чином, згідно з припущеннями (2) із (31) отримаємо нерівність

$$\|u_\tau^t\| \le \sigma_1 \int_t^\tau (\|z_{\bar\tau}^l\| + d_2\varepsilon^\beta\|u_\tau^l\|)dl +$$

$$+ \varepsilon(\sigma_1 + c_4\varepsilon^\beta) \sum_{t \le \tau_\nu < \tau} (\|z_{\bar\tau}^{\tau_\nu}\| + d_2\varepsilon^\beta\|u_\tau^{\tau_\nu}\|) +$$

$$+ c_4\varepsilon^\beta \sum_{s=0}^{s_0} \left(\sup_{l\in T_s}\|u_\tau^l\| + \sup_{l\in T_s}\left\|\frac{d}{dl}u_\tau^l\right\|\right) \tag{34}$$

зі сталою c_4, не залежною від $\varepsilon, \bar\tau, \tau, t$.

Із (26), (27) випливає

$$\left\|\frac{d}{dl}u_\tau^l\right\| \le \sup_G\left\|\frac{\partial b}{\partial x}\right\|(\|z_{\bar\tau}^l\| + d_2\varepsilon^\beta\|u_\tau^l\|) +$$

$$+ \sup_G\left\|\frac{\partial b}{\partial\varphi}\right\|\|u_\tau^l\| \le 2\sigma_1(\|z_{\bar\tau}^l\| + \|u_\tau^l\|) \quad \text{при } l \ne \tau_\nu. \tag{35}$$

Розглянемо нерівність [8]

$$\sup_{T_s}\|u^l_\tau\| \le \sup_{(\alpha_s,\tau_1]}\|u^l_\tau\| - \inf_{(\alpha_s,\tau_1]}\|u^l_\tau\| + \sum_{\nu=1}^{g-1}\left(\sup_{(\tau_\nu,\tau_{\nu+1}]}\|u^l_\tau\| - \inf_{(\tau_\nu,\tau_{\nu+1}]}\|u^l_\tau\|\right)+$$

$$+\sup_{(\tau_g,\beta_s]}\|u^l_\tau\| - \inf_{(\tau_g,\beta_s]}\|u^l_\tau\| + \int_{\alpha_s}^{\beta_s}\|u^l_\tau\|dl + \sum_{\nu=1}^{g}\left|\Delta(\|u^l_\tau\|)\Big|_{l=\tau_\nu}\right|,$$

де g — кількість імпульсів $\tau_1, ..., \tau_g$ на відрізку $T_s = [\alpha_s, \beta_s]$.

Оскільки згідно з (35)

$$\sup_{(\tau_\nu,\tau_{\nu+1}]}\|u^l_\tau\| - \inf_{(\tau_\nu,\tau_{\nu+1}]}\|u^l_\tau\| \le \int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}}\left|\frac{d}{dl}\|u^l_\tau\|\right|dl \le$$

$$\le \int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}}\left\|\frac{d}{dl}u^l_\tau\right\|dl \le 2\sigma_1\int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}}(\|z^l_{\bar\tau}\| + \|u^l_\tau\|)dl,$$

то, використовуючи нерівності (32) і

$$\Delta(\|u^l_\tau\|)|_{l=\tau_\nu} \le \|\Delta(u^l_\tau)\big|_{l=\tau_\nu}\|,$$

одержуємо

$$\sup_{T_s}\|u^l_\tau\| \le (1+2\sigma_1)\int_{\alpha_s}^{\beta_s}\Big(\|z^l_{\bar\tau}\| + \|u^l_\tau\|\Big)dl + 2\sigma_1\varepsilon\sum_{\alpha_s\le\tau_\nu<\beta_s}(\|z^{\tau_\nu}_{\bar\tau}\| + \|u^{\tau_\nu}_\tau\|). \qquad (36)$$

Отже, на підставі (35), (36) і нерівностей

$$\|z^l_{\bar\tau}\| \le M_T e^{-\gamma_1(l-\bar\tau)}, \quad \sum_{s=0}^{s_0} e^{-\gamma_1(t+s-\bar\tau)} < \frac{e^{\gamma_1}}{e^{\gamma_1}-1}e^{-\gamma_1(t-\bar\tau)},$$

$$\varepsilon\sum_{t\le\tau_\nu<\tau} e^{-\gamma_1(\tau_\nu-\bar\tau)} \le \frac{e^{\gamma_1\theta\varepsilon_0}}{\gamma_1\theta}e^{-\gamma_1(t-\bar\tau)}$$

із (31) при $\tau \ge t+1$ дістаємо оцінку

$$\|u^t_\tau\| \le c_5\left(\varepsilon^\beta\int_t^\tau\|u^l_\tau\|dl + \varepsilon^{\beta+1}\sum_{t\le\tau_\nu<\tau}\|u^{\tau_\nu}_\tau\| + e^{-\gamma_1(t-\bar\tau)}M_T\right),$$

в якій стала c_5 не залежить від ε і $\bar{\tau}$. Звідси випливає нерівність

$$h(t) \le c_5 M_T + c_5 \varepsilon^{\beta} \int_t^{\tau} h(l) dl + c_5 \varepsilon^{1+\beta} \sum_{t \le \tau_\nu < \tau} h(\tau_\nu) \tag{37}$$

для $t \in [\bar{\tau}, \tau - 1]$, де $h(t) = \|u_\tau^t\| e^{\gamma_1 (t - \bar{\tau})}$.

Якщо ж $\tau \in [t, t+1]$, то з (26) і (27) одержуємо нерівність

$$\|u_\tau^t\| \le \int_t^{\tau} \left[\sup_G \left\| \frac{\partial b}{\partial x} \right\| (\|z_{\bar{\tau}}^l\| + d_2 \varepsilon^{\beta} \|u_\tau^l\|) + \sup_G \left\| \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right\| \|u_\tau^l\| \right] dl +$$

$$+ \varepsilon \sum_{t \le \tau_\nu < \tau} \left[\sup_G \left\| \frac{\partial q}{\partial x} \right\| (\|z_{\bar{\tau}}^{\tau_\nu}\| + d_2 \varepsilon^{\beta} \|u_\tau^{\tau_\nu}\|) + \sup_G \left\| \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right\| \|u_\tau^{\tau_\nu}\| \right],$$

або

$$\|u_\tau^t\| \le 2\sigma_1 \int_t^{\tau} \|u_\tau^l\| dl + 2\sigma_1 \varepsilon \sum_{t \le \tau_\nu < \tau} \|u_\tau^{\tau_\nu}\| + c_6 M_T e^{-\gamma_1 (t - \bar{\tau})}$$

при $\tau \in [t, t+1]$. У термінах $h(t)$ остання нерівність набирає вигляду

$$h(t) \le c_6 M_T + 2\sigma_1 \int_t^{\tau} h(l) dl + 2\sigma_1 \varepsilon \sum_{t \le \tau_\nu < \tau} h(\tau_\nu), \quad t \in [\tau - 1, \tau],$$

і згідно з [6] її розв'язок задовольняє оцінку

$$h(t) \le c_7 M_T, \quad t \in [\tau - 1, \tau], \tag{38}$$

зі сталою $c_7 = 2 c_6 e^{2\sigma_1 (1 + \theta^{-1})}$.

Якщо тепер повернутись до нерівності (37), то, враховуючи (38), отримуємо

$$h(t) \le c_8 M_T + c_5 \varepsilon^{\beta} \int_t^{\tau - 1} h(l) dl + c_5 \varepsilon^{1+\beta} \sum_{t \le \tau_\nu < \tau - 1} h(\tau_\nu), \quad t \in [\bar{\tau}, \tau - 1],$$

де $c_8 = c_5 (1 + c_7 \varepsilon_0^{\beta} (1 + 2\theta^{-1}))$, або

$$h(t) \le c_8 M_T (1 + c_5 \varepsilon_0^{\beta}) e^{c_5 (1 + \theta^{-1})} \varepsilon_0^{\beta} (\tau - t - 1), \quad t \in [\bar{\tau}, \tau - 1]. \tag{39}$$

Отже, якщо покласти

$$c_3 = \max\{c_7, c_8 (1 + c_5 \varepsilon_0^{\beta}) e^{-\gamma_2}\}, \quad \varepsilon_0^{\beta} \le \frac{\gamma_2}{c_5 (1 + \theta^{-1})},$$

то із (38) і (39) одержимо оцінку (25) для всіх $t \in [\bar{\tau}, \tau]$. У випадку $t > \tau$ оцінка (25) доводиться аналогічно.

Лему доведено.

Наступна теорема обґрунтовує експоненціальне прямування при $\tau \to \infty$ до інтегрального многовиду $X(\psi, \tau, \varepsilon) = Y(\psi, \tau, \varepsilon) + \xi(\tau, \varepsilon)$ системи (1) повільної компоненти кожного її розв'язку $x_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon)$, $\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon)$ з досить малим $\|y\|$.

Теорема 2. *Якщо існує розв'язок $\xi(\tau, \varepsilon)$ системи (4), який визначений при $\tau \in R$, $\varepsilon \in \in (0, \varepsilon_0]$ і належить D разом із своїм ρ-околом, та виконуються умови леми 1, то для довільного додатного $\gamma_1 < \gamma\left(1 - \dfrac{\sigma_0}{2}\right)$ можна вказати такі $\underset{\sim}{\varepsilon}_0 = \underset{\sim}{\varepsilon}_0(\gamma_1) > 0$ і $\rho_3 = = \rho_3(\gamma_1) > 0$, що для всіх $\tau \geq \bar{\tau} \in R$, $\varphi^0 \in R^m$, $\|y\| < \rho_3$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, де $\varepsilon_0 \leq \underset{\sim}{\varepsilon}_0$, виконується нерівність*

$$\|x_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon) - X(\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon)\| \leq c_9 e^{-\gamma_1(\tau - \bar{\tau})} \tag{40}$$

зі сталою c_9, не залежною від $\bar{\tau}$, φ^0, ε, y.

Доведення. Згідно з теоремою 1 розв'язок $x_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon)$, $\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon)$ системи (1) визначено для всіх $\tau \in [\bar{\tau}, \infty)$, $\varphi^0 \in R^m$, $\|y\| < \rho_2$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при досить малих $\rho_2 > 0$ і $\varepsilon_0 > 0$. Тому функції $y_{\bar{\tau}}^{\tau} = x_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)$, $\bar{y}_{\bar{\tau}}^{\tau} = Y(\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon)$ і $z_{\bar{\tau}}^{\tau} = y_{\bar{\tau}}^{\tau} - \bar{y}_{\bar{\tau}}^{\tau}$ також визначені при $\tau \in [\bar{\tau}, \infty)$.

Із (24) для $\tau \geq \bar{\tau}$ одержимо

$$\|z_{\bar{\tau}}^{\tau}\| \leq K e^{-\gamma(\tau - \bar{\tau})}(\|y\| + d_1 \varepsilon^{\beta}) + K \int\limits_{\bar{\tau}}^{\tau} e^{-\gamma(\tau - t)}[(\tilde{c}_0 + \delta_1 + \varepsilon\sigma_1)(\|z_{\bar{\tau}}^{t}\| + d_2 \varepsilon^{\beta}\|u_{\tau}^{t}\|) +$$

$$+ \varepsilon\sigma_1\|u_{\tau}^{t}\|]dt + \varepsilon K \sum_{\bar{\tau} \leq \tau_\nu < \tau} e^{-\gamma(\tau - \tau_\nu)}[(\underset{\sim}{c}_0 + \delta_1 + \varepsilon\sigma_1)(\|z_{\bar{\tau}}^{\tau_\nu}\| + d_2\varepsilon^{\beta}\|u_{\tau}^{\tau_\nu}\|) + \varepsilon\sigma_1\|u_{\tau}^{\tau_\nu}\|] +$$

$$+ \left\| \int\limits_{\bar{\tau}}^{\tau} Q_-(\tau, t, \varepsilon)[\tilde{a}(\xi(t, \varepsilon) + Y(\theta_{\tau}^{t}(\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}, \varepsilon), t, \varepsilon), \theta_{\tau}^{t}(\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}, \varepsilon), t) - \right.$$

$$\left. - \tilde{a}(\xi(t, \varepsilon) + Y(\theta_{\tau}^{t}(\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}, \varepsilon), t, \varepsilon), \varphi_{\bar{\tau}}^{t}, t)]dt \right\| + \left\| \varepsilon \sum_{\bar{\tau} \leq \tau_\nu < \tau} Q_-(\tau, \tau_\nu, \varepsilon)[\tilde{p}(\xi(\tau_\nu, \varepsilon) + \right.$$

$$\left. + Y(\theta_{\tau}^{\tau_\nu}(\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon), \theta_{\tau}^{\tau_\nu}(\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}, \varepsilon), \tau_\nu) - \tilde{p}(\xi(\tau_\nu, \varepsilon) + Y(\theta_{\tau}^{\tau_\nu}(\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon), \varphi_{\bar{\tau}}^{\tau_\nu}, \tau_\nu)] \right\|$$

при $\|y\| < \dfrac{1}{2}\delta_2$ і $d_1\varepsilon_0 < \dfrac{1}{2}\delta_2$, де

$$\tilde{c}_0 = \sup_G \left\| \frac{\partial \tilde{a}(x, \varphi, \tau)}{\partial x} \right\|, \quad \underset{\sim}{c}_0 = \sup_G \left\| \frac{\partial \tilde{p}(x, \varphi, \tau)}{\partial x} \right\|.$$

Зафіксуємо довільне $T > 0$ і припустимо, що $\tau \in [\bar{\tau}, \bar{\tau} + T) = N_T$. Якщо ліву і праву частини останньої нерівності помножити на $e^{\gamma_1(\tau - \bar{\tau})}$, то на підставі леми 1 дістанемо оцінку

$$M_T \le K(\|y\| + d_1\varepsilon^\beta) + K(\tilde{c}_0 + \delta_1 + \varepsilon\sigma_1) M_T \sup_{\tau \in N_T} \int\limits_{\bar{\tau}}^{\tau} e^{-\gamma(\tau - t) + \gamma_1(\tau - \bar{\tau})} (e^{-\gamma_1(t - \bar{\tau})} +$$

$$+ d_2 \varepsilon^\beta c_3 e^{\gamma_2(\tau - t) - \gamma_1(t - \bar{\tau})}) dt + K(\underset{\sim}{c}_0 + \delta_1 + \varepsilon\sigma_1)\varepsilon \times$$

$$\times \sup_{\tau \in N_T} \sum_{\bar{\tau} \le \tau_\nu < \tau} (e^{-\gamma_1(\tau_\nu - \bar{\tau})} + d_2 \varepsilon^\beta c_3 e^{\gamma_2(\tau - \tau_\nu) - \gamma_1(\tau_\nu - \bar{\tau})}) e^{-\gamma(\tau - \tau_\nu) + \gamma_1(\tau - \bar{\tau})} +$$

$$+ \frac{c_2}{\gamma - \gamma_1 - \gamma_2} K M_T (1 + 2\theta^{-1})\varepsilon + \sup_{\tau \in N_T} \sum_{s=0}^{s_0} \sum_{k \ne 0} (\|J_{sk}\| + \|\tilde{J}_{sk}\|) \tag{41}$$

при $\gamma - \gamma_1 - \gamma_2 > 0$ і $(\gamma - \gamma_1 - \gamma_2)\theta\varepsilon_0 \le 1$, де

$$J_{sk} = \int\limits_{\tilde{\alpha}_s}^{\tilde{\beta}_s} Q(\tau, t, \varepsilon) e^{\gamma_1(\tau - \bar{\tau})} a_k(\xi(t, \varepsilon) + Y(\theta_\tau^t(\varphi_{\bar{\tau}}^\tau, \varepsilon), t, \varepsilon), t)(1 - e^{i(k, u_\tau^t)}) \Omega_k(t, \bar{\tau}, \varepsilon) dt,$$

$$\tilde{J}_{sk} = \varepsilon \sum_{\tilde{\alpha}_s \le \tau_\nu < \tilde{\beta}_s} Q(\tau, \tau_\nu, \varepsilon) e^{\gamma_1(\tau - \bar{\tau})} \times$$

$$\times p_k(\xi(\tau_\nu, \varepsilon) + Y(\theta_\tau^{\tau_\nu}(\varphi_{\bar{\tau}}^\tau, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon), \tau_\nu)(1 - e^{i(k, u_\tau^{\tau_\nu})}) \Omega_k(\tau_\nu, \bar{\tau}, \varepsilon),$$

s_0 — ціла частина числа $\tau - \bar{\tau}$, $[\tilde{\alpha}_s, \tilde{\beta}_s] = \tilde{T}_s = [\bar{\tau} + s, \bar{\tau} + s + 1]$ при $0 \le s \le s_0 - 1$ і $[\tilde{\alpha}_{s_0}, \tilde{\beta}_{s_0}] = \tilde{T}_{s_0} = [\bar{\tau} + s_0, \tau]$.

Враховуючи нерівності (29), (31), (32) і (35), одержуємо

$$\|J_{sk}\| \le \tilde{c}_{10} \left(\|k\| \sup_G \|a_k\| + \sup_G \left\| \frac{\partial a_k}{\partial x} \right\| + \sup_G \left\| \frac{\partial a_k}{\partial \tau} \right\| \right) \varepsilon^\beta L(s, \tau, \bar{\tau}),$$

де

$$L(s, \tau, \bar{\tau}) = e^{-(\gamma - \gamma_1)(\tau - \bar{\tau})} \left[\left(\sup_{T_s} \|u_\tau^t\| + \sup_{T_s} \|z_{\bar{\tau}}^t\| \right) e^{\gamma s} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \sum_{\tilde{\alpha}_s \le \tau_\nu < \tilde{\beta}_s} (\|u_\tau^{\tau_\nu}\| + \|z_\tau^{\tau_\nu}\|) e^{\gamma(\tau_\nu - \bar{\tau})} \right],$$

а стала $\tilde{c}_{10}$ не залежить від ε, k і s. За допомогою обмеження на коефіцієнти Фур'є функції $\tilde{a}(x,\varphi,\tau)$, леми 1 і умови $\tau_{\nu+1}-\tau_\nu=\varepsilon\theta$ дістанемо оцінку

$$\sup_{\tau\in N_T}\sum_{s=0}^{s_0}\sum_{k\neq 0}\|J_{sk}\|\leq \tilde{c}_{11}\varepsilon^\beta M_T \tag{42}$$

зі сталою $\tilde{c}_{11}$, не залежною від ε.

Використовуючи оцінку (30) осциляційної суми, аналогічно доводимо нерівність

$$\|\tilde{J}_{sk}\|\leq \underset{\sim}{c}_{10}\|k\|^2\left(\|k\|\sup_G\|p_k\|+\sup_G\left\|\frac{\partial p_k}{\partial x}\right\|+\sup_G\left\|\frac{\partial p_k}{\partial \tau}\right\|\right)\varepsilon^\beta L(s,\tau,\bar{\tau}),$$

яка на підставі леми 1 приводить до оцінки

$$\sup_{\tau\in N_T}\sum_{s=0}^{s_0}\sum_{k\neq 0}\|\tilde{J}_{sk}\|\leq \underset{\sim}{c}_{11}\varepsilon^\beta M_T, \tag{43}$$

в якій стала $\underset{\sim}{c}_{11}$ не залежить від ε.

З урахуванням (42), (43) із нерівності (41) одержимо нерівність

$$M_T\leq K(\|y\|+d_1\varepsilon_0^\beta)+\left[\sigma_0\frac{\gamma}{2(\gamma-\gamma_1)}+\delta_1\frac{K(1+\theta^{-1})}{\gamma-\gamma_1}+c_{12}\varepsilon_0^\beta\right]M_T. \tag{44}$$

Зафіксуємо довільне додатне $\gamma_1<\gamma\left(1-\dfrac{\sigma_0}{2}\right)$. Тоді

$$\sigma_0\frac{\gamma}{2(\gamma-\gamma_1)}=\gamma_0<1.$$

Покладемо $\gamma_2=\dfrac{1}{2}(\gamma-\gamma_1)$. Виберемо далі $\varepsilon_0>0$ і $\delta_1>0$ настільки малими, щоб

$$c_{12}\varepsilon_0^\beta\leq\frac{1-\gamma_0}{3},\quad \delta_1\frac{K(1+\theta^{-1})}{\gamma-\gamma_1}\leq\frac{1-\gamma_0}{3}.$$

За вибраним δ_1 знаходимо $\delta_2=\delta_2(\delta_1)>0$ так, щоб виконувалась нерівність (3). Нехай тепер

$$\|y\|<\min\left\{\rho_2,\frac{\delta_2}{2}\right\}=\rho_3,\quad d_1\varepsilon_0^\beta\leq\rho_3.$$

Тоді з нерівності (44) дістанемо

$$M_T<2K\rho_3+\frac{\gamma_0+2}{3}M_T,$$

або

$$M_T<\frac{6K\rho_3}{1-\gamma_0}=c_9.$$

Отже, при $\tau \in [\bar{\tau}, \bar{\tau} + T)$ виконується нерівність

$$\|z_{\bar{\tau}}^{\tau}\| \leq c_9 e^{-\gamma_1(\tau - \bar{\tau})}. \tag{45}$$

Внаслідок довільності $T > 0$ нерівність (45) справджується для всіх $\tau \in [\bar{\tau}, \infty)$. Враховуючи, що $X(\psi, \tau, \varepsilon) = \xi(\tau, \varepsilon) + Y(\psi, \tau, \varepsilon)$ і

$$x_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon) = \xi(\tau, \varepsilon) + z_{\bar{\tau}}^{\tau} + Y(\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon),$$

із (45) одержуємо нерівність (40).

Теорему доведено.

Нехай тепер $n_0 \geq 1$. Зрозуміло, що в цьому випадку не для всіх досить малих $y \in R^n$ повільна компонента розв'язку $x_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon), \varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon)$ буде обмеженою для всіх $\tau \in [\bar{\tau}, \infty)$. Нижче при кожних $\varphi^0 \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ми побудуємо множину початкових значень повільної компоненти, для яких $x_{\bar{\tau}}^{\tau}(x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon)$ буде обмеженою при $\tau \geq \bar{\tau}$. У просторі R^{n+m} будуть побудовані також поверхні, яким належать зазначені розв'язки.

Задамо довільний $(n - n_0)$-вимірний вектор $h = (h_1, ..., h_{n-n_0})$ і з нього утворимо n-вимірний вектор

$$\bar{h} = (0, h) = (0, ..., 0, h_1, ..., h_{n-n_0}).$$

Розглянемо послідовність $\{Z_j(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h)\}_{j=0}^{\infty}$, яка визначається формулою

$$Z_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h) = \bar{Q}(\tau, \bar{\tau}, \varepsilon)\bar{h} + \int_{\bar{\tau}}^{\infty} Q(\tau, t, \varepsilon) F_1(Z_j(\bar{\varphi}_{\tau,j}^{t}, t, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \bar{\varphi}_{\tau,j}^{t}, t, \varepsilon) dt +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\bar{\tau} \leq \tau_\nu} Q(\tau, \tau_\nu, \varepsilon) \Phi_1(Z_j(\bar{\varphi}_{\tau,j}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \bar{\varphi}_{\tau,j}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon). \tag{46}$$

Тут $\tau \geq \bar{\tau}$, $\bar{Q}(\tau, \bar{\tau}, \varepsilon) = \operatorname{diag}(0, Q_-(\tau, \bar{\tau}, \varepsilon))$, 0 — n_0-вимірна квадратна нуль-матриця, $Z_0 = 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, а $\bar{\varphi}_{t,j}^{\tau} = \bar{\varphi}_{t,j}^{\tau}(\psi, \varepsilon, \bar{\tau}, h)$ — розв'язок системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{d\bar{\varphi}_{t,j}^{\tau}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(\xi(\tau, \varepsilon) + Z_j(\bar{\varphi}_{t,j}^{\tau}, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \bar{\varphi}_{t,j}^{\tau}, \tau, \varepsilon), \quad \tau \neq \tau_\nu,$$

$$\Delta(\bar{\varphi}_{t,j}^{\tau})|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(\xi(\tau_\nu, \varepsilon) + Z_j(\bar{\varphi}_{t,j}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \bar{\varphi}_{t,j}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon), \tag{47}$$

який при $\tau = t$ набуває значення $\psi \in R^m$.

Безпосередньою підстановкою легко переконатись, що коли функція $Z_j(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h)$ обмежена, неперервно диференційовна по $\psi \in R^m$ та кусково-неперервна по $\tau \in [\bar{\tau}, \infty)$ з точками розриву першого роду τ_ν, то на підставі рівності

$$\bar{\varphi}_{\tau,j}^{t}(\bar{\varphi}_{\bar{\tau},j}^{\tau}(\psi, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \varepsilon, \bar{\tau}, h) = \bar{\varphi}_{\bar{\tau},j}^{t}(\psi, \varepsilon, \bar{\tau}, h)$$

функція

$$y^{\tau}_{\bar\tau,j} = Z_{j+1}(\bar\varphi^{\tau}_{\bar\tau,j},\tau,\varepsilon,\bar\tau,h) = \bar Q(\tau,\bar\tau,\varepsilon)\bar h +$$

$$+\int\limits_{\bar\tau}^{\infty} Q(\tau,t,\varepsilon)F_1(Z_j(\bar\varphi^{t}_{\bar\tau,j},t,\varepsilon,\bar\tau,h),\bar\varphi^{t}_{\bar\tau,j},t,\varepsilon)dt+$$

$$+\varepsilon\sum_{\bar\tau\le\tau_\nu} Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)\Phi_1(Z_j(\bar\varphi^{\tau_\nu}_{\bar\tau,j},\tau_\nu,\varepsilon,\bar\tau,h),\bar\varphi^{\tau_\nu}_{\bar\tau,j},\tau_\nu,\varepsilon) \tag{48}$$

при кожних $h\in R^{n-n_0}$, $\psi\in R^m$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ є обмеженим на $[\bar\tau,\infty)$ розв'язком системи

$$\frac{dy}{d\tau} = H(\tau,\varepsilon)y + F_1(Z_j(\bar\varphi^{\tau}_{\bar\tau,j},\tau,\varepsilon,\bar\tau,h),\bar\varphi^{\tau}_{\bar\tau,j},\tau,\varepsilon), \quad \tau\ne\tau_\nu,$$

$$\Delta y|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G(\tau_\nu,\varepsilon)y + \varepsilon\Phi_1(Z_j(\bar\varphi^{\tau_\nu}_{\bar\tau,j},\tau_\nu,\varepsilon,\bar\tau,h),\bar\varphi^{\tau_\nu}_{\bar\tau,j},\tau_\nu,\varepsilon).$$

Як і в статті [8] для функції Y_j, так і в нашому випадку для $Z_j = Z_j(\psi,\tau,\varepsilon,\bar\tau,h)$ легко довести, що при досить малих додатних ρ_4 і ε_0 функція Z_j — 2π-періодична по φ_s, $s=\overline{1,m}$, а Z_j, $\dfrac{\partial Z_j}{\partial\psi}$, $\dfrac{\partial Z_j}{\partial\tau}$ неперервні по ψ і кусково-неперервні по τ з розривами першого роду при $\tau=\tau_\nu$ та задовольняють нерівності

$$\|Z_j\| \le \bar d_1(\|h\|+\varepsilon^\beta), \quad \left\|\frac{\partial Z_j}{\partial\psi}\right\| \le \bar d_2\varepsilon^\beta, \quad \|\Delta Z_j|_{\tau=\tau_\nu}\| \le \tilde d_1\varepsilon,$$

$$\left\|\frac{\partial Z_j}{\partial\tau} + \frac{\partial Z_j}{\partial\psi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\right\| \le \underline{d}_1, \quad \tau\ne\tau_\nu, \tag{49}$$

для всіх $\psi\in R^m$, $\tau\in[\bar\tau,\infty)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\|h\|<\rho_4$. Крім того,

$$\begin{gathered}\sup_{\psi,\tau}\|Z_{j+1}-Z_j\| \le \sigma\sup_{\psi,\tau}\|Z_j-Z_{j-1}\|,\\ \|\bar\varphi^{\tau}_{t,j+1}(\psi,\varepsilon,\bar\tau,h)-\bar\varphi^{\tau}_{t,j}(\psi,\varepsilon,\bar\tau,h)\| \le c_{13}e^{\frac{\gamma}{3}|t-\tau|}\sup_{\psi,\tau}\|Z_{j+1}-Z_j\|.\end{gathered} \tag{50}$$

Тут $\bar d_1$, $\underline{d}_1$, $\tilde d_1$, $\bar d_2$, $\sigma<1$ і c_{13} — додатні сталі.

Вивчимо далі залежність функцій $Z_j(\psi,\tau,\varepsilon,\bar\tau,h)$ від параметра h.

Лема 2. *При зроблених припущеннях для довільного додатного $\tilde\gamma_1<\gamma\sqrt{1-\sigma_0}$ існують такі досить мале $\tilde\varepsilon_0>0$ і досить велике $\bar d_3>0$, що при $\varepsilon_0\le\tilde\varepsilon_0$ виконується нерівність*

$$\left\|\frac{\partial Z_j(\psi,\tau,\varepsilon,\bar\tau,h)}{\partial h}\right\| \le \bar d_3 e^{-\tilde\gamma_1(\tau-\bar\tau)} \tag{51}$$

для всіх $j \geq 0$, $\psi \in R^m$, $\tau \geq \bar{\tau}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і* $\|h\| < \rho_4$.

Доведення. Оскільки $Z_0 = 0$, то з (46) при $j = 0$ випливає, що Z_1 — лінійна функція змінної h і

$$\left\| \frac{\partial Z_1}{\partial h} \right\| \leq \|Q_-(\tau, \bar{\tau}, \varepsilon)\| \leq K e^{-\gamma(\tau - \bar{\tau})} \leq \bar{d}_3 e^{-\tilde{\gamma}_1(\tau - \bar{\tau})}$$

при $\tau \geq \bar{\tau}$, де сталу $\bar{d}_3 \geq K$ і буде означено нижче.

При кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ з досить малим ε_0 функції b і q мають неперервні обмежені частинні похідні першого порядку по x, φ, τ на множині $D \times R^m \times R$, тому згідно з теоремами існування і диференційовності розв'язків диференціальних рівнянь за параметрами функція $\bar{\varphi}^{\tau}_{t,1}, \bar{\varphi}^{t}_{t,1} = \psi$, як розв'язок системи (47) при $j = 1$ при кожних фіксованих $\psi, \tau, \varepsilon, t$ має неперервну частинну похідну по h.

Припустимо, що для всіх $j = \overline{0, s}$ функції Z_j мають неперервні частинні похідні першого порядку по h і для цих j виконується нерівність (51).

Згідно із зазначеним вище $\bar{\varphi}^{\tau}_{t,s}$ також має неперервну частинну похідну першого порядку по h. Покажемо, що для довільного додатного $\tilde{\gamma}_2 < \gamma - \tilde{\gamma}_1$ існує таке досить мале $\varepsilon_0 > 0$, що

$$\left\| \frac{\partial \bar{\varphi}^{t}_{\tau,s}}{\partial h} \right\| \leq c_{14} e^{\tilde{\gamma}_2 |t - \tau| - \tilde{\gamma}_1(\min(t,\tau) - \bar{\tau})} \bar{d}_3 \tag{52}$$

при $t \geq \bar{\tau}, \tau \geq \bar{\tau}, \psi \in R^m, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \|h\| < \rho_4$.

Із (47) знаходимо, що при $t \geq \tau \geq \bar{\tau}$ матриця $u^{t}_{\tau,s} = \dfrac{\partial \bar{\varphi}^{t}_{\tau,s}}{\partial h}$ задовольняє нерівність

$$\|u^{t}_{\tau,s}\| \leq \sup_{G} \left\| \frac{\partial b}{\partial x} \right\| \int_{\tau}^{t} (\bar{d}_1 \varepsilon^{\beta} \|u^{l}_{\tau,s}\| + \bar{d}_3 e^{-\tilde{\gamma}_1(l - \bar{\tau})}) dl +$$

$$+ \varepsilon \sup_{G} \left\| \frac{\partial q}{\partial x} \right\| \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} (\bar{d}_1 \varepsilon^{\beta} \|u^{\tau_\nu}_{\tau,s}\| + \bar{d}_3 e^{-\tilde{\gamma}_1(\tau_\nu - \bar{\tau})}) + \left\| \int_{\tau}^{t} \tilde{B} u^{l}_{\tau,s} dl \right\| + \left\| \varepsilon \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} \tilde{C} u^{\tau_\nu}_{\tau,s} \right\|, \tag{53}$$

де

$$\tilde{B} = \frac{\partial}{\partial \varphi} b(\xi(l, \varepsilon) + Z_s(\bar{\varphi}^{l}_{\tau,s}, l, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \bar{\varphi}^{l}_{\tau,s}, l, \varepsilon),$$

$$\tilde{C} = \frac{\partial}{\partial \varphi} q(\xi(\tau_\nu, \varepsilon) + Z_s(\bar{\varphi}^{\tau_\nu}_{\tau,s}, \tau_\nu, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \bar{\varphi}^{\tau_\nu}_{\tau,s}, \tau_\nu, \varepsilon).$$

Якщо $t \in [\tau, \tau + 1]$, то при $\bar{d}_1 \varepsilon_0^{\beta} \leq 1$ на підставі умови $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = \varepsilon\theta$ з (53) знаходимо

$$\|u^{t}_{\tau,s}\| \leq \tilde{c}_{14} e^{-\tilde{\gamma}_1(\tau - \bar{\tau})} \bar{d}_3, \quad t \in [\tau, \tau + 1], \quad \tau \geq \bar{\tau}, \tag{54}$$

де $\tilde{c}_{14}$ — стала, не залежна від $\bar{d}_3$ і s.

Нехай $t > \tau + 1$. Оскільки середні по φ в кубі періодів матриць $\dfrac{\partial}{\partial\varphi} b(x, \varphi, \tau, \varepsilon)$ і $\dfrac{\partial}{\partial\varphi} q(x, \varphi, \tau, \varepsilon)$ дорівнюють нулю і

$$\left\| \frac{du^l_{\tau,s}}{dl} \right\| \leq 2\sigma_1 (\|u^l_{\tau,s}\| + \bar{d}_3 e^{-\tilde{\gamma}_1 (l - \bar{\tau})}),$$

$$\|\Delta(u^l_{\tau,s})|_{l=\tau_\nu}\| \leq 2\sigma_1 \varepsilon (\|u^{\tau_\nu}_{\tau,s}\| + \bar{d}_3 e^{-\tilde{\gamma}_1 (\tau_\nu - \bar{\tau})}),$$

то завдяки рівномірним оцінкам (29) і (30) осциляційних інтегралів і сум та припущенням (2) дістанемо нерівність

$$\left\| \int\limits_\tau^t \tilde{B} u^l_{\tau,s} dl \right\| + \left\| \varepsilon \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} \tilde{C} u^{\tau_\nu}_{\tau,s} \right\| \leq \underset{\sim}{c}_{14} \varepsilon^\beta \left(\int\limits_\tau^t \|u^l_{\tau,s}\| dl + \varepsilon \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} \|u^{\tau_\nu}_{\tau,s}\| + \bar{d}_3 e^{-\tilde{\gamma}_1 (\tau - \bar{\tau})} \right) \quad (55)$$

з деякою не залежною від ε, s і $\bar{d}_3$ сталою $\underset{\sim}{c}_{14}$. Враховуючи (55), із (53) виводимо нерівність

$$\|u^t_{\tau,s}\| \leq c_{15} \left(\varepsilon^\beta \int\limits_t^\tau \|u^l_{\tau,s}\| dl + \varepsilon^{1+\beta} \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} \|u^{\tau_\nu}_{\tau,s}\| + \bar{d}_3 e^{-\gamma(\tau - \bar{\tau})} \right)$$

при $t > \tau + 1$, яка разом з нерівністю (54) приводить до оцінки

$$\|u^t_{\tau,s}\| \leq \tilde{c}_{15} \bar{d}_3 e^{\tilde{c}_{15} \varepsilon^\beta (t-\tau) - \tilde{\gamma}_1 (\tau - \bar{\tau})} \quad (56)$$

при $t \geq \tau \geq \bar{\tau}, \psi \in R^m, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \|h\| < \rho_4$. Якщо вибрати довільне $\tilde{\gamma}_2 \in (0, \gamma - \tilde{\gamma}_1)$, то за рахунок припущення $\tilde{c}_{15} \varepsilon_0^\beta \leq \tilde{\gamma}_2$ із (56) отримаємо оцінку (52) для $t \geq \tau$. У випадку $t < \tau$ її доведення аналогічне.

