ОТКРЫТИЯ ЯНОША БОЛЬЯИ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Элемер Киш

Таргу-Муреш, Румыния

Some unpublished results of János Bolyai in the field of number theory are analyzed.

Проаналізовано неопубліковані результати Яноша Больяї в області теорії чисел.

15 декабря 2002 года исполнилось двести лет со дня рождения Яноша Больяи (1802–1860 гг.) — венгерского математика, одновременно с гениальным русским ученым Николаем Ивановичем Лобачевским (1793–1856 гг.), но независимо от него, открывшего неевклидову геометрию. История математики связала их имена воедино так, что упомянутую геометрическую систему называют геометрией Больяи–Лобачевского.

При жизни Яноша Больяи увидела свет единственная его работа „Абсолютно правильная наука пространства" или, кратко, „Appendix" [1]. Эта статья, написанная полатыни на 26 страницах и содержащая абсолютную и неевклидову геометрии в сжатом виде, сделала его имя всемирно известным. Всякий раз, когда упоминается имя Яноша Больяи, на передний план ставятся результаты, полученные им в области геометрии.

Янош Больяи, однако, оставил нам в наследство не только „Appendix". После создания этого большого труда он постоянно работал, писал научные заметки. Существует огромное его рукописное наследие, из которого только 14 тысяч страниц хранятся в библиотеке Больяи–Телеки города Марошвашархель[1] [2]. В этих заметках до недавнего времени таились полученные ученым математические теоремы негеометрического характера, и лишь в последние несколько лет исследователям творчества Больяи удалось раскрыть их содержание.

Исследование рукописного наследия ученого показывает, что Янош Больяи, как и Н. И. Лобачевский, был поистине гениальным математиком. Кроме геометрии он был на передовых позициях и в других направлениях, порой на десятки лет опережая открытия, связанные с именами известных математиков (в особенности это касается проблем теории чисел, вопросов разрешимости алгебраических уравнений, а также ряда задач из области анализа). Об этой стороне научной деятельности Яноша Больяи, к сожалению, до сих пор ничего не было известно, поскольку, преимущественно из-за денежных затруднений, он не смог опубликовать полученные им результаты. Имеющиеся его рукописи тяжело расшифровать, и нам пришлось ожидать до настоящего времени раскрытия смысла его работ, посвященных вопросам негеометрического характера.

Теория чисел очаровала Яноша Больяи. Об этом он высказывался так: „*В теории чисел мы находим не только целые числа, а самые главные, самые интересные и гра-*

[1] Венг. Marosvásárhely (ныне Târgu-Mures, Румыния). — Прим. ред.

© Элемер Киш, 2004

циозные задачи этого учения" [2]. С интересными задачами „королевы математики", как и с учением о параллельных линиях, он встретился уже в родительском доме. Его отца, Фаркаша Больяи, также занимали привлекательные задачи теории чисел. И это едва ли удивительно, ибо почти через два года после появления в 1801 г. знаменитой работы К. Ф. Гаусса (1777 – 1855 гг.) „Disquisitiones arithmeticae" ее экземпляр был прислан в Марошвашархель. Автор прислал его своему другу с посвящением („Amico suo de Bolyai per curam Pauli Vada, auctor"). Работу „Disquisitiones arithmeticae" молодой Янош Больяи мог прочитать рано, так как уже в 13-летнем возрасте знал латынь. Позже (вероятно, в Вене) он приобрел экземпляр шедевра Гаусса. Эта работа была его настольной книгой; в своих рукописях он часто ссылается на нее, пользуется полученными там теоремами. В принадлежавшем Больяи экземпляре книги, который сохранился до наших дней, во многих местах можно найти его пометки и написанные по-латыни замечания.

Янош Больяи более всего занимался вопросами, связанными с простыми числами. „*... На поле всего учения о числах,* — признавался он, — *нет ничего красивее и интереснее ..., чем покрытая туманом тайна целых чисел*" [2]. Уже в детстве он задумался над тем, что ряд целых чисел бесконечен. „*Еще в раннем детстве,* — пишет он [2], — *я спрашивал себя: существует ли бесконечно много простых чисел?*"

Он искал формулу простых чисел, т. е. такую процедуру, с помощью которой можно было бы выразить любое простое число. Одно время ему казалось, что эту цель он осуществит: „*... возросли давно питаемые мною догадка и надежда относительно такой идиомы, согласно которой все числа простые*" [2]. Очень уверенно звучит следующее его предложение: „*В формуле исключения целых чисел я не сомневаюсь, и уже совсем скоро я найду ее*". По всей видимости, он делал эти оптимистические наброски в то время, когда занимался числами Мэрсе, теоремами Вильсона и Ферма.

Он очень долго считал, вплоть до 11 июля 1855 года, что найдет формулу для простых чисел среди чисел типа $2^p - 1$. Здесь он еще пишет, что в случае, когда p является простым числом, разность $2^p - 1$ тоже является простым числом. Однако позднее, в письме к отцу, корректирует этот просчет: „*... как мои записки покажут, я тоже находился в догадках, что $2^p - 1$ является простым числом, коль скоро p — простое число. Однако это не имеет места, поскольку, например, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ ...*" Как мы знаем [3], это заметил Хударлихус Региус в 1536 году; Яношу Больяи об этом не было известно.

Более удачным оказался случай со „*столь красивой и важной*" теоремой Вильсона: если p — простое число, то $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$. Как пишет Больяи, „*обратную теорему мой отец и я также доказали*". О теореме Вильсона оба Больяи читали в „Disquisitiones arithmeticae". Гаусс странным образом, по словам Фаркаша Больяи, „*начисто умолчал об этой обратной теореме*". Казалось, этот вопрос каким-то образом ускользнул из внимания Гаусса. Ни отец, ни сын не могли знать, что обратное утверждение к теореме Вильсона уже было доказано Ж. Л. Лагранжем (1736 – 1813 гг.), и, очевидно, поэтому занимались этим вопросом.

Эта теорема не удовлетворила Больяи. Действительно, он не мог считать ее „*очень удобным*" критерием определения простоты числа. Хотя формула $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ и характеризует простые числа, применить ее на практике почти невозможно, поскольку $(p-1)!$ является очень большим числом, если p велико. Поэтому внимание его переключилось на теорему Ферма: если p — простое число, а a — целое число, которое не делится на p, то

$$a^{p-1} \equiv 1 \; (\mod p). \tag{1}$$

Увлеченный идеей отца, он попытался доказать обратную теорему. В случае успеха такая теорема могла бы дать желанную формулу для простых чисел. Идею Фаркаша он считал очень ценной: „*Остроумная догадка моего отца столь красива и драгоценна!*” И насколько был прав Янош Больяи! В то время, в первой половине XIX столетия, лишь два математика — Ф. Саррус и один неизвестный автор — пришли к этой проблеме [4] (I. 92). После нескольких попыток Янош Больяи осознал, что доказательство невозможно, т. е. обратная к малой теореме Ферма не имеет места. Он нашел, что

$$2^{340} \equiv 1 \pmod{341},$$

в то время как $341 = 11 \cdot 31$ является составным числом.

Размышления об этом не принесли ему радости. Поскольку выяснилось, что малая теорема Ферма не имеет места, т. е. соотношение (1) может быть выполнено и в тех случаях, когда p не является простым числом, получить искомую формулу для простых чисел вновь не удалось. Сегодня мы, однако, знаем, что основания быть удовлетворенным проделанной работой у Больяи все же были, ибо он открыл наименьшее псевдопростое число по отношению к 2, а именно, первое (а позднее и другие) из тех интересных чисел, которые имели „большую карьеру” в XX столетии.

О своих открытиях Янош Больяи в письме сообщил отцу. Среди прочего он писал: „*... а что является ... главным вопросом, так это именно то, что* $2^{\frac{m-1}{2}}$ *может быть* $\equiv 1 \pmod{m}$, *хотя* m *не является простым числом, для доказательства чего достаточно иметь даже один пример, который был хотя и случайно, но не вслепую, найден из теории:* $2^{340} - 1$ *делится на* $(341 = 11 \cdot 31)$, *в чем тривиальным образом можно убедиться ...*”

Под упомянутой Яношем Больяи „теорией” понимается следующая его теорема: если p и q — простые числа, а величина a — такое целое число, которое не делится ни на p, ни на q, и, кроме того,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{q} \quad \text{и} \quad a^{q-1} \equiv 1 \pmod{p}, \tag{2}$$

то

$$a^{pq-1} \equiv 1 \pmod{pq}. \tag{3}$$

Эта теорема и ее доказательство содержатся на странице, написанной по-немецки.

Согласно рассуждениям Больяи, если обе стороны конгруэнтных соотношений $a^{p-1} \equiv$ $\equiv 1 \pmod{p}$ и $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ возвести в степень $q-1$ или соответственно $p-1$, то получим $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{p}$ и $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{q}$, откуда следует соотношение

$$a^{(p-1)(q-1)} = a^{pq-p-q+1} \equiv 1 \pmod{pq},$$

которое для чисел p, q, a, удовлетворяющих исходным условиям, всегда выполняется. Теперь при условии, что конгруэнтное соотношение

$$a^{p+q-2} = a^{p-1}a^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}$$

имеет место, перемножением последних двух соотношений мы получили бы соотношение (3).

Больяи приходит к заключению, что соотношению (3) удовлетворяют такие простые числа p и q, для которых

$$\frac{a^{p-1}-1}{q} \quad \text{и} \quad \frac{a^{q-1}-1}{p}$$

являются целыми числами. Эти условия означают не что иное, как условия (2).

Для $a = 2$ методом проб он получает числа $p = 11$ и $q = 31$, а именно, то, что мы читаем в его письме: $2^{340} - 1$ делится на 341.

Таким путем Янош Больяи открыл наименьшее псевдопростое число по отношению к 2. Если внимательно следить за его методом, можно обнаружить, что это утверждение совпадает с теоремой 21-летнего Дж. Г. Джинса (1877 – 1946 гг.), которая через 40 лет после смерти Больяи была вновь открыта и опубликована в 1898 году [5].

Только в 1907 и 1912 годах в работах Е. Б. Эскотта [6] и Р. Д. Кармайкла [7] появилось соотношение конгруэнции

$$a^{pqr-1} \equiv 1 \pmod{pqr},$$

хотя оно было на 50 лет раньше указано Больяи (правда, без доказательства).

Больяи устанавливает (теперь уже с доказательством), что

$$2^{2^{32}} \equiv 1 \pmod{2^{32}+1}.$$

С такими конгруэнтными соотношениями, в которых уже фигурируют числа типа Ферма, встречаемся впервые в математической литературе в начале XX столетия [8, 9]. Несомненно, Янош Больяи был первым, кто доказал, что замечательное число $F_5 = 2^{32}+1$ является псевдопростым числом.

В [2] приведено конгруэнтное соотношение

$$4^{14} \equiv 1 \pmod{15},$$

которое отметил Д. Н. Лемер [10] приблизительно через 80 лет после того, как была написана работа Больяи.

Понятие псевдопростого числа является одной из тех идей Больяи, значение которой по-настоящему проявилось только в XX столетии. В 1910 году Кармайкл открывает числа, названные его именем [11]. В середине столетия значительными оказываются публикации А. Роткиевича. В 1962 году он доказал, что существует бесконечное множество таких простых чисел p, q, для которых $2^{pq} \equiv 2 \pmod{pq}$, и в 1963 году установил, что среди арифметических произведений $ax + b$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, где a и b — относительно простые числа, существует бесконечное множество псевдопростых чисел. И по сей день математики обнаруживают все более и более интересные факты, связанные с псевдопростыми числами. Лишь в 1992 году с использованием идеи Пала Эрдеша удалось доказать, что числа Кармайкла за любыми заданными пределами существуют [12]. Псевдопростые числа исключительно важны с точки зрения приложений в криптологии (теории шифровки), и особыми их представителями являются числа Кармайкла [13]. Известны все псевдопростые числа в интервале до одного миллиона [14].

В настоящее время для кодирования сообщений очень важными являются тестирование простых чисел и родственная с этим вопросом факторизация. Основой метода RSA, в результате исследований по теории которого в середине 70-х годов сотрудники массачусетского Института технологий развили новую методику криптографии [15], является малая теорема Ферма теории чисел (точнее, ее относительно простое следствие). Из новейших исследований вытекает, что RSA-кодирование является уязвимым, т. е. его можно математически разгадать. С использованием соотношения Больяи (3) можно было установить результат, показывающий ненадежность метода RSA и не основывающийся на факторизации простых чисел [16].

Среди действительных чисел Яношу Больяи не удалось, и не могло удаться, найти формулу для простых чисел. Полный успех был достигнут им для комплексных простых чисел в кольце комплексных целых. Каким же образом он подошел к этому значительному в то время результату, о котором знал лишь Гаусс?

Больяи признал, что вначале недостаточно ясно понимал понятие мнимых величин. Он сосредоточил свое внимание на них позднее, заметив формулу $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$. В 1820 году, во время работы над „Appendix", начал исследовать комплексные числа. То, что в это время под учением мнимых чисел он понимал не только теорию комплексных чисел, а думал о делимости целых комплексных чисел, ясно видно из его записи. „*С самого начала я чувствовал необходимость включения в теорию чисел мнимых чисел*", — пишет он в 50-х годах.

Гаусс обосновал и разработал теорию делимости комплексных чисел. Свои исследования он изложил в двух докладах в Геттингене на заседании Королевского научного общества в 1831 году; позднее доклады были опубликованы [17, 18]. Тем не менее, арифметику комплексных целых Янош Больяи разработал приблизительно в то же время и независимо от Гаусса. Однако, чтобы быть объективным, следует отметить, что теория Больяи не настолько исчерпывающая и подробная, как материалы, представленные в статье Гаусса [18]. Он не подготовил целостной работы на указанную тему, однако, собрав с разных страниц его рукописи относящиеся к этому вопросу замечания, можно заключить, что все проблемы делимости комплексных целых были им разработаны.

Прежде всего отметим, что в кольце комплексных целых он ясно распознал простые числа. Он установил, что комплексные простые числа — это:

a) числа $1+i, 1-i, -1+i, -1-i$;

b) рациальные простые числа $4m+3$, т. е. числа 3, 7, $11, \ldots$, которые были названы им абсолютными простыми числами;

c) комплексные сомножители рациональных простых чисел вида $4m+1$, т. е. числа $1+2i, 1-2i, 2+3i, 6-i, \ldots$, которые были названы им совершенными простыми числами.

С введением комплексных целых родилась новая теория простых чисел, в которой рациональные целые 3, 7, $11, \ldots$, как комплексные целые $3 = 3 + 0 \cdot i$ и т. д., являются простыми числами, но если 5 рассматривать как комплексное целое, то это уже число составное, так как $5 = (1+2i)(1-2i)$. Интересно то, что существуют такие числа, которые как в теории целых чисел, так и в кольце комплексных целых являются простыми числами. Они были названы Яношем Больяи абсолютными простыми числами. По всей видимости, он подразумевал здесь аналогию с абсолютной геометрией: абсолютная геометрическая теорема действительна как в евклидовой, так и в неевклидовой геометриях.

Когда речь идет об исследованиях Яноша Больяи в рамках теории комплексных чисел, нельзя забывать о работе „Responsio", представленной им в лейпцигское Общество Яблоновского в 1837 году. В этой работе он не занимается арифметикой комплексных чисел, хотя уже владел ею. В конкурсном объявлении, однако, ждали ответа на вопрос конструирования комплексных чисел, и, следовательно, Больяи не считал нужным доложить в своей работе об исследованиях, касающихся комплексных целых. Как известно, его конкурсную работу члены жюри не поняли и отклонили.

Больяи не только разработал теорию делимости комплексных чисел, но и применял ее во многих случаях. Среди прочего, он дал новое краткое доказательство знаменитой теоремы П. Ферма (1601 – 1664 гг.), согласно которой любое простое число вида $4k+1$ может быть записано в виде суммы квадратов двух чисел.

Теорема эта была хорошо известна для Больяи из „Disquisitiones arithmeticae". Прочитав длинное доказательство Л. Эйлера (1707 – 1783 гг.), датированное 1754 годом, в библиотеке имени Телеки (Teleki Téka), Больяи-отец предложил сыну попытаться найти „наиболее простое" обоснование этого утверждения. Янош занялся интересовавшим отца вопросом и вскоре в письме на двух страницах в четырех вариантах дал доказательство теоремы Ферма.

В XX столетии математики, работающие в области теории чисел, упорно соревновались друг с другом в стремлении найти наиболее простое доказательство упомянутой теоремы Ферма. Соревнование это достигло высшей точки в работе Д. Загира в 1990 году, которому удалось в одном предложении доказать требуемое утверждение [19]. Нам представляется, что одно из доказательств Больяи еще проще.

Янош Больяи уделял внимание и другого рода задачам теории чисел. Не во всех случаях ему удавалось достичь значительных результатов, однако он всегда искал новые пути решения проблем. В рукописях открываются изящные идеи Больяи, чувствуется его стремление к тому, чтобы сократить и дополнить уже имеющиеся решения и доказательства.

1. На многих страницах его рукописного наследства имеются замечания, в которых упоминаются числа вида

$$F_n = 2^2 + 1$$

— так называемые числа Ферма. Больяи называл эти числа самыми замечательными, и его интересовал вопрос о том, являются ли они простыми. „*Необходимо выяснить, являются числа* $2^{64}+1, \ldots$ *простыми или нет*", – пишет он. И хотя ему не удалось найти сомножители даже для F_6, однако следует уделить внимание его попыткам, так как он занимался вопросом, который был решен лишь 20 лет спустя Фортуной Ландри.

Заключение Больяи относительно чисел Ферма таково: „*Числа вида* $2^{2^m}+1$ *всегда имеют вид* $6n-1$ *и, следовательно, никогда не делятся на* 3". Свое утверждение он доказывает; им показано, что $2^{64} \equiv 1 \pmod 3$. К сожалению, дальше этого он не пошел.

2. В рукописях Больяи есть и диофантовы уравнения. С ними он впервые встретился в работах Гаусса, Эйлера, Хауссера. Сведения о таких уравнениях он черпал главным образом из работы Хауссера [20], так как, основываясь на материалах этой книги, в 1818 году успешно сдал вступительные экзамены в венской Инженерной академии. Больяи исследует ранее рассматривавшееся Хауссером уравнение

$$27x + 49y + 70z = 1000.$$

Сначала с некоторыми изменениями он следует методу Хауссера, затем решает задачу, используя свою идею. Он заметил, что его подход более быстр и удобен, чем метод, указанный в книге.

В его рукописях встречаются диофантовы уравнения и более высоких порядков. Например, он показал, что не существует таких чисел x и y, для которых $x^2 + y^2 = 3$, поскольку, если x и y одновременно четные или нечетные, то $x^2 + y^2$ имеет то же свойство; если же x — четное число, а y — нечетное число, то сумма $x^2 + y^2$ имеет вид $4k + 1$, что не может быть равным 3. Он, однако, замечает, что уравнение $x^2 + y^2 = 3$ в области комплексных целых решается: $i^2 + 2^2 = 3$.

В рукописях Больяи только изредка, на нескольких малых карточках встречаются замечания относительно великой гипотезы Ферма, доказанной в настоящее время. Повидимому, эта догадка Ферма не волновала Яноша Больяи настолько, насколько занимали другие вопросы теории чисел.

До сих пор нам представлялось, что до последней четверти прошлого века венгерская математика не показывала сколь-нибудь заметных результатов по теории чисел. Если принять во внимание рукописное наследие Яноша Больяи, то начало венгерских исследований по теории чисел следует переместить на полвека раньше. Обоих Больяи можно считать первыми специалистами по теории чисел в Венгрии. Фаркаша Больяи также интересовали вопросы теории чисел; он не только инспирировал своего сына на решение различного рода теоретико-числовых задач, но и сам работал над их решением. К сожалению, работы отца и сына Больяи не стали всеобщим достоянием и по сей день. За исключением самих Больяи, никто не знал об их работах, не исключая и Гаусса. Только рукописи сохранили для нас материалы этих работ.

* * *

Следующее замечание не имеет отношения к открытиям Яноша Больяи в теории чисел, однако обстоятельство, о котором идет речь, представляется нам достаточно важным. Особой превратностью истории математики является то, что Янош Больяи в 1848 году мог ознакомиться с работой Н. И. Лобачевского, которая появилась в 1840 году под названием „Geometrische Untersuchungen zur Théorie der Parallellinien" [21], однако Н. И. Лобачевский не читал „Appendix" Больяи. Гаусс мог бы познакомить венгерского и русского математиков. Именно Гаусс прислал Фаркашу Больяи книгу Н. И. Лобачевского, и хотя сам он уже в 1832 году читал работу „Appendix" и переписывался с Н. И. Лобачевским, не указал русскому математику на то, что более ранняя работа сообщает о похожих исследованиях и результатах.

