УДК 517.9

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ УПРАВЛЕНИЯ

В. А. Плотников

Одес. нац. ун-т
Украина, 27026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: v.plotnikov@paco.net

Л. И. Плотникова

Одес. нац. политехн. ун-т
Украина, 27014, Одесса, просп. Шевченко, 1

А. Т. Яровой

Одес. нац. ун-т
Украина, 27026, Одесса, ул. Дворянская, 2

We propose and substantiate certain algorithms for partial and complete averaging for systems of discrete equations and inclusions. Using the obtained averaging schemes we construct algorithms for finding solutions, in a numerical-analytical way, of optimal control problems for discrete systems.

Запропоновано і обґрунтовано деякі алгоритми часткового і повного усереднення систем дискретних рівнянь і включень. На основі отриманих схем усереднення побудовано алгоритми чисельно-асимптотичного розв'язання задач оптимального управління дискретними системами.

Интерес к исследованию дискретных систем управления связан с широким применением на практике цифровых вычислительных машин в управлении различными объектами. Построение и обоснование алгоритмов численно-асимптотического решения задач оптимального управления непрерывными системами, основанных на схемах усреднения, