

**МЕТОДЫ РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
С ПРИСОЕДИНЕННЫМ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ ***

В. А. Троценко, Ю. В. Троценко

*Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: trots@imath.kiev.ua*

We consider a mechanical system consisting of a circular cylindrical shell and an absolutely rigid body attached to one of the ends of the shell. Using the principle of possible displacements, we construct a mathematical model for the equilibrium state of the considered system that is effected by a loading of a general form. Using this model we formulate an eigen value boundary-value problem of the "shell-body" type for free oscillations, and find its approximate solution. In the case where the shell is replaced with a Timoshenko beam, we construct an exact solution of the problem under consideration. We find an estimate for how the rigid body influences the oscillations of the system and study precision of the beam approximation of the bend oscillations of the shell.

Розглядається механічна система, що складається з кругової циліндричної оболонки і абсолютно твердого тіла, яке прикріплене до одного з її торців. Виходячи з принципу можливих переміщень побудовано математичну модель рівноважного стану розглядуваної системи, що знаходиться під дією навантажень загального вигляду. На цій основі сформульовано крайову задачу на власні значення, що описує вільні коливання системи «тіло-оболонка», та запропоновано її наближене розв'язання. У випадку заміни оболонки еквівалентною балкою Тимошенка побудовано точний розв'язок розглядуваної задачі. Наведено оцінку впливу твердого тіла на коливання системи і досліджено точність балкової апроксимації згинних коливань оболонки.

Введение. Тонкие упругие оболочки вращения с присоединенными телами широко используются в практике современного машиностроения и строительства. Исследование динамики таких конструкций под воздействием различного рода нестационарных нагрузок приводит к решению достаточно сложной начально-краевой задачи в частных производных. Как правило, построение решений этой задачи базируется на сведениях ее к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной по времени; при этом используются собственные формы свободных колебаний конструкции. Полученная на этой основе система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат имеет наиболее простую форму и допускает ее исследование на основе известных методов. Поэтому определение частот и форм собственных колебаний сложных механических систем является первоочередной задачей в общем комплексе задач исследования их динамического поведения под воздействием сосредоточенных и распределенных нагрузок.

С другой стороны, потребности практики требуют создания сравнительно простых инженерных математических моделей, адекватно описывающих динамическое поведение оболочечных конструкций. Такие модели могут быть построены на основе исполь-

* Выполнена при частичной поддержке научно-исследовательского проекта № 0102U000917.

зования различного рода балочных теорий для аппроксимации изгибных колебаний оболочки. Естественно, весьма важной становится проблема об установлении границ применимости упрощенных таким образом постановок задач.

Исследованию продольных и крутильных колебаний цилиндрической оболочки с присоединенными массами на ее торцах посвящены работы В. Е. Бреславского [1, 2]. В работе В. Г. Паламарчука [3] изучено взаимодействие цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела, связанного с внутренней поверхностью оболочки с помощью жестких стержней. Построению математической модели взаимодействия цилиндрической оболочки с присоединенным к одному из ее торцов абсолютно твердым телом посвящена работа [4]. В работе Ю. Ю. Швейко, А. Д. Брусиловского, А. М. Мельниковой [5] построено точное решение задачи о собственных колебаниях балок, соединенных круговой цилиндрической оболочкой. Приближенное решение рассматриваемой задачи предложено в работе [6]. Б. И. Рабинович, В. П. Шмаков и В. С. Кобычкин [7] предложили теорию колебаний конструкций, несущих упругие резервуары с жидкостью. В качестве расчетной схемы использована упругая балка Эйлера – Бернулли с присоединенной к ней на упругих связях моментной оболочкой вращения, которая заполнена идеальной и несжимаемой жидкостью. Исследованию собственных колебаний предварительно напряженной безмоментной оболочки вращения из гиперупругого материала с присоединенным к одному из ее торцов жестким диском посвящена работа В. А. Троценко и В. С. Кладиноги [8].

При балочной аппроксимации изгибных колебаний оболочки в инженерной практике обычно пренебрегают вторичными эффектами, обусловленными деформацией сдвига и инерцией поворота поперечного сечения балки. Рассматривая свободные колебания тонкой цилиндрической оболочки, К. Forsberg [9] показал, что эти вторичные эффекты становятся весьма существенными для коротких оболочек и особенно при расчете высших форм колебаний.

Исследованию колебаний балок Тимошенко с присоединенными телами конечных размеров посвящено большое количество работ. Достаточно полный обзор этих работ приведен в работе W. D. White и G. R. Heppler [10]. Здесь следует также отметить работу R. E. Rossi и P. A. A. Laura [11], где получены обстоятельные табличные и графические данные по расчету частот и форм колебаний балки Тимошенко, защемленной на одном конце и несущей конечную массу на другом. По результатам этих работ можно сделать вывод, что колебания балок с присоединенными телами достаточно хорошо изучены и усилия исследователей в настоящее время направлены на совершенствование алгоритмов их расчета и на выявление новых механических эффектов взаимодействия тела с балкой при их совместных колебаниях.

Данная работа посвящена построению математической модели и решению задачи о свободных неосесимметричных колебаниях круговой цилиндрической оболочки, к одному из торцов которой присоединено твердое тело конечных размеров. Построение приближенных аналитических решений полученных спектральных задач базируется на их эквивалентных вариационных формулировках и методе Ритца. Исследуются границы применимости упрощенных постановок задачи, которые получены с использованием различных теорий балок.

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из тонкостенной круговой цилиндрической оболочки радиуса R и длины l и абсолютно твердого тела, которое жестко прикреплено к одному из ее торцов. Считается, что второй торец

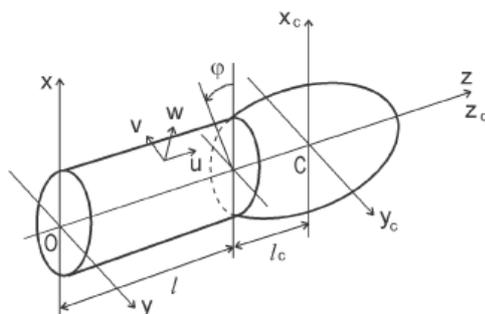


Рис. 1. Общий вид конструкции и системы координат.

оболочки жестко закреплен. Пусть тело имеет две взаимно ортогональные плоскости симметрии, линией пересечения которых является ось Oz , совпадающая с продольной осью оболочки (рис. 1). Координатную плоскость Oxz совместим с одной из плоскостей симметрии твердого тела, а начало системы координат $Oxyz$ поместим в плоскости закрепленного торца оболочки.

Для описания перемещений твердого тела введем прямоугольную систему координат $Cx_cy_cz_c$ с началом в центре инерции твердого тела и осями Cx_c и Cy_c , параллельными осям Ox и Oy . Орты системы координат $Cx_cy_cz_c$ обозначим через \vec{i}_c, \vec{j}_c и \vec{k}_c . Срединную поверхность оболочки отнесем к ортогональной системе криволинейных координат z и φ , где φ – полярный угол, отсчитываемый от оси Ox . С этими координатами свяжем локальный ортогональный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, в котором \vec{e}_1 и \vec{e}_2 – единичные векторы, касательные к линиям главных кривизн срединной поверхности оболочки и направленные в сторону возрастания координат z и φ .

Предположим, что к рассматриваемой конструкции приложена малая нагрузка общего вида: сосредоточенная в точке C сила и момент относительно точки C

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_1 \vec{i}_c + \Delta F_2 \vec{j}_c + \Delta F_3 \vec{k}_c, \quad \Delta \vec{M} = \Delta M_1 \vec{i}_c + \Delta M_2 \vec{j}_c + \Delta M_3 \vec{k}_c,$$

действующие на твердое тело, а также распределенная нагрузка

$$\Delta \vec{Q} = \Delta Q_1 \vec{e}_1 + \Delta Q_2 \vec{e}_2 + \Delta Q_3 \vec{e}_3,$$

действующая на оболочку. В результате система придет в возмущенное равновесное состояние, подвергаясь при этом деформациям и перемещениям. Равновесное состояние системы будем характеризовать вектором перемещения точек срединной поверхности оболочки

$$\vec{U} = u \vec{e}_1 + v \vec{e}_2 + w \vec{e}_3,$$

вектором поступательного перемещения центра масс твердого тела и вектором угла его поворота вокруг этого центра

$$\vec{U}_0 = u_{01} \vec{i}_c + u_{02} \vec{j}_c + u_{03} \vec{k}_c, \quad \vec{\theta}_0 = \vartheta_{01} \vec{i}_c + \vartheta_{02} \vec{j}_c + \vartheta_{03} \vec{k}_c.$$

При этом предполагается малость перемещений твердого тела и оболочки, для которых справедливы допущения линейной теории.