Нетрудно представить себе, с каким возбуждением читал Янош Больяи работу Н.И. Лобачевского. Из его рукописей видно, что он очень высоко ценил эту книгу. Он не скупится на похвалы. „*Главная идея Лобачевского превосходна, ... его творение является шедевром*". „*Он принадлежит к тем немногим, кто заметил погруженную во мрак сущность предмета. То, что он старался вытащить на свет и обогатить новыми взглядами, обращается во славу его*". „*Н.И. Лобачевский прекрасно, как искусный художник, исследует самостоятельность сферической геометрии*". Он называет Н. И. Лобачевского „гигантским созидающим умом". Строки Больяи, дающие оценку творению русского ученого, свидетельствуют о величии характера: „*я с радостью разделю заслугу открытия*".

Янош Больяи был исключительно счастлив, что узнал о работе Н. И. Лобачевского. Остается только сожалеть о том, что Н. И. Лобачевский не смог узнать Яноша Больяи.

Автор благодарен Е. Конторошу и К. Конторошу за перевод настоящей статьи на русский язык.

1. *Bolyai János.* Appendix. Scientiam spatti absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori hand unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geoemtrica. Marosvásárhely, 1832.
2. *Bolyai* János kéziratos hagyatéka. — Marosvásárhely: Bolyai-Teleki Könyvtár.
3. *Burton M. D.* The history of mathematics. — USA, 1984.
4. *Dickson L. E.* History of the theory of numbers. I – III, Reprinted from the first edition. — New York: Chelsea Publ. Comp., 1971.
5. *Jeans J. H.* The converse of Fermat's theorem // Messenger Math. — 1897 – 1898. — **27**. — P. 174.
6. *Escott E. B.* The converse of Fermat's theorem // Ibid. — 1907. — **36**. — P. 175 – 176.
7. *Carmichael R. D.* On composite numbers P which satisfy the Fermat congruence $a^{P-1} \equiv 1 \pmod P$ // Amer. Mat. Mon. — 1912. — **19**. — P. 22 – 27.
8. *Cipolla M.* Sui numeri composti P, che verificano la congruenza di Fermat $a^{P-1} \equiv 1 \pmod P$ // Ann. mat. — 1904. — **9**. — P. 139 – 160.
9. *Cunnigham A.* Math. Quest. Educat. Times. — 1908. — **14**, № 2. — P. 22 – 23.
10. *Lehmer D. N* Tests for primality by the converse of Fermat's theorem // Bull. Amer. Math. Soc. — 1927. — **33**. — P. 327 – 340.
11. *Carmichael R. D.* Note on a new number theory function // Ibid. — 1909 – 1910. — **16**. — P. 232 – 238.
12. *Alford W. R., Granville A., and Pomerance C.* There are infinitely many Carmichael numbers // Ann. Math. — 1994. — **139**, № 3. — P. 703 – 722.
13. *Dénes Tamás.* A kis Fermat-tétel nagy karrierje az információ titkositásában // Hiradástechnika. — 2001. — **56**, № 10.
14. *Pinch R. G. E.* The pseudoprimes up to 10^{12}, ftp://ftp.dpmms.cam.ac.uk/pub/PSP (8 September 1992).
15. *Rivest R. L., Shamir A., and Adleman L.* A method for obtaining digital signatures and public key cryptosystems // Communs ACM. — 1978. — № 21/2.
16. *Dénes József.* Gondolatok a rejtjelzés megfejthetőségéről // Hiradástechnika. — 2001. — **56**, № 7. — P. 21 – 25.
17. *Gauss C. F.* Theoria residuorum biquadraticorum // Comment. secunda, Götting. gelehrte Anzeigen. — Göttingen, 1831. — Stüch 64. — P. 625 – 638.
18. *Gauss C. F.* Theoria residuorum biquadraticorum // Comment. secunda, Comment. Soc. Reg. Sci. Götting. Recent. — 1832. — **2**. — P. 89 – 148.
19. *Zagier D.* A one-sentence proof that every prime $p \equiv 1 \pmod 4$ is a sum of two squares // Amer. Math. Mon. — 1990. — **97**, № 2. — P. 144.
20. *Hausser M.* Analitische Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik. — Wien, 1816.
21. *Lobacsevszkij N. J.* Geometrische Untersuchungen zur Théorie der Parallellinien. — Berlin, 1840.

Получено 29.10.2002