На підставі нерівності (51) при $j = s$ із (46) одержимо

$$\left\| \frac{\partial Z_{s+1}}{\partial h} \right\| \leq K e^{-\gamma(\tau - \bar{\tau})} + K \int\limits_{\bar{\tau}}^\infty e^{-\gamma|\tau - t|} [(\delta_1 + \tilde{c}_0 + \varepsilon\sigma_1)(\bar{d}_2 \varepsilon^\beta \|u^t_{\tau,s}\| +$$

$$+ \bar{d}_3 e^{-\tilde{\gamma}_1 (t - \bar{\tau})}) + \varepsilon\sigma_1 \|u^t_{\tau,s}\|] dt + K\varepsilon \sum_{\bar{\tau} \leq \tau_\nu} e^{-\gamma|\tau - \tau_\nu|} [(\delta_1 + \underset{\sim}{c}_0 +$$

$$+ \varepsilon\sigma_1)(\bar{d}_2 \varepsilon^\beta \|u^{\tau_\nu}_{\tau,s}\| + \bar{d}_3 e^{-\tilde{\gamma}_1 (\tau_\nu - \bar{\tau})}) + \varepsilon\sigma_1 \|u^{\tau_\nu}_{\tau,s}\|] +$$

$$+ \left\| \int\limits_{\bar{\tau}}^\infty Q(\tau, t, \varepsilon) \sum_{k \neq 0} A_k u^t_{\tau,s} e^{i(k, \bar{\varphi}^t_{\tau,s})} dt \right\| + \left\| \varepsilon \sum_{\bar{\tau} \leq \tau_\nu} Q(\tau, \tau_\nu, \varepsilon) \tilde{A}_{k\nu} u^{\tau_\nu}_{\tau,s} e^{i(k, \varphi^{\tau_\nu}_{\tau,s})} \right\|, \quad (57)$$

де A_k і $\tilde{A}_{k\nu}$ — $(n \times m)$-вимірні матриці, які визначаються формулами

$$A_k = (a_k k_1, a_k k_2, ..., a_k k_m), \quad \tilde{A}_{k\nu} = (p_k k_1, p_k k_2, ..., p_k k_m),$$

$$a_k = a_k(\xi(t,\varepsilon) + Z_s(\bar{\varphi}^t_{\tau,s}, t, \varepsilon, \bar{\tau}, h), t),$$

$$p_k = p_k(\xi(\tau_\nu,\varepsilon) + Z_s(\bar{\varphi}^{\tau_\nu}_{\tau,s}, \tau_\nu, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \tau_\nu), \quad k = (k_1, ..., k_m).$$

Оцінюючи осциляційні інтеграл і суму в правій частині нерівності (57) за формулами (29) і (30) та використовуючи нерівність (52) при $\tilde{\gamma}_2 < \gamma - \tilde{\gamma}_1$, перепишемо нерівність (57) у вигляді

$$\left\| \frac{\partial Z_{s+1}}{\partial h} \right\| \le \left[K + \left(\sigma_0 \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \tilde{\gamma}_1^2} + \delta_1^2 \frac{K\gamma(1+\theta^{-1})}{\gamma^2 - \tilde{\gamma}_1^2} + \varepsilon_0^\beta c_{16} \right) \bar{d}_3 \right] e^{-\tilde{\gamma}_1(\tau - \bar{\tau})}.$$

Виберемо довільне додатне $\tilde{\gamma}_1 < \gamma\sqrt{1-\sigma_0}$, а δ_1 і ε_0 виберемо настільки малими, щоб

$$c_{16}\varepsilon_0^\beta \le \frac{\gamma^2(1-\sigma_0) - \tilde{\gamma}_1^2}{3(\gamma^2 - \tilde{\gamma}_1^2)}, \quad \delta_1 \le \frac{\gamma^2(1-\sigma_0) - \tilde{\gamma}_1^2}{6\gamma K(1+\theta^{-1})}.$$

Тоді

$$\left\| \frac{\partial Z_{s+1}}{\partial h} \right\| \le (K + \sigma^* \bar{d}_3) e^{-\tilde{\gamma}_1(\tau - \bar{\tau})} \le \bar{d}_3 e^{-\tilde{\gamma}_1(\tau - \bar{\tau})}$$

для всіх $\tau \ge \bar{\tau}$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\|h\| < \rho_4$, де

$$\bar{d}_3 = \frac{K}{1 - \sigma^*}, \quad \sigma^* = \frac{2 + \sigma_0 \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \tilde{\gamma}_1^2}}{3} < 1.$$

Згідно з методом математичної індукції нерівність (51) виконується для всіх $j \ge 0$.

Лему доведено.

Нерівності (50) означають, що

$$\lim_{j\to\infty} Z_j(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h) = Z(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \quad \lim_{j\to\infty} \bar{\varphi}^\tau_{t,j}(\psi, \varepsilon, \bar{\tau}, h) = \bar{\varphi}^\tau_t(\psi, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \tag{58}$$

причому згідно з зазначеними вище властивостями функцій Z_j граничная функція Z 2π-періодична по ψ_s, $s = \overline{1,m}$, обмежена величиною $\bar{d}_1(\varepsilon^\beta + \|h\|)$, кусково-неперервна по τ з розривами першого роду в точках $\tau = \tau_\nu$ і задовольняє умову Ліпшиця по ψ і h:

$$\|Z(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h) - Z(\tilde{\psi}, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, \tilde{h})\| \le \bar{d}_2 \varepsilon^\beta \|\psi - \tilde{\psi}\| + \bar{d}_3 e^{-\tilde{\gamma}_1(\tau - \bar{\tau})} \|h - \tilde{h}\| \tag{59}$$

для всіх $\psi \in R^m$, $\tilde{\psi} \in R^m$, $\tau \in [\bar{\tau}, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\|h\| < \rho_4$, $\|\tilde{h}\| < \rho_4$.

Із формул (46) – (48) випливають рівності

$$Z_{j+1}(\bar{\varphi}^{\tau}_{\bar{\tau},j},\tau,\varepsilon,\bar{\tau},h) = Z_{j+1}(\psi,\bar{\tau},\varepsilon,\bar{\tau},h) + \int\limits_{\bar{\tau}}^{\tau}[H(t,\varepsilon)Z_{j+1}(\bar{\varphi}^{t}_{\bar{\tau},j},t,\varepsilon,\bar{\tau},h)+$$

$$+ F_1(Z_j(\bar{\varphi}^{t}_{\bar{\tau},j},t,\varepsilon,\bar{\tau},h),\bar{\varphi}^{t}_{\bar{\tau},j},t,\varepsilon)]dt+$$

$$+\varepsilon\sum_{\bar{\tau}\le\tau_\nu<\tau}[G(\tau_\nu,\varepsilon)Z_{j+1}(\bar{\varphi}^{\tau_\nu}_{\bar{\tau},j},\tau_\nu,\varepsilon,\bar{\tau},h)+$$

$$+\Phi_1(Z_j(\bar{\varphi}^{\tau_\nu}_{\bar{\tau},j},\tau_\nu,\varepsilon,\bar{\tau},h),\bar{\varphi}^{\tau_\nu}_{\bar{\tau},j},\tau_\nu,\varepsilon], \qquad (60)$$

$$\bar{\varphi}^{\tau}_{\bar{\tau},j} = \psi + \int\limits_{\bar{\tau}}^{\tau}\left[\frac{\omega(t)}{\varepsilon} + b(\xi(t,\varepsilon) + Z_j(\bar{\varphi}^{t}_{\bar{\tau},j},t,\varepsilon,\bar{\tau},h),\bar{\varphi}^{t}_{\bar{\tau},j},t,\varepsilon)\right]dt+$$

$$+\varepsilon\sum_{\bar{\tau}\le\tau_\nu<\tau} q(\xi(\tau_\nu,\varepsilon) + Z_j(\bar{\varphi}^{\tau_\nu}_{\bar{\tau},j},\tau_\nu,\varepsilon,\bar{\tau},h),\bar{\varphi}^{\tau_\nu}_{\bar{\tau},j},\tau_\nu,\varepsilon), \qquad (61)$$

граничний перехід в яких при $j\to\infty$ згідно з (58) приводить до співвідношень

$$Z(\bar{\varphi}^{\tau}_{\bar{\tau}},\tau,\varepsilon,\bar{\tau},h) = Z(\psi,\bar{\tau},\varepsilon,\bar{\tau},h) + \int\limits_{\bar{\tau}}^{\tau}[H(t,\varepsilon)Z(\bar{\varphi}^{t}_{\bar{\tau}},t,\varepsilon,\bar{\tau},h)+$$

$$+ F_1(Z(\bar{\varphi}^{t}_{\bar{\tau}},t,\varepsilon,\bar{\tau},h),\bar{\varphi}^{t}_{\bar{\tau}},t,\varepsilon)]dt + \varepsilon\sum_{\bar{\tau}\le\tau_\nu<\tau}[G(\tau_\nu,\varepsilon)Z(\bar{\varphi}^{\tau_\nu}_{\bar{\tau}},\tau_\nu,\varepsilon,\bar{\tau},h)+$$

$$+\Phi_1(Z(\bar{\varphi}^{\tau_\nu}_{\bar{\tau}},\tau_\nu,\varepsilon,\bar{\tau},h),\bar{\varphi}^{\tau_\nu}_{\bar{\tau}},\tau_\nu,\varepsilon)],$$

$$\bar{\varphi}^{\tau}_{\bar{\tau}} = \psi + \int\limits_{\bar{\tau}}^{\tau}\left[\frac{\omega(t)}{\varepsilon} + b(\xi(t,\varepsilon) + Z(\bar{\varphi}^{t}_{\bar{\tau}},t,\varepsilon,\bar{\tau},h),\bar{\varphi}^{t}_{\bar{\tau}},t,\varepsilon)\right]dt+$$

$$+\varepsilon\sum_{\bar{\tau}\le\tau_\nu<\tau} q(\xi(\tau_\nu,\varepsilon) + Z(\bar{\varphi}^{\tau_\nu}_{\bar{\tau}},\tau_\nu,\varepsilon,\bar{\tau},h),\bar{\varphi}^{\tau_\nu}_{\bar{\tau}},\tau_\nu,\varepsilon). \qquad (62)$$

Покладемо

$$Z(\psi,\bar{\tau},\varepsilon,\bar{\tau},h) = (f_+(\psi,\bar{\tau},\varepsilon,h),h),$$

де f — n_0-вимірний вектор. У термінах системи (10) отриманий результат означає наступне: якщо $y = (y_+, y_-)$ і при $\tau = \bar{\tau}$ змінні φ, y_- і y_+ набувають відповідно значень φ^0, y_-^0 і $y_+^0 = f_+(\varphi^0, \bar{\tau}, \varepsilon, y_-^0)$, то $y_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0, \varphi^0, \varepsilon)$, $\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0, \varphi^0, \varepsilon)$, де

$$y_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau}}(y^0, \varphi^0, \varepsilon) = y^0 = (y_+^0, y_-^0), \quad \varphi_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau}}(y^0, \varphi^0, \varepsilon) = \varphi^0,$$

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad \varphi^0 \in R^m, \quad \|y_-^0\| < \rho_4,$$

$$y_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0, \varphi^0, \varepsilon) = Z(\bar{\varphi}_{\bar{\tau}}^{\tau}, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, y_-^0), \quad \varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0, \varphi^0, \varepsilon) = \bar{\varphi}_{\bar{\tau}}^{\tau},$$

а $\bar{\varphi}_{\bar{\tau}}^{\tau}$ визначається другою рівністю в (62) при $\psi = \varphi^0$ і $h = y_-^0$, є розв'язком системи (10), який визначений на $[\bar{\tau}, \infty)$ і повільна компонента $y_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0, \varphi^0, \varepsilon)$ якого рівномірно обмежена сталою $\bar{d}_1(\varepsilon_0^{\beta} + \rho_4)$. Крім того, при кожних y_-^0 і ε криві $y_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0, \varphi^0, \varepsilon)$ належать поверхні $y = Z(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, y_-^0)$ при $\tau \in [\bar{\tau}, \infty)$. Покладемо

$$S_{n-n_0}^{+} = S_{n-n_0}^{+}(\varphi^0, \bar{\tau}, \varepsilon) = \{y^0 : \, y^0 \in R^n, \quad \|y_-^0\| < \rho_4, \quad y_+^0 = f_+(\varphi^0, \bar{\tau}, \varepsilon, y_-^0)\}.$$

Покажемо далі, що $Z(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h)$ експоненціально прямує при $\tau \to \infty$ до інтегрального многовиду $y = Y(\psi, \tau, \varepsilon)$ системи (10). Для цього позначимо

$$r_j(\tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h) = \sup_{\psi \in R^m} \|Z_j(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h) - Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)\|,$$

$$N_j = \sup_{\tau \in [\bar{\tau}, \infty)} [r_j(\tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h) e^{\tilde{\gamma}_1(\tau - \bar{\tau})}],$$

де додатне число $\tilde{\gamma}_1$ означене в нерівності (51) і вибирається з умови $\tilde{\gamma}_1 < \gamma\sqrt{1 - \sigma_0}$, а Y_j і Z_j виражаються формулами (11) і (46). Зазначимо, що

$$r_j(\tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h) \le N_j e^{-\tilde{\gamma}_1(\tau - \bar{\tau})}, \quad \tau \in [\bar{\tau}, \infty).$$

У наступній лемі $\varphi_{t,j}^{\tau}$ і $\bar{\varphi}_{t,j}^{\tau}$ позначають розв'язки систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією відповідно (13) і (47), які при $\tau = t$ набувають значення ψ, а $\tilde{\gamma}_2$ — довільне фіксоване додатне число, яке визначається умовою $\tilde{\gamma}_2 < \gamma - \tilde{\gamma}_1$.

Лема 3. *Існує така стала c_{17}, не залежна від $\varepsilon, j, \bar{\tau}, h$, що при досить малому $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\tilde{\gamma}_2) > 0$ для всіх $\tau \ge \bar{\tau}$, $t \ge \bar{\tau}$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $\|h\| < \rho_4$ виконується нерівність*

$$\|\varphi_{\tau,j}^{t} - \bar{\varphi}_{\tau,j}^{t}\| \le c_{17} N_j e^{\tilde{\gamma}_2|t-\tau| - \tilde{\gamma}_1(\min(t,\tau) - \bar{\tau})}. \tag{63}$$

Доведення. Оскільки

$$\|Z_j(\bar{\varphi}_{\tau,j}^{t}, t, \varepsilon, \bar{\tau}, h) - Y_j(\varphi_{\tau,j}^{t}, t, \varepsilon)\| \le d_2 \varepsilon^{\beta} \|\varphi_{\tau,j}^{t} - \bar{\varphi}_{\tau,j}^{t}\| + h_j(t, \varepsilon, \bar{\tau}, h),$$

то із систем (13) і (47) знаходимо, що при $t \geq \tau \geq \bar{\tau}$ функція $v^t_{\tau,j} = \bar{\varphi}^t_{\tau,j} - \varphi^t_{\tau,j}$ задовольняє нерівність

$$\|v^t_{\tau,j}\| \leq \sigma_1 \int_\tau^t (d_2\varepsilon^\beta \|v^l_{\tau,j}\| + N_j e^{-\tilde{\gamma}_1(l-\bar{\tau})})dl + \varepsilon\sigma_1 \sum_{\tau \leq \tau_\nu < \tau} (d_2\varepsilon^\beta \|v^{\tau_\nu}_{\tau,j}\| + N_j e^{-\gamma(\tau_\nu - \bar{\tau})}) +$$

$$+ \sum_{k \neq 0} \left[\left\| \int_\tau^t b_k(\xi(l,\varepsilon) + Y_j(\varphi^l_{\tau,j}, l, \varepsilon), l, \varepsilon)(1 - e^{i(k, v^t_{\tau,j})}) e^{i(k, \tilde{\varphi}^l_{\tau,j})} \Omega_k(l, \bar{\tau}, \varepsilon) dl \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \varepsilon \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} q_k(\xi(\tau_\nu, \varepsilon) + Y_j(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}, \tau_\nu, \varepsilon), \tau_\nu, \varepsilon)(1 - e^{i(k, v^{\tau_\nu}_{\tau,j})}) e^{i(k, \tilde{\varphi}^{\tau_\nu}_{\tau,j})} \Omega_k(\tau_\nu, \bar{\tau}, \varepsilon) \right\| \right], \tag{64}$$

в якій

$$\tilde{\varphi}^t_{\tau,j} = \varphi^t_{\tau,j} - \frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^t \omega(l) dl.$$

Як і при доведенні леми 1, подамо відрізок $[\tau, t]$ у вигляді

$$[\tau, t] = \bigcup_{s=0}^{s_0} T_s,$$

розкладемо осциляційні інтеграл і суму в правій частині нерівності (64) на суму інтегралів і сум за складовими відрізками T_s та скористаємось оцінками (29) і (30). Тоді дістанемо

$$\|v^t_{\tau,j}\| \leq \tilde{c}_{18} \left(\varepsilon^\beta \int_\tau^t \|v^l_{\tau,j}\| dl + \varepsilon^{\beta+1} \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} \|v^{\tau_\nu}_{\tau,j}\| + N_j e^{-\tilde{\gamma}_1(\tau - \bar{\tau})} \right) \tag{65}$$

при $t > \tau + 1$, де $\tilde{c}_{18}$ — стала. Якщо ж $t \in [\tau, \tau+1]$, то з (64) при $d_2\varepsilon_0^\beta \leq 1$ одержимо нерівність

$$\|v^t_{\tau,j}\| \leq 2\sigma_1 \left(\int_\tau^t \|v^l_{\tau,j}\| dl + \varepsilon \sum_{\tau \leq \tau_\nu < t} \|v^{\tau_\nu}_{\tau,j}\| \right) + \underset{\sim}{c}_{18} N_j e^{-\tilde{\gamma}_1(\tau - \bar{\tau})}. \tag{66}$$

Нерівності (65) і (66) приводять до оцінки вигляду

$$\|v^t_{\tau,j}\| \leq c_{17} N_j e^{c_{17}\varepsilon_0^\beta (t-\tau) - \tilde{\gamma}_1(\tau - \bar{\tau})}$$

для всіх $t \geq \tau$, звідки випливає (63) при $t \geq \tau$ і $c_{17}\varepsilon_0^\beta \leq \tilde{\gamma}_2$. Для $t < \tau$ оцінка (63) доводиться аналогічно.

Лему доведено.

Із (11) і (46) при $\tau \geq \bar{\tau}$ отримуємо нерівність

$$e^{\tilde{\gamma}_1(\tau-\bar{\tau})}\|Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon) - Z_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon,\bar{\tau},h)\| \leq K(\|\alpha(\psi,\tau,\bar{\tau},\varepsilon)\| + \|h\|)+$$

$$+ K(\delta_1 + \tilde{c}_0 + \varepsilon\sigma_1)\int\limits_{\bar{\tau}}^{\infty} e^{-\gamma|t-\tau|+\tilde{\gamma}_1(\tau-\bar{\tau})}(d_2\varepsilon^{\beta}\|v^t_{\tau,j}\| + h_j(t,\varepsilon,\bar{\tau},h))dt+$$

$$+ K(\delta_1 + \underset{\sim}{c}_0 + \varepsilon\sigma_1)\sum_{\bar{\tau}\leq\tau_\nu} e^{-\gamma|\tau-\tau_\nu|+\tilde{\gamma}_1(\tau-\bar{\tau})}(d_2\varepsilon^{\beta}\|v^{\tau_\nu}_{\tau,j}\| + h_j(\tau_\nu,\varepsilon,\bar{\tau},h))+$$

$$+ \sum_{k\neq 0}\sum_{s=0}^{\infty}\Bigg[\Bigg\|\int\limits_{\bar{\tau}+s}^{\bar{\tau}+s+1} Q(\tau,t,\varepsilon)e^{\tilde{\gamma}_1(\tau-\bar{\tau})}a_k(\xi(t,\varepsilon)+$$

$$+ Y_j(\varphi^t_{\tau,j},t,\varepsilon),t)e^{i(k,\tilde{\varphi}^t_{\tau,j})}(1 - e^{i(k,v^t_{\tau,j})})\Omega_k(t,\bar{\tau},\varepsilon)dt\Bigg\|+$$

$$+ \Bigg\|\varepsilon\sum_{\bar{\tau}+s\leq\tau_\nu<\bar{\tau}+s+1} Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)e^{\tilde{\gamma}_1(\tau-\bar{\tau})}p_k(\xi(\tau_\nu,\varepsilon)+$$

$$+ Y_j(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j},\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu)e^{i(k,\tilde{\varphi}^{\tau_\nu}_{\tau,j})}(1 - e^{i(k,v^{\tau_\nu}_{\tau,j})})\Omega_k(\tau_\nu,\bar{\tau},\varepsilon)\Bigg\|\Bigg].$$

Звідси на підставі оцінок (29), (30) і леми 3 при $\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 < \gamma$ дістаємо нерівність

$$N_{j+1} \leq \rho_5 + \sigma_* N_j, \tag{67}$$

де

$$\rho_5 = (\rho_4 + d_1\varepsilon_0^{\beta})K, \quad \sigma_* = \frac{\sigma_0\gamma^2}{\gamma^2 - \tilde{\gamma}_1^2} + \delta_1\frac{2\gamma K(1+\theta^{-1})}{\gamma^2 - \tilde{\gamma}_1^2} + c_{18}\varepsilon_0^{\beta},$$

а c_{18} — стала, не залежна від ε і j. За рахунок досить малих додатних ε_0 і δ_1 на підставі припущення $\tilde{\gamma}_1 < \gamma\sqrt{1-\sigma_0}$ можна вважати, що $\sigma_* < 1$. Оскільки $N_0 = 0$, то з нерівності (67) випливає

$$N_j \leq \frac{\rho_5}{1-\sigma_*} = c$$

для всіх $j \geq 0$. Отже,

$$\|Z_j(\psi,\tau,\varepsilon,\bar{\tau},h) - Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\| \leq ce^{-\tilde{\gamma}_1(\tau-\bar{\tau})},$$

а тому граничний перехід при $j \to \infty$ в останній нерівності дозволяє стверджувати, що

$$\|Z(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h) - Y(\psi, \tau, \varepsilon)\| \leq ce^{-\tilde{\gamma}_1(\tau - \bar{\tau})} \tag{68}$$

для всіх $\psi \in R^m$, $\tau \geq \bar{\tau} \in R$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $\|h\| < \rho_4$.

Оскільки повільна компонента розв'язку $y_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0, \varphi^0, \varepsilon)$, $\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0, \varphi^0, \varepsilon)$ системи (10), для якого

$$y^0 = (y_+^0, y_-^0) = (f_+(\varphi^0, \bar{\tau}, \varepsilon, y_-^0), y_-^0),$$

а $\varphi^0 \in R^m$ і $y_-^0 \in R^{n-n_0}$, $\|y_-^0\| < \rho_4$, — довільні, визначається рівністю

$$y_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0, \varphi^0, \varepsilon) = Z(\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0, \varphi^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, y_-^0),$$

то з нерівності (68) маємо оцінку

$$\|y_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0, \varphi^0, \varepsilon) - Y(\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0, \varphi^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon)\| \leq ce^{-\tilde{\gamma}_1(\tau - \bar{\tau})} \tag{69}$$

при $\tau \geq \bar{\tau}$, $\varphi^0 \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $\|y_-^0\| < \rho_4$.

Якщо замість послідовності $\{Z_j(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h)\}_{j=0}^{\infty}$ розглянути послідовність $\{\underline{Z}_j(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h)\}_{j=0}^{\infty}$, яка при $\tau \in (-\infty, \bar{\tau}]$ визначається рекурентною формулою

$$\underline{Z}_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h) = \underline{Q}(\tau, \bar{\tau}, \varepsilon)\underline{h} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\bar{\tau}} Q(\tau, t, \varepsilon) F_1(\underline{Z}_j(\underline{\varphi}_{\tau,j}^t, t, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \underline{\varphi}_{\tau,j}^t, t, \varepsilon) dt +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\tau_\nu < \bar{\tau}} Q(\tau, \tau_\nu, \varepsilon) \Phi_1(\underline{Z}_j(\underline{\varphi}_{\tau,j}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \underline{\varphi}_{\tau,j}^{\tau_\nu}, \tau_\nu, \varepsilon),$$

де $\underline{Z}_0 = 0$, $h = (h_1, ..., h_{n_0})$, $\underline{h} = (h_1, ..., h_{n_0}, 0, ..., 0)$ — n-вимірний вектор, $\underline{Q}(\tau, \bar{\tau}, \varepsilon) = \operatorname{diag}(Q_+(\tau, \bar{\tau}, \varepsilon), 0)$ — n-вимірна квадратна матриця, а $\varphi = \underline{\varphi}_{t,j}^{\tau}$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(\xi(\tau, \varepsilon) + \underline{Z}_j(\varphi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \varphi, \tau, \varepsilon), \quad \tau \neq \tau_\nu,$$

$$\Delta\varphi|_{\tau = \tau_\nu} = \varepsilon q(\xi(\tau_\nu, \varepsilon) + \underline{Z}_j(\varphi, \tau_\nu, \varepsilon, \bar{\tau}, h), \varphi, \tau_\nu, \varepsilon),$$

який при $\tau = t$ набуває значення ψ, то аналогічно можна побудувати функцію

$$\underline{Z}(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h) = \lim_{j \to \infty} \underline{Z}_j(\psi, \tau, \varepsilon, \bar{\tau}, h).$$

Ця функція визначена при $\psi \in R^m$, $\tau \in (-\infty, \bar{\tau}]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\|h\| < \rho_4$, 2π-періодична по ψ_s, $s = \overline{1, m}$, кусково-неперервна по τ з розривами першого роду в точках $\tau = \tau_\nu$ і задовольняє нерівності

$$\|\underline{Z}(\psi,\tau,\varepsilon,\bar{\tau},h)\| \leq \bar{d}_1(\varepsilon^{\beta}+\|h\|),$$

$$\|\underline{Z}(\psi,\tau,\varepsilon,\bar{\tau},h)-\underline{Z}(\tilde{\psi},\tau,\varepsilon,\bar{\tau},\tilde{h})\| \leq \bar{d}_2\varepsilon^{\beta}\|\psi-\tilde{\psi}\|+\bar{d}_3e^{\tilde{\gamma}_1(\tau-\bar{\tau})}\|h-\tilde{h}\|, \tag{70}$$

$$\|\underline{Z}(\psi,\tau,\varepsilon,\bar{\tau},h)-Y(\psi,\tau,\varepsilon)\| \leq ce^{\tilde{\gamma}_1(\tau-\bar{\tau})}$$

для всіх $\psi \in R^m$, $\tilde{\psi} \in R^m$, $\tau \in (-\infty,\bar{\tau}]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\|h\| < \rho_4$, $\|\tilde{h}\| < \rho_4$.