Равенство перемещений оболочки и твердого тела на контуре L , образованном поперечным сечением оболочки при $z = l$, приводит к соотношению

$$\vec{U} = \vec{U}_0 + [\vec{\theta}_0 \times \vec{r}_0], \quad (1)$$

где $\vec{r}_0 = (R \cos \varphi) \vec{i}_c - (R \sin \varphi) \vec{j}_c - l_c \vec{k}_c$ — радиус-вектор точек контура L в системе координат $Cx_c y_c z_c$; l_c — расстояние от точки C вдоль оси Oz до торцевого сечения оболочки, в котором прикреплено твердое тело.

Из соотношения (1) и условий непрерывности соответствующих углов поворота твердого тела и оболочки, с учетом связи между ортами системы координат $Cx_c y_c z_c$ и ортами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$\vec{i}_c = -\sin \varphi \vec{e}_2 + \cos \varphi \vec{e}_3, \quad \vec{j}_c = \cos \varphi \vec{e}_2 - \sin \varphi \vec{e}_3, \quad \vec{k}_c = \vec{e}_1, \quad (2)$$

получим следующие геометрические граничные условия на контуре L :

$$\begin{aligned} u &= u_{03} - \vartheta_{01} R \sin \varphi - \vartheta_{02} R \cos \varphi, \\ v &= (\vartheta_{02} l_c - u_{01}) \sin \varphi - (\vartheta_{01} l_c + u_{02}) \cos \varphi - \vartheta_{03} R, \\ w &= -(\vartheta_{01} l_c + u_{02}) \sin \varphi - (\vartheta_{02} l_c - u_{01}) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=l} = \vartheta_{01} \sin \varphi + \vartheta_{02} \cos \varphi.$$

Для получения уравнений равновесия системы воспользуемся принципом возможных перемещений

$$\delta \Pi = \delta A, \quad (4)$$

где $\delta \Pi$ — вариация потенциальной энергии упругой деформации оболочки, δA — работа внешних сил на возможных перемещениях системы.

Потенциальную энергию деформаций тонкой цилиндрической оболочки можно представить в виде [12]

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right)^2 + \frac{2\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] d\Sigma + \frac{D}{2} \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \frac{2\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \right. \\ &+ \left. 2(1-\nu) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \varphi} \right)^2 \right] d\Sigma, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки, Σ и h — срединная поверхность и толщина оболочки.

Первый интеграл в формуле (5) представляет собой потенциальную энергию удлинений и сдвигов, а второй — потенциальную энергию изгиба и кручения.

Работа внешних сил, приложенных к телу и оболочке, такова:

$$A = \iint_{\Sigma} \Delta \vec{Q} \cdot \vec{u} d\Sigma + \Delta \vec{F} \cdot \vec{u}_0 + \Delta \vec{M} \cdot \vec{\theta}_0. \quad (6)$$

Обозначим через $\delta \vec{u}$, $\delta \vec{u}_0$ и $\delta \vec{\theta}_0$ вариации перемещений оболочки, твердого тела и его углов поворота.

После подстановки формул (5) и (6) в (4) и интегрирования по частям двойных интегралов вариационное уравнение с учетом условий (3) можно привести к виду

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{F} \iint_{\Sigma} \left\{ [L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) + F\Delta Q_1] \delta u + \right. \\ & + [L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) + F\Delta Q_2] \delta v - \\ & \left. - [L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) - F\Delta Q_3] \delta w \right\} d\Sigma + \\ & + \left[\oint_L (Q_1^* \cos \varphi - S \sin \varphi) ds - \Delta F_1 \right] \delta u_{01} + \\ & + \left[\oint_L (Q_1^* \sin \varphi + S \cos \varphi) ds + \Delta F_2 \right] \delta u_{02} + \left(\oint_L T_1 ds - \Delta F_3 \right) \delta u_{03} + \\ & + \left[\oint_L (P_1 \sin \varphi + l_c S \cos \varphi) ds + \Delta M_1 \right] \delta \vartheta_{01} + \\ & + \left[\oint_L (P_1 \cos \varphi - l_c S \sin \varphi) ds + \Delta M_2 \right] \delta \vartheta_{02} + \\ & + \left[\oint_L RS ds + \Delta M_3 \right] \delta \vartheta_{03} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\nu_1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, & L_{12} &= L_{21} = \frac{\nu_2}{R} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \varphi}, & L_{13} &= L_{31} = \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial z}, \\ L_{22} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}, & L_{23} &= L_{32} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}, & L_{33} &= \frac{1}{R^2} (c^2 \Delta \Delta + 1), \end{aligned}$$

$$\Delta = R^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \nu_1 = \frac{1-\nu}{2}, \quad \nu_2 = \frac{1+\nu}{2}, \quad c^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad F = \frac{1-\nu^2}{Eh},$$

$$S = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right), \quad T_1 = \frac{1}{F} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\nu}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) \right], \quad P_1 = RT_1 + M_1 + l_c Q_1^*,$$

$$M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad Q_1^* = -\frac{c^2}{F} \left[R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial \varphi^2} \right].$$

Приравняв к нулю коэффициенты при δu , δv и δw в поверхностных интегралах (7), получим известные уравнения равновесия цилиндрической оболочки. В свою очередь, из равенства нулю коэффициентов при вариациях параметров движения твердого тела следуют уравнения равновесия последнего.

Уравнения свободных колебаний системы «тело-оболочка» можно получить из выведенных уравнений равновесия, если в них, воспользовавшись принципом Даламбера, положить

$$\Delta \vec{Q} = -\rho h \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{F} = -m_0 \frac{\partial^2 \vec{u}_0}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$\Delta M_1 = -J_{x_c} \frac{\partial^2 \vartheta_{01}}{\partial t^2}, \quad \Delta M_2 = -J_{y_c} \frac{\partial^2 \vartheta_{02}}{\partial t^2}, \quad \Delta M_3 = -J_{z_c} \frac{\partial^2 \vartheta_{03}}{\partial t^2},$$

где J_{x_c} , J_{y_c} , J_{z_c} — моменты инерции твердого тела относительно осей Cx , Cy , Cz соответственно, m_0 — масса твердого тела, ρ — плотность материала оболочки.

Рассматривая установившиеся свободные колебания системы с частотой ω , полагаем

$$\{\vec{U}, \vec{U}_0, \vec{\theta}_0\} = \{\vec{U}, \vec{U}_0, \vec{\theta}_0\} e^{i\omega t}.$$

В дальнейшем для сокращения записи знак тильды будем опускать. В результате определение амплитудных значений шести параметров движения твердого тела и трех компонент вектора перемещения оболочки сводится интегрированию системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) &= -\omega^2 \rho h F u, \\ L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) &= -\omega^2 \rho h F v, \\ L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) &= \omega^2 \rho h F w \end{aligned} \quad (9)$$

при нелокальных граничных условиях при $z = l$:

$$\begin{aligned} \oint_L (Q_1^* \cos \varphi - S \sin \varphi) ds &= m_0 \omega^2 u_{01}, & \oint_L (Q_1^* \sin \varphi + S \cos \varphi) ds &= -m_0 \omega^2 u_{02}, \\ \oint_L T_1 ds &= m_0 \omega^2 u_{03}, & \oint_L (P_1 \sin \varphi + l_c S \cos \varphi) ds &= \omega^2 J_{x_c} \vartheta_{01}, \\ \oint_L (P_1 \cos \varphi - l_c S \sin \varphi) ds &= \omega^2 J_{y_c} \vartheta_{02}, & \oint_L R S ds &= \omega^2 J_{z_c} \vartheta_{03}. \end{aligned} \quad (10)$$

К граничным условиям (10) необходимо добавить еще геометрические условия сопряжения (10) и условия жесткого закрепления торца оболочки при $z = 0$.

Особо следует отметить, что граничные условия (10) являются естественными условиями для соответствующего функционала на классе функций, удовлетворяющих условиям (3) и геометрическим условиям закрепления свободного от твердого тела торца оболочки.

2. Построение решения. Малость параметров движения системы и ее симметрия позволяют общее движение системы разложить на независимые составляющие в направлении и вокруг продольной оси, а также в двух взаимно перпендикулярных плоскостях Oxz и Oyz . В дальнейшем будем рассматривать поперечные колебания конструкции в одной из плоскостей симметрии, в качестве которой, в частности, примем плоскость Oxz . В этом случае перемещения срединной поверхности оболочки будем искать в виде

$$u(z, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \cos n\varphi, \quad v(z, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z) \sin n\varphi, \quad w(z, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(z) \cos n\varphi. \quad (11)$$

В соответствии с выражениями (11) усилия и моменты в срединной поверхности оболочки будут определяться по формулам

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{1(n)} \cos n\varphi, & S &= \sum_{n=1}^{\infty} S_{(n)} \sin n\varphi, \\ M_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} M_{1(n)} \cos n\varphi, & Q_1^* &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1(n)}^* \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Перейдем к безразмерным величинам, которые связаны с соответствующими размерными величинами следующими соотношениями:

$$\{u_n, v_n, w_n, u_{01}\} = R\{\bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{u}_{01}\}, \quad \{T_{1(1)}, Q_{1(1)}^*, S_{(1)}\} = \frac{1}{F}\{\bar{T}_{1(1)}, \bar{Q}_{1(1)}^*, \bar{S}_{(1)}\}, \quad (13)$$

$$\omega^2 = \frac{\bar{\omega}^2}{F h \rho R^2}, \quad M_{1(1)} = \frac{R \bar{M}_{1(1)}}{F}, \quad m_0 = \pi \rho h R^2 \bar{m}_0, \quad J_{y_c} = \pi \rho h R^4 \bar{J}_{y_c}.$$

В дальнейшем будем пользоваться безразмерными величинами, опуская при этом черточку над ними.

Подставляя (11) и (12) в (3), (9) и (10), получаем для определения частот и форм собственных колебаний рассматриваемой конструкции следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_{11}^{(n)}(u_n) + L_{12}^{(n)}(v_n) + L_{13}^{(n)}(w_n) + \omega^2 u_n &= 0, \\ L_{21}^{(n)}(u_n) + L_{22}^{(n)}(v_n) + L_{23}^{(n)}(w_n) + \omega^2 v_n &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$L_{31}^{(n)}(u_n) + L_{32}^{(n)}(v_n) + L_{33}^{(n)}(w_n) - \omega^2 w_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $L_{ij}^{(n)}$, $i, j = 1, 2, 3$, — операторы, которые получены из операторов L_{ij} после отделения в них угловой переменной.

Уравнения (14) описывают два типа собственных колебаний системы. Первый тип колебаний соответствует совместному движению тела и оболочки в плоскости Oxz . В этом случае система уравнений (14) должна решаться при $n = 1$ с использованием следующих граничных условий при $z = l$ и $z = 0$:

$$(Q_{1(1)}^* - S_{(1)})_{z=l} = \omega^2 m_0 u_{01}, \quad (T_{1(1)} + M_{1(1)} + Q_{1(1)}^* l_c - S_{(1)} l_c)_{z=l} = \omega^2 J_{y_c} \vartheta_{02}, \quad (15)$$

$$u_1(l) = -\vartheta_{02}, \quad v_1(l) = \vartheta_{02} l_c - u_{01}, \quad w_1(l) = -v_1(l), \quad \left. \frac{dw_1}{dz} \right|_{z=l} = \vartheta_{02}, \quad (16)$$

$$u_1(0) = v_1(0) = w_1(0) = \left. \frac{dw_1}{dz} \right|_{z=0} = 0. \quad (17)$$

Второй тип колебаний возможен лишь для $u_{01} = \vartheta_{02} \equiv 0$ и $n > 1$. В этом случае решения системы (14) должны удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} u_n(l) = v_n(l) = w_n(l) = \left. \frac{dw_n}{dz} \right|_{z=l} &= 0, \\ u_n(0) = v_n(0) = w_n(0) = \left. \frac{dw_n}{dz} \right|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Полученные граничные условия для двух типов колебаний системы являются следствием ортогональности функций $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Таким образом, при числе волн в окружном направлении $n > 1$ имеем классическую задачу об определении частот и форм неосесимметричных собственных колебаний цилиндрической оболочки с двумя жестко закрепленными торцами. В случае же $n = 1$ имеем спектральную задачу, где частотный параметр входит не только в уравнения (14), но и в граничные условия (15). Кроме этого граничные условия (15) содержат обобщенные координаты движения твердого тела, которые связаны с соответствующими перемещениями оболочки при $z = l$ геометрическими условиями сопряжения (16). Минимальной

частотой системы будет меньшая из двух частот, соответствующих первому или второму типу колебаний. Из приведенных выше уравнений и граничных условий также следует, что для каждой собственной частоты в рядах (11) для перемещений u , v , w останется по одному члену: с индексом $n = 1$ при совместных колебаниях тела и оболочки и с произвольным индексом $n > 1$ для второго типа колебаний.

Если в системе уравнений (14) имеем коэффициенты, которые не зависят от продольной координаты z , то существует возможность получения точного решения краевых задач (14)–(17) и (14), (18) на основе метода Эйлера. Однако такой подход приводит к достаточно сложным алгоритмам решения поставленных задач. Поэтому в дальнейшем будем строить приближенные решения рассматриваемых спектральных задач, используя при этом их эквивалентные вариационные формулировки. Как отмечалось выше, наиболее сложные граничные условия (15) являются естественными граничными условиями для соответствующего функционала, полученного из вариационного уравнения (4). Следовательно, минимизацию этого функционала необходимо осуществлять на классе функций, удовлетворяющих граничным условиям (16) и (17). Для второго типа колебаний системы класс допустимых функций должен быть подчинен граничным условиям (18). В связи с этим представим искомые функции для обоих типов колебаний в следующем виде:

$$u_n(z) = \sum_{j=1}^N a_j U_j(z) + \delta_{1n} \vartheta_{02} u_0(z),$$

$$v_n(z) = \sum_{j=1}^N b_j V_j(z) + \delta_{1n} (\vartheta_{02} l_c - u_{01}) v_0(z), \quad (19)$$

$$w_n(z) = \sum_{j=1}^N c_j W_j(z) + \delta_{1n} (u_{01} w_0(z) + \vartheta_{02} f(z)),$$

где a_j, b_j, c_j — произвольные постоянные, подлежащие определению в дальнейшем вместе с постоянными u_{01} и ϑ_{02} , $\delta_{1n} = 1$ при $n = 1$ и $\delta_{1n} = 0$ при $n > 1$.

Функции $u_0(z)$, $v_0(z)$, $w_0(z)$, $f(z)$ и координатные функции $U_j(z)$, $V_j(z)$, $W_j(z)$ в выражениях (19) выберем в следующем виде:

$$u_0(z) = -\frac{1}{l}z, \quad v_0(z) = -u_0(z), \quad w_0(z) = \left(\frac{3}{l^2} - \frac{2}{l^3}z\right)z^2,$$

$$f(z) = \left(-\frac{l+3l_c}{l^2} + \frac{2l_c+l}{l^3}z\right)z^2, \quad U_j(z) = V_j(z),$$

$$U_j(z) = z(z-l)P_j\left(\frac{2z}{l}-1\right), \quad W_j(z) = z^2(z-l)^2P_j\left(\frac{2z}{l}-1\right), \quad (20)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь $P_j(z)$ — смещенные на единицу по индексу j многочлены Лежандра, вычисление которых и их первых двух производных можно проводить с помощью рекуррентных соотношений

$$P_{j+2}(z) = \frac{1}{j+1} [(2j+1)zP_{j+1}(z) - jP_j(z)],$$

$$P'_{j+2}(z) = zP'_{j+1}(z) + (j+1)P_{j+1}(z), \quad P''_{j+2}(z) = zP''_{j+1}(z) + (j+2)P'_{j+1}(z), \quad (21)$$

$$P_1(z) = 1, \quad P_2(z) = z, \quad P_3(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1).$$

Предлагаемые представления искомых решений в форме (19) удовлетворяют главным граничным условиям (16), (17) для первого типа колебаний и условиям (18) для второго типа колебаний при любых значениях вектора

$$\vec{X} = [a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N, c_1, c_2, \dots, c_N, u_{01}, \vartheta_{02}].$$

Компоненты вектора \vec{X} в дальнейшем определяются из условий стационарности указанного выше функционала. При этом исходная задача сводится к решению однородной алгебраической системы

$$(A - \omega^2 B)\vec{X}^T = 0, \quad (22)$$

где \vec{X}^T — транспонированный вектор \vec{X} , A и B — симметричные матрицы порядка $3N+2$ для $n=1$ и $3N$ для $n>1$.

Отметим, что в отличие от традиционного метода Ритца решения для искомых функций в форме (19) при $n=1$ не являются независимыми, поскольку они включают в себя общие неизвестные постоянные u_{01} и ϑ_{02} . В силу этого формирование элементов матриц A и B на основе стандартного подхода приводит к достаточно громоздким их выражениям, что значительно усложняет расчетную схему задачи. В связи с этим вариация соответствующего функционала представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_0^\gamma [\Psi_{11}(u_n, \delta u_n) + \Psi_{12}(v_n, \delta v_n) + \Psi_{13}(w_n, \delta w_n) + \Psi_{12}(\delta v_n, u_n) + \Psi_{22}(v_n, \delta v_n) + \\ & + \Psi_{23}(w_n, \delta v_n) + \Psi_{13}(\delta w_n, u_n) + \Psi_{23}(\delta w_n, v_n) + \Psi_{33}(w_n, \delta w_n)] dz - \\ & - \omega^2 \int_0^\gamma (u_n \delta u_n + v_n \delta v_n + w_n \delta w_n) dz - \delta_{1n} \omega^2 (m_0 u_{01} \delta u_{01} + J_{yc} \vartheta_{02} \delta \vartheta_{02}). \end{aligned} \quad (23)$$

Введенные здесь дифференциальные операторы имеют вид

$$\begin{aligned}\Psi_{11}(p, q) &= \frac{dp}{dz} \frac{dq}{dz} + \nu_1 n^2 pq, & \Psi_{12}(p, q) &= \nu np \frac{dq}{dz} - \nu_1 n \frac{dp}{dz} q, \\ \Psi_{13}(p, q) &= \nu p \frac{dq}{dz}, & \Psi_{23}(p, q) &= npq, & \Psi_{22}(p, q) &= n^2 pq + \nu_1 \frac{dp}{dz} \frac{dq}{dz}, \\ \Psi_{33}(p, q) &= pq + c^2 \left[\left(\frac{d^2 p}{dz^2} - \nu n^2 p \right) \frac{d^2 q}{dz^2} + \left(n^4 p - \nu n^2 \frac{d^2 p}{dz^2} \right) q + 2(1 - \nu) n^2 \frac{dp}{dz} \frac{dq}{dz} \right],\end{aligned}$$

где p и q — произвольные функции.

Использование вариации функционала в форме (23) позволяет с единых позиций сравнительно просто находить элементы матриц A и B и дает значительные удобства при программировании предлагаемого алгоритма решения рассматриваемой задачи. При этом элементы верхней части относительно главной диагонали матриц A и B принимают вид

$$a_{i,j} = \int_0^l \Psi_{11}(U_j, U_i) dz, \quad a_{i,j+N} = \int_0^l \Psi_{12}(V_j, V_i) dz, \quad a_{i,j+2N} = \int_0^l \Psi_{13}(W_j, U_i) dz,$$

$$a_{i,3N+1} = \int_0^l [\Psi_{13}(w_0, U_i) - \Psi_{12}(v_0, U_i)] dz,$$

$$a_{i,3N+2} = \int_0^l [\Psi_{11}(u_0, U_i) + l_c \Psi_{12}(v_0, U_i) + \Psi_{13}(f, U_i)] dz,$$

$$a_{i+N,j+N} = \int_0^l \Psi_{22}(V_j, V_i) dz, \quad a_{i+N,j+2N} = \int_0^l \Psi_{23}(W_j, V_i) dz,$$

$$a_{i+N,3N+1} = \int_0^l [\Psi_{23}(w_0, V_i) - \Psi_{22}(v_0, V_i)] dz,$$

$$a_{i+N,3N+2} = \int_0^l [\Psi_{22}(V_i, u_0) + l_c \Psi_{22}(v_0, V_i) + \Psi_{23}(f, V_i)] dz,$$

$$a_{i+2N,j+2N} = \int_0^l \Psi_{33}(W_j, W_i) dz,$$

$$a_{i+2N,3N+1} = \int_0^l [\Psi_{33}(w_0, W_i) - \Psi_{23}(W_i, v_0)] dz,$$

$$a_{i+2N,3N+2} = \int_0^l [\Psi_{13}(W_i, u_0) + l_c \Psi_{23}(W_i, v_0) + \Psi_{33}(f, W_i)] dz,$$

$$a_{3N+1,3N+1} = \int_0^l [\Psi_{22}(v_0, v_0) - 2\Psi_{23}(w_0, v_0) + \Psi_{33}(w_0, w_0)] dz,$$

$$a_{3N+1,3N+2} = \int_0^l [\Psi_{33}(f, w_0) - \Psi_{12}(v_0, u_0) - l_c \Psi_{22}(v_0, v_0) - \\ - \Psi_{23}(f, v_0) + \Psi_{13}(w_0, u_0) + l_c \Psi_{23}(w_0, v_0)] dz,$$

$$a_{3N+2,3N+2} = \int_0^l [\Psi_{11}(u_0, u_0) + 2l_c \Psi_{12}(v_0, u_0) + 2\Psi_{13}(f, u_0) + \\ + l_c^2 \Psi_{22}(v_0, v_0) + 2l_c \Psi_{23}(f, v_0) + \Psi_{33}(f, f)] dz,$$

$$b_{i,j} = \int_0^l U_i U_j dz, \quad b_{i,j+N} = b_{i,j+2N} = b_{i,3N+1} = 0,$$

$$b_{i,3N+2} = \int_0^l u_0 U_i dz, \quad b_{i+N,j+N} = \int_0^l V_i V_j dz,$$

$$b_{i+N,j+2N} = 0, \quad b_{i+N,3N+1} = - \int_0^l v_0 V_i dz, \quad b_{i+N,3N+2} = l_c \int_0^l v_0 V_i dz,$$

$$b_{i+2N,j+2N} = \int_0^l W_j W_i dz, \quad b_{i+2N,3N+1} = \int_0^l w_0 W_i dz,$$

$$b_{i+2N,3N+2} = \int_0^l f W_i dz, \quad b_{3N+1,3N+1} = \int_0^l (v_0^2 + w_0^2) dz + m_0,$$

$$b_{3N+1,3N+2} = \int_0^l (f w_0 - l_c v_0^2) dz, \quad b_{3N+2,3N+2} = \int_0^l (u_0^2 + l_c^2 v_0^2 + f^2) dz + J_{yc}.$$

Для случая $n > 1$ матрицы A и B получаются из построенных матриц вычеркиванием из них двух последних строк и столбцов.

Если цилиндрическая оболочка имеет постоянную толщину, то в силу симметрии граничных условий, при $n > 1$, ее формы колебаний распадаются на симметричные и антисимметричные относительно $z = l/2$. Учитывая это обстоятельство, порядок алгебраической системы для второго типа колебаний можно уменьшить в два раза, выбрав соответствующим образом координатные функции.

Таким образом, задача определения собственных частот и форм неосесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с присоединенным к одному из ее торцов твердым телом свелась к вычислению одномерных интегралов с последующим решением обобщенной задачи на собственные значения (22). При удачном выборе представления искомым решений, обеспечивающих требуемую точность вычислений и устойчивость вычислительного процесса, последняя задача легко решается с помощью стандартных программ, имеющихся в математическом обеспечении современных ПЭВМ. Предложенный алгоритм решения рассматриваемой задачи без существенных изменений может быть использован и для оболочки с переменными вдоль оси упруго-массовыми характеристиками.

3. Упрощенная постановка задачи и ее решение. Для относительно длинных оболочек исходную задачу можно существенно упростить, если предположить, что поперечные сечения оболочки при деформировании остаются плоскими. При таком допущении оболочку можно заменить эквивалентной балкой с постоянными по ее длине погонной массой $m = \rho F = 2\pi R h \rho$ и изгибной жесткостью $EJ = E\pi R^3 h$. В дальнейшем будем пользоваться уточненной теорией балок Тимошенко, в которой учитываются деформации сдвига и инерция поворота поперечного сечения балки. Тогда в соответствии с результатами работ [10, 11, 13], изгибные колебания балки в плоскости Oxz будут описываться системой дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa G F \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= 0, \\ \rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - EJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \kappa G F \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \psi \right) &= 0, \end{aligned} \tag{24}$$

где $w(z, t)$ — перемещения точек нейтральной линии упругой балки в направлении оси Ox , $\psi(z, t)$ — угол наклона касательной к упругой линии балки от действия изгибающих моментов; GF — сдвиговая жесткость балки. Коэффициент сдвига κ будем определять по формуле $\kappa = 2(1 - \nu)/(4 + 3\nu)$, предложенной в работе [14].

В случае жестко закрепленного торца балки при $z = 0$ и присоединенного твердого тела на другом торце при $z = l$ решения уравнений (24) должны удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} \left[\kappa GF \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \psi \right) + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right]_{z=l} &= 0, \\ \left[EJ \frac{\partial \psi}{\partial z} + L_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + J_{y_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right]_{z=l} &= 0; \quad w(0, t) = \psi(0, t) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где $L_0 = m_0 l_c$, $J_{y_1} = m_0 l_c^2 + J_{y_c}$.

Для случая свободных гармонических колебаний системы с частотой ω представим функции $w(z, t)$ и $\psi(z, t)$ в виде

$$w(z, t) = W(z)e^{i\omega t}, \quad \psi(z, t) = \Psi(z)e^{i\omega t}.$$

Выберем в качестве характерного линейного размера системы радиус цилиндрической оболочки R и введем в рассмотрение безразмерные величины, которые связаны с соответствующими размерными по формулам

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 R^4 \rho F}{EJ}, \quad r^2 = \frac{J}{FR^2}, \quad s^2 = \frac{EJ}{\kappa GF R^2}, \quad \bar{m}_0 = \frac{m_0}{\rho FR}, \quad \bar{J}_{y_c} = \frac{J_{y_c}}{\rho FR^3}, \quad \bar{W} = \frac{W}{R}.$$

Связь безразмерных величин, введенных по формулам (13) (далее обозначены звездочкой), с данными величинами имеет вид

$$\bar{\omega}^2 = \frac{(1 - \nu^2)}{2} \beta^2, \quad \bar{m}_0 = \frac{1}{2} m_0^*, \quad \bar{J}_{y_c} = \frac{1}{2} \bar{J}_{y_c}^*.$$

Далее черточки над безразмерными величинами для простоты записи будем опускать.

После отделения переменной t в уравнениях (24), (25) и ряда несложных преобразований решение исходной задачи можно свести к решению однородной задачи относительно функции $W(z)$

$$\frac{d^4 W}{dz^4} + b_2 \frac{d^2 W}{dz^2} - \beta^2 b_0 W = 0,$$

$$W(0) = 0, \quad \left(b_1 \frac{dW}{dz} + s^2 \frac{d^3 W}{dz^3} \right)_{z=0} = 0, \quad (26)$$

$$\left(f_1 \frac{d^3 W}{dz^3} + f_2 \frac{dW}{dz} + f_3 W \right)_{z=l} = 0, \quad \left(f_4 \frac{d^3 W}{dz^3} + f_5 \frac{d^2 W}{dz^2} + f_6 \frac{dW}{dz} + f_7 W \right)_{z=l} = 0,$$

где

$$b_0 = 1 - \beta^2 r^2 s^2, \quad b_1 = \beta^2 s^4 + 1, \quad b_2 = \beta^2 (r^2 + s^2),$$

$$f_1 = 1 + \beta^2 s^2 L_0, \quad f_2 = \beta^2 b_1 L_0 + b_2, \quad f_3 = \beta^2 m_0 b_0, \quad f_4 = \beta^2 s^2 J_{y_1},$$

$$f_5 = -b_0, \quad f_6 = \beta^2 b_1 J_{y_1}, \quad f_7 = b_0 \beta^2 (L_0 - s^2).$$

После решения задачи (26) функция $\Psi(z)$ определяется из соотношения

$$\Psi = \frac{s^2 d^3 W}{b_0 dz^3} + \frac{b_1 dW}{b_0 dz}.$$

Заметим, что параметр r^2 отвечает за влияние инерции вращения, а параметр s^2 — за эффекты деформаций сдвига. Уравнения для балки Эйлера–Бернулли могут быть получены из уравнений Тимошенко, если положить $r^2 = s^2 = 0$. Аналогично, уравнения движения балки без учета влияния инерции вращения получим, если примем $r^2 = 0$. Для уравнений балки Рэлея необходимо положить $s^2 = 0$.

Общее решение уравнения из (26) при $\mu \geq b_2/2$ имеет вид

$$W(\beta, z) = A \sinh \gamma_1 z + B \cosh \gamma_1 z + C \sin \gamma_2 z + D \cos \gamma_2 z, \quad (27)$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\mu - b_2/2}$, $\gamma_2 = \sqrt{\mu + b_2/2}$.

Для случая, когда $\mu < b_2/2$,

$$W(\beta, z) = A' \sin \gamma_1 z + B' \cos \gamma_1 z + C' \sin \gamma_2 z + D' \cos \gamma_2 z, \quad (28)$$

где $\gamma_1 = \sqrt{b_2/2 - \mu}$.

При этом $\mu = \sqrt{(b_2/2)^2 + b_0 \beta^2}$.

Решения (27) и (28) для дальнейшего их использования удобно представить в виде

$$W_i(\beta, z) = C_{1i} S_i(\beta, z) + C_{2i} T_i(\beta, z) + C_{3i} U_i(\beta, z) + C_{4i} V_i(\beta, z). \quad (29)$$

Здесь и далее $i = 1$ при $\mu \geq b_2/2$ и $i = 2$ при $\mu < b_2/2$.

Функции S_i, T_i, U_i и V_i являются линейными комбинациями функций, входящих в (27), (28) и имеют вид

$$\begin{aligned} S_1(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_2^2 \cosh \gamma_1 z + \gamma_1^2 \cos \gamma_2 z \right), & T_1(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \sinh \gamma_1 z + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right), \\ U_1(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\cosh \gamma_1 z - \cos \gamma_2 z \right), & V_1(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{\gamma_1} \sinh \gamma_1 z - \frac{1}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right), \\ S_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_2^2 \cos \gamma_1 z - \gamma_1^2 \cos \gamma_2 z \right), & T_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \sin \gamma_1 z - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right), \\ U_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\cos \gamma_1 z - \cos \gamma_2 z \right), & V_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 z - \frac{1}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Первые три производные от $W_i(\beta, z)$ по переменной z вычисляются по формулам

$$W_1'(\beta, z) = C_{11}\zeta V_1(\beta, z) + C_{21}S_1(\beta, z) + C_{31}Q_{11}(\beta, z) + C_{41}U_1(\beta, z),$$

$$W_1''(\beta, z) = C_{11}\zeta U_1(\beta, z) + C_{21}\zeta V_1(\beta, z) + C_{31}Q_{21}(\beta, z) + C_{41}Q_{11}(\beta, z),$$

$$W_1'''(\beta, z) = C_{11}\zeta Q_{11}(\beta, z) + C_{21}\zeta U_1(\beta, z) + C_{31}Q_{31}(\beta, z) + C_{41}Q_{21}(\beta, z),$$

$$W_2'(\beta, z) = -C_{12}\zeta V_2(\beta, z) + C_{22}S_2(\beta, z) + C_{32}Q_{12}(\beta, z) + C_{42}U_2(\beta, z),$$

$$W_2''(\beta, z) = -C_{12}\zeta U_2(\beta, z) - C_{22}\zeta V_2(\beta, z) + C_{32}Q_{22}(\beta, z) + C_{42}Q_{12}(\beta, z),$$

$$W_2'''(\beta, z) = -C_{12}\zeta Q_{12}(\beta, z) - C_{22}\zeta U_2(\beta, z) + C_{32}Q_{32}(\beta, z) + C_{42}Q_{22}(\beta, z),$$

$$\zeta = \gamma_1^2 \gamma_2^2.$$

Здесь были введены в рассмотрение следующие функции:

$$Q_{11}(\beta, z) = \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_1 \sinh \gamma_1 z + \gamma_2 \sin \gamma_2 z \right), \quad Q_{21}(\beta, z) = \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_1^2 \cosh \gamma_1 z + \gamma_2^2 \cos \gamma_2 z \right),$$

$$Q_{31}(\beta, z) = \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_1^3 \sinh \gamma_1 z - \gamma_2^3 \sin \gamma_2 z \right), \quad Q_{12}(\beta, z) = \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_2 \sin \gamma_2 z - \gamma_1 \sin \gamma_1 z \right),$$

$$Q_{22}(\beta, z) = \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_2^2 \cos \gamma_2 z - \gamma_1^2 \cos \gamma_1 z \right), \quad Q_{32}(\beta, z) = \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_1^3 \sin \gamma_1 z - \gamma_2^3 \sin \gamma_2 z \right).$$

При представлении решений в виде (29) произвольные постоянные выражаются через значения функций W_i и их производные в точке $z = 0$:

$$W_i(\beta, 0) = C_{1i}, \quad W_i'(\beta, 0) = C_{2i}, \quad W_i''(\beta, 0) = C_{3i}, \quad W_i'''(\beta, 0) = C_{4i}.$$

Подставляя решения (29) в граничные условия из (26), получаем однородную алгебраическую систему относительно постоянных интегрирования C_{3i} и C_{4i}

$$\begin{aligned} C_{3i} a_{11}^{(i)} + C_{4i} a_{12}^{(i)} &= 0, \\ C_{3i} a_{21}^{(i)} + C_{4i} a_{22}^{(i)} &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

При этом $C_{1i} = 0$, $C_{2i} = -K_1 C_{4i}$, где $K_1 = s^2/b_1$. Элементы $a_{kj}^{(i)}$ определяются по формулам

$$a_{11}^{(1)} = f_1 Q_{31}(\beta, l) + f_2 Q_{11}(\beta, l) + f_3 U_1(\beta, l),$$

$$a_{12}^{(1)} = f_1 (Q_{21}(\beta, l) - K_1 \zeta U_1(\beta, l)) + f_2 (U_1(\beta, l) - K_1 S_1(\beta, l)) + f_3 (V_1(\beta, l) - K_1 T_1(\beta, l)),$$

$$a_{21}^{(1)} = f_4 Q_{31}(\beta, l) + f_5 Q_{21}(\beta, l) + f_6 Q_{11}(\beta, l) + f_7 U_1(\beta, l),$$

$$a_{22}^{(1)} = f_4 (Q_{21}(\beta, l) - K_1 \zeta U_1(\beta, l)) + f_5 (Q_{11}(\beta, l) - K_1 \zeta V_1(\beta, l)) + f_6 (U_1(\beta, l) - K_1 S_1(\beta, l)) + \\ + f_7 (V_1(\beta, l) - K_1 T_1(\beta, l)),$$

$$a_{11}^{(2)} = f_1 Q_{32}(\beta, l) + f_2 Q_{12}(\beta, l) + f_3 U_2(\beta, l),$$

$$a_{12}^{(2)} = f_1 (Q_{22}(\beta, l) + K_1 \zeta U_2(\beta, l)) + f_2 (U_2(\beta, l) - K_1 S_2(\beta, l)) + f_3 (V_2(\beta, l) - K_1 T_2(\beta, l)),$$

$$a_{21}^{(2)} = f_4 Q_{32}(\beta, l) + f_5 Q_{22}(\beta, l) + f_6 Q_{12}(\beta, l) + f_7 U_2(\beta, l),$$

$$a_{22}^{(2)} = f_4 (Q_{22}(\beta, l) + K_1 \zeta U_2(\beta, l)) + f_5 (Q_{12}(\beta, l) + K_1 \zeta V_2(\beta, l)) + f_6 (U_2(\beta, l) - K_1 S_2(\beta, l)) + \\ + f_7 (V_2(\beta, l) - K_1 T_2(\beta, l)).$$

Таким образом, решение исходной задачи в упрощенной ее постановке сведено к решению системы алгебраических уравнений (31).

4. Численные результаты. Приведем некоторые результаты расчета частот и форм собственных колебаний рассматриваемой конструкции по предложенным выше алгоритмам. В дальнейшем предполагается, что к оболочке присоединено твердое тело, имеющее форму кругового цилиндра радиуса R и высоты $H = 2l_c$. При этом безразмерный момент инерции твердого тела

$$J_{yc}^* = \frac{m_0^*}{12} (3 + H^2).$$

В расчетах были приняты следующие значения безразмерных параметров системы: $h = 0,01$; $l_c = 0,5$; $\nu = 0,3$. Длина оболочки и масса тела варьировались.

В табл. 1 приведены результаты вычислений первых пяти низших частот изгибных колебаний механической системы «тело-оболочка» ($n = 1$) при $l = 4$ и $m_0^* = 100$ в зависимости от количества членов N в разложениях (19). Эти данные свидетельствуют о достаточно быстрой сходимости последовательностей Ритца. При уменьшении относительной длины оболочки сходимость вычислительного процесса улучшается по сравнению с данными, приведенными в табл. 1. Увеличение длины оболочки ($l > 10$) должно

Таблица 1

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1	0,02460	0,13472	0,36141	0,99067	1,44920
2	0,01632	0,13185	0,35650	0,61950	0,93549
3	0,01574	0,12695	0,32523	0,61877	0,81494
4	0,01500	0,12681	0,32491	0,57754	0,81054
5	0,01495	0,12637	0,32272	0,57739	0,76240
6	0,01480	0,12636	0,32271	0,57617	0,76237
7	0,01479	0,12631	0,32201	0,57616	0,76122
8	0,01474	0,12630	0,32200	0,57588	0,76121
9	0,01474	0,12630	0,32175	0,57588	0,76106
10	0,01474	0,12630	0,32175	0,57582	0,76105

сопровождаться увеличением числа координатных функций. Следует отметить, что выбранная форма представления искомых решений и их аппроксимация с использованием многочленов Лежандра обеспечивают устойчивость вычислительного процесса до $N \leq 40$. Это обстоятельство позволяет проводить расчеты частот и форм собственных колебаний с высокой точностью для достаточно широкого диапазона входных параметров рассматриваемой механической системы.

Таблица 2

m_0^*	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
0	0,10799	0,34989	0,62869	0,73160	0,81765
10^2	0,01474	0,12629	0,32175	0,57582	0,76106
10^3	0,00469	0,04226	0,30743	0,57360	0,76019
10^4	0,00149	0,01344	0,30614	0,57339	0,76010
10^5	0,00047	0,00425	0,30602	0,57337	0,76010
(*)	—	—	0,30600	0,57336	0,76010

Результаты вычислений собственных частот конструкции в зависимости от величины массы твердого тела m^* при $l = 4$ представлено в табл. 2. Как видно из таблицы, увеличение массы твердого тела приводит к понижению частот системы. В предельном случае, обозначенном звездочкой, частоты равны соответствующим частотам колебаний оболочки с двумя жестко закрепленными торцами для окружной формы с $n = 1$.

В табл. 3 приведены некоторые результаты расчета минимальных частот $\omega_{1(n)}$ для оболочки с жестко закрепленными торцами в диапазоне параметров $l/R = 2 \div 14$ и $\delta = R/h = 200 \div 1000$ ($n > 1$ – второй тип колебаний системы). В скобках указаны соответствующие этим частотам числа волн n поверхности оболочки в круговом направлении (значения частот умножены на 10).

Как видно из этой таблицы, увеличение длины оболочки сопровождается снижением минимальных частот системы с одновременным уменьшением соответствующего им числа n . Уменьшение толщины оболочки также ведет к снижению минимальных частот, но при росте значений числа n . Сравнение данных табл. 3 с имеющимися данными работы [5], полученными на основе точного решения рассматриваемой задачи на собственные значения, указывает на их полное совпадение.

Таким образом, наличие прикрепленного твердого тела на одном из торцов оболочки может привести к появлению в системе достаточно низких частот. При этом упомянутые частоты могут быть меньшими, чем минимальные частоты первого типа колебаний системы.

Таблица 3

l	δ				
	200	400	600	800	1000
2	1,12969 ⁽⁷⁾	0,82296 ⁽⁹⁾	0,67886 ⁽¹⁰⁾	0,59474 ⁽¹¹⁾	0,53114 ⁽¹¹⁾
4	0,58626 ⁽⁵⁾	0,42330 ⁽⁶⁾	0,34532 ⁽⁷⁾	0,30348 ⁽⁸⁾	0,26967 ⁽⁸⁾
6	0,39910 ⁽⁴⁾	0,28260 ⁽⁵⁾	0,23213 ⁽⁶⁾	0,20214 ⁽⁶⁾	0,18249 ⁽⁷⁾
8	0,29661 ⁽⁴⁾	0,21836 ⁽⁵⁾	0,17340 ⁽⁵⁾	0,15440 ⁽⁵⁾	0,13619 ⁽⁶⁾
10	0,24526 ⁽³⁾	0,16821 ⁽⁴⁾	0,14396 ⁽⁵⁾	0,12075 ⁽⁵⁾	0,10834 ⁽⁵⁾
12	0,19431 ⁽³⁾	0,14264 ⁽⁴⁾	0,11534 ⁽⁴⁾	0,10411 ⁽⁴⁾	0,09115 ⁽⁵⁾
14	0,16645 ⁽³⁾	0,12714 ⁽³⁾	0,09907 ⁽⁴⁾	0,08577 ⁽⁴⁾	0,07886 ⁽⁴⁾

Таблица 4

l	2	4	6	8	10
β_1^*					
I	0,04104	0,02062	0,01266	0,00868	0,00640
II	0,04152	0,02073	0,01269	0,00868	0,00640
III	0,04156	0,02076	0,01271	0,00869	0,00640
IV	0,05582	0,02372	0,01367	0,00909	0,00660
V	0,05600	0,02376	0,01369	0,00910	0,00660
β_2^*					
I	0,21491	0,16684	0,12665	0,09380	0,07040
II	0,21560	0,16707	0,12666	0,09380	0,07040
III	0,21856	0,16971	0,12842	0,09490	0,07110
IV	0,45942	0,24775	0,16542	0,11600	0,08380
V	0,46749	0,25257	0,16903	0,11840	0,08530
β_3^*					
I	0,59670	0,34020	0,25126	0,20393	0,16650
II	0,68582	0,35616	0,25673	0,20530	0,16650
III	0,68635	0,35722	0,25836	0,20749	0,16890
IV	2,39765	0,86431	0,46155	0,30342	0,22220
V	3,86339	1,02308	0,501883	0,32016	0,23180
β_4^*					
I	0,84825	0,57846	0,39471	0,30000	0,24788
II	1,29893	0,62354	0,40681	0,30614	0,25096
III	1,33409	0,64521	0,41891	0,31307	0,25542
IV	3,99919	1,69206	0,94024	0,60134	0,42342
V	10,47193	2,65297	1,20558	0,70117	0,46959

В табл. 4 приведены результаты вычислений первых четырех частот изгибных колебаний оболочки и тела в зависимости от длины оболочки на основе технической теории оболочек (I), с использованием балочной теории Тимошенко (II), по балочной теории с учетом только деформаций сдвига ($r^2 = 0$) (III), с учетом только инерции поворота поперечного сечения балки ($s^2 = 0$) (IV) и по балочной схеме Эйлера–Бернулли ($r^2 = s^2 = 0$) (V).

Как видно из этой таблицы, при выбранной массе тела элементарная теория балок дает хорошие результаты при вычислении первой частоты только для длинных оболочек ($l \geq 10$). Учет деформаций сдвига и инерции вращения в уравнениях балки значительно улучшают точность балочного приближения рассматриваемой конструкции. Так, при $l > 6$ первые две частоты, вычисленные по теории оболочек и по теории балок Тимошенко, практически совпадают, а для третьей и четвертой частот расхождение составляет не более 3%. При этом определяющую роль играет учет деформаций сдвига. Инерция поворота может оказывать существенное влияние при расчете высших частот системы.

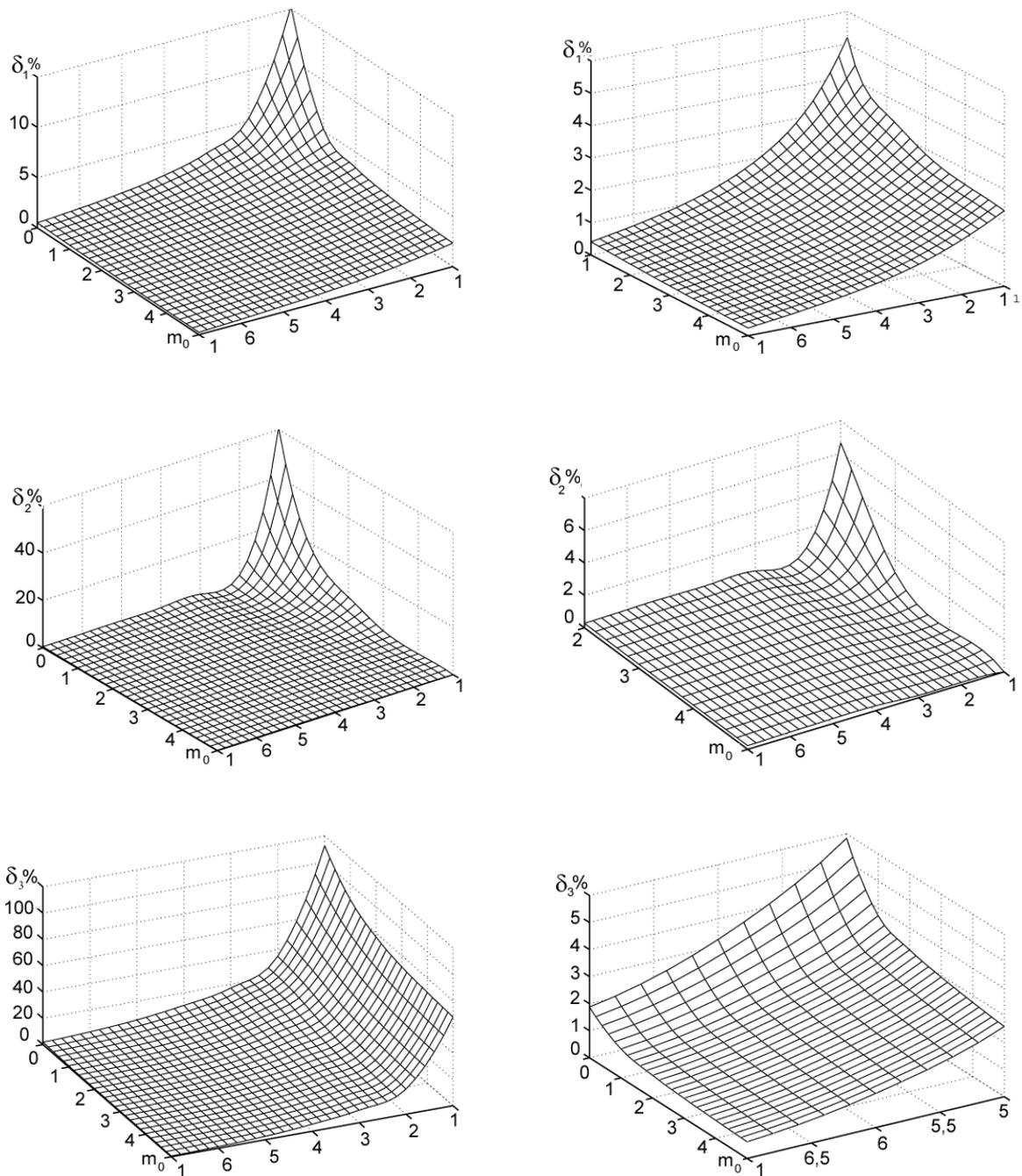


Рис. 2. Относительная погрешность δ_i вычисления первых трех частот системы по балочной теории Тимошенко в зависимости от массы твердого тела m_0 и длины оболочки l .

Пространственное изображение поверхности относительной погрешности δ_i (выраженной в процентах) определения первых трех частот колебаний системы по балочной теории Тимошенко, как функции от массы присоединенного тела и длины оболочки, представлено на рис. 2. Как видно из рисунка, погрешности δ_i существенно зависят от

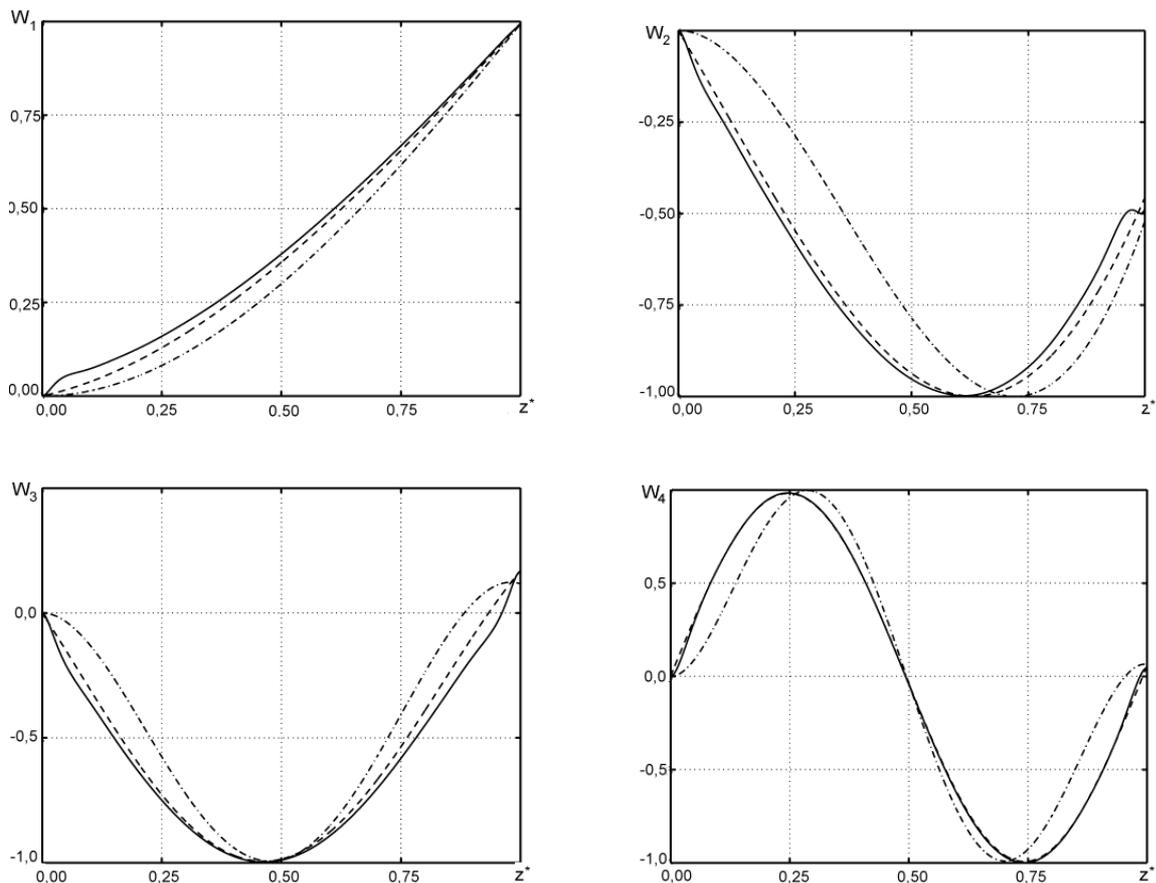


Рис. 3. Сравнение амплитудных значений первых четырех форм колебаний системы, определенных по теории оболочек (сплошные линии), по балочной теории Тимошенко (штриховые линии) и по балочной теории Эйлера Бернулли (штрихпунктирные линии).

массы присоединенного тела и длины оболочки. Увеличение длины оболочки при фиксированной массе тела и увеличение массы тела при фиксированной длине оболочки приводят к уменьшению погрешностей δ_i . Так, при $m_0 > 1$ и $l > 1$ погрешность определения первой частоты системы не превышает 5%. Погрешности определения первых трех частот системы не превышают 1% при $m_0 > 1$ и $l > 6$.

Амплитудные значения первых четырех радиальных форм колебаний оболочки, отнесенные к их максимальным значениям W_i , представлены на рис. 3 ($z^* = z/l$). В качестве исходных данных выбирались данные табл. 4 при $l = 4$. Как следует из рисунка, балочная модель Тимошенко позволяет определять не только низшие частоты рассматриваемой механической конструкции, но и соответствующие им формы колебаний. Максимальные различия в формах колебаний при их расчете по рассмотренным схемам наблюдаются в окрестностях торцевых сечений оболочки. Эти различия имеют локальный характер и обусловлены проявлением краевых эффектов деформирования оболочки, которые усиливаются при уменьшении ее относительной толщины.

В свою очередь элементарная теория балок при выбранных параметрах системы дает удовлетворительные результаты лишь при расчете первой формы колебаний.

Следует отметить, что при определении динамических характеристик рассматриваемой механической системы по предлагаемой расчетной схеме с использованием теории балок Тимошенко проводилось сравнение с соответствующими табличными и графическими данными, которые получены в работе [11]. При этом было обнаружено их полное совпадение.

Заключение. В работе построена математическая модель связанных неосесимметричных колебаний круговой цилиндрической оболочки и присоединенного к одному из ее торцов абсолютно твердого тела. При этом показано, что в рамках линейной теории собственные колебания системы распадаются на два типа колебаний. Первый тип обусловлен связанными колебаниями тела и оболочки в одной из плоскостей симметрии системы, когда количество волн оболочки в окружном направлении равно единице.

При втором типе колебаний оболочка совершает пространственные неосесимметричные колебания с числом волн в окружном направлении, большим единицы, тогда как тело при этом остается неподвижным. Минимальной частотой рассматриваемой упругой системы будет меньшая из низших частот первого и второго типа колебаний.

Предложены приближенные решения полученных спектральных задач на основе их эквивалентных вариационных формулировок. Анализ приведенных решений и их сравнение с имеющимися в литературе точными решениями задачи для второго типа колебаний свидетельствует о том, что предложенная методика решения рассматриваемых задач позволяет получать результаты расчета низших форм колебаний с достаточно высокой точностью и в широком диапазоне входных параметров системы. Показано, что наличие присоединенного к торцу оболочки твердого тела может привести к появлению в системе низких частот.

При замене оболочки эквивалентной балкой Тимошенко построено точное решение рассматриваемой задачи в ее упрощенной постановке. Полученный при этом алгоритм расчета динамических характеристик системы позволяет проводить вычисления с единых позиций и для случаев более простых балочных теорий. Показано, что включение деформаций сдвига и инерции вращения в уравнения балочной теории существенно улучшает точность аппроксимации оболочки балкой. При этом погрешность такого приближения в значительной мере зависит от длины оболочки и массы присоединенного тела.

1. *Бреславский В. Е.* Исследование колебаний тонких оболочек, скрепленных с наполнителем // Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин (Ленинград, 21–28 мая, 1973г.). — М.: Наука, 1973. — С. 271–276.
2. *Бреславский В. Е.* Продольные колебания цилиндрической оболочки, скрепленной с упруго-вязким наполнителем и сосредоточенными массами // Пробл. машиностроения. — 1981. — № 14. — С. 27–32.
3. *Паламарчук В. Г.* Свободные колебания системы, состоящей из ребристой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела // Прикл. механика. — 1978. — **14**, № 4. — С. 56–62.
4. *Trotsenko Yu. V.* On equilibrium equations of cylindrical shell with attached rigid body // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, № 3. — P. 422–431.
5. *Швейко Ю. Ю., Гаврилов Ю. В., Брусиловский А. Д.* О влиянии граничных условий на спектр собственных частот цилиндрических оболочек // Докл. науч.-техн. конф. Моск. энерг. ин-та. — 1965. — С. 131–148.

6. Троценко Ю. В. Свободные колебания цилиндрической оболочки, соединяющей две упругие балки // Акуст. вісн. — 2002. — 5, № 2. — С. 54–72.
7. Рабинович Б. И., Шмаков В. П., Кобычкин В. С. К теории колебаний конструкций, несущих упругие резервуары с жидкостью // Исследования по теории сооружений. — 1970. — Вып. 18. — С. 68–84.
8. Троценко В. А., Кладинога В. С. Неосесимметричные колебания предварительно напряженной оболочки вращения с присоединенным жестким диском // Прикл. механика. — 1994. — 30, № 7. — С. 17–24.
9. Forsberg K. Axisymmetric and beam-type vibrations of thin cylindrical shells // AIAA J. — 1969. — № 2. — P. 221–227.
10. White M. W. D., Hessler G. R. Vibrations modes and frequencies of a Timoshenko beams with attached rigid bodies // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1995. — 62, № 1. — P. 193–199.
11. Rossi R. E., Laura P. A. A. Vibrations of a Timoshenko beam clamped at one end and carrying a finite mass at the other // Appl. Acoust. — 1990. — 30, № 4. — P. 293–301.
12. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек // Судостроение. — 1962. — 431 с.
13. Weaver W. Jr., Timoshenko S. P., Yong D. H. Vibration problems in engineering. — 1990. — 624 p.
14. Cowper G. R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory // J. Appl. Mech. — 1966. — 33, № 2. — P. 335–340.

Получено 03.03.2004