Оскільки

$$\underline{Z}(\psi,\bar{\tau},\varepsilon,\bar{\tau},h)=(h,f_-(\psi,\bar{\tau},\varepsilon,h)),$$

де f_- — $(n-n_0)$-вимірний вектор, то всі розв'язки $y_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0,\varphi^0,\varepsilon)$, $\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0,\varphi^0,\varepsilon)$ системи (10), для яких

$$y^0=(y_+^0,y_-^0)=(y_+^0,f_-(\varphi^0,\varepsilon,\bar{\tau},y_+^0)),$$

$\varphi^0 \in R^m$ і $y_+^0 \in R^{n_0}$, $\|y_+^0\| < \rho_4$, — довільні, визначені на $(-\infty,\bar{\tau}]$ і

$$y_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0,\varphi^0,\varepsilon)=\underline{Z}(\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0,\varphi^0,\varepsilon),\tau,\varepsilon,\bar{\tau},y_+^0),$$
$$\|y_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0,\varphi^0,\varepsilon)-Y(\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0,\varphi^0,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\| \leq ce^{\tilde{\gamma}_1(\tau-\bar{\tau})} \tag{71}$$

при $\tau \leq \bar{\tau}$, $\varphi^0 \in R^m$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\|y_+^0\| < \rho_4$, $y_-^0=f_-(\varphi^0,\bar{\tau},\varepsilon,y_+^0)$.

Покладемо

$$S_{n_0}^- = S_{n_0}^-(\varphi^0,\bar{\tau},\varepsilon)=\left\{y^0 : y^0 \in R^n, \quad \|y_+^0\| < \rho_4, \quad y_-^0=f_-(\varphi^0,\bar{\tau},\varepsilon,y_+^0)\right\}.$$

Нерівності (69) і (71) вказують на експоненціальне прямування до інтегрального многовиду повільних компонент розв'язків системи (10) відповідно при $\tau \to +\infty$ чи $\tau \to -\infty$ за умови, що початкові значення $y^0=(y_+^0,y_-^0)$ і φ^0 при $\tau=\bar{\tau}$ цих розв'язків задовольняють умови $y_+^0=f_+(\varphi^0,\bar{\tau},\varepsilon,y_-^0)$ чи $y_-^0=f_-(\varphi^0,\bar{\tau},\varepsilon,y_+^0)$.

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай існує розв'язок $\xi(\tau,\varepsilon)$ системи (4), який визначений для всіх $\tau \in R$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ та належить D разом із своїм ρ-околом, і виконуються умови (2) при $\mu=0$, (3), (8), (9).*

Тоді можна вказати такі досить малі додатні $\bar{\varepsilon}$ і ρ_0, що при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \leq \bar{\varepsilon}$:

1) для кожного $\bar{\tau} \in R$ в ρ_0-околі точки $\xi(\tau_0,\varepsilon)$ існують такі многовиди $S_{n-n_0}^+$ і $S_{n_0}^-$ початкових даних для повільних змінних вимірів відповідно $n-n_0$ і n_0, що при $y^0 \in S_{n-n_0}^+$, $\varphi^0 \in R^m$ кожний розв'язок $y_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0,\varphi^0,\varepsilon)$, $\varphi_{\bar{\tau}}^{\tau}(y^0,\varphi^0,\varepsilon)$ системи (10) визначений на $[\bar{\tau},\infty)$ і виконується нерівність (69), а при $y^0 \in S_{n_0}^-$, $\varphi^0 \in R^m$ кожний розв'язок визначений на $(-\infty,\bar{\tau}]$ і виконується нерівність (71);

2) повільні компоненти вказаних розв'язків лежать відповідно на поверхнях $y = Z(\psi,\tau,\varepsilon,\bar{\tau},y_-^0)$ при $\tau \in [\bar{\tau},\infty)$ і $y=\underline{Z}(\psi,\tau,\varepsilon,\bar{\tau},y_+^0)$ при $\tau \in (-\infty,\bar{\tau}]$, а швидкі визначаються як розв'язок системи

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+b(\xi(\tau,\varepsilon)+Z(\varphi,\tau,\varepsilon,\bar{\tau},y_-^0),\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \tau \neq \tau_\nu,$$

$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(\xi(\tau_\nu,\varepsilon) + Z(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon,\bar\tau,y_-^0),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon), \quad \varphi|_{\tau=\bar\tau} = \varphi^0$$

при $\tau \in [\bar\tau,\infty)$ *і такої ж системи із заміною в ній* Z *на* $\underline{Z}$ *при* $\tau \in (-\infty,\bar\tau]$*;*

3) функції $Z(\psi,\tau,\varepsilon,\bar\tau,y_-^0)$ *і* $\underline{Z}(\psi,\tau,\varepsilon,\bar\tau,y_+^0)$ *—* 2π*-періодичні по* ψ_s*,* $s=\overline{1,m}$*, обмежені, кусково-неперервні по* τ *з розривами першого роду в точках* τ_ν *відповідно при* $\tau \geq \bar\tau$ *і* $\tau \leq \bar\tau$*, задовольняють нерівності*

$$\|Z(\psi,\tau,\varepsilon,\bar\tau,y_-^0) - Z(\tilde\psi,\tau,\varepsilon,\bar\tau,y_-^0)\| \leq$$

$$\leq \bar d_2\varepsilon^\beta\|\psi-\tilde\psi\| + \bar d_3 e^{-\tilde\gamma_1(\tau-\bar\tau)}\|y_-^0-\tilde y_-^0\|, \quad \tau \in [\bar\tau,\infty),$$

$$\|\underline{Z}(\psi,\tau,\varepsilon,\bar\tau,y_+^0) - \underline{Z}(\tilde\psi,\tau,\varepsilon,\bar\tau,\tilde y_+^0)\| \leq$$

$$\leq \bar d_2\varepsilon^\beta\|\psi-\tilde\psi\| + \bar d_3 e^{\gamma_1(\tau-\bar\tau)}\|y_+^0-\tilde y_+^0\|, \quad \tau \in (-\infty,\bar\tau],$$

для всіх $\psi \in R^m$*,* $\tilde\psi \in R^m$*,* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$*,* $\|y_+^0\| < \rho_4$*,* $\|\tilde y_+^0\| < \rho_4$*,* $\|y_-^0\| < \rho_4$*,* $\|\tilde y_-^0\| < \rho_4$ *і експоненціально прямують до інтегрального многовиду* $y = Y(\psi,\tau,\varepsilon)$ *системи (10) відповідно при* $\tau \to +\infty$ *і* $\tau \to -\infty$*.*

Зауваження. Враховуючи формулу $x = y + \xi(\tau,\varepsilon)$ переходу від системи (1) до системи (10), теорему 3 легко перефразувати в термінах розв'язків системи (1).

Висновки

1. Знайдено достатні умови асимптотичної стійкості інтегрального многовиду багаточастотної системи з імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

2. Побудовано такі множини $S_{n-n_0}^+$ і $S_{n_0}^-$ початкових даних для повільної компоненти розв'язку системи, що при належності цієї компоненти в початковий момент часу множині $S_{n-n_0}^+$ вона експоненціально прямує до інтегрального многовиду системи при $\tau \to +\infty$, а при її належності множині $S_{n_0}^-$ — до інтегрального многовиду при $\tau \to -\infty$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Труды Междунар. симп. по нелинейным колебаниям.— Киев: Изд-во АН УССР, 1963. — **1**. — С. 93 – 154.
2. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973.— 412 с.
3. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
4. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1977. — 304 с.
5. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. — 340 с.
6. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Выща шк., 1987. — 288 с.
7. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Метод усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1985. — **37**, № 1. — С. 56 – 64.

8. *Самойленко А. М., Петришин Р. І., Сопронюк Т. М.* Побудова інтегрального многовиду багаточастотної коливної системи з фіксованими моментами імпульсної дії // Там же. — 2003.— **55**, № 5. — С. 641 – 662.

9. *Петришин Я. Р.* Обґрунтування методу усереднення на півосі для одного класу нелінійних коливних систем з імпульсним впливом // Наук. вісник Чернівец. ун-ту: Зб. наук. пр. Математика. — 2001. — Вип. 111. — С. 105 – 109.

10. *Петришин Р. І., Сопронюк Т. М.* Експоненціальна оцінка фундаментальної матриці лінійної імпульсної системи // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 8. — С. 1101 – 1108.

Одержано 29.12.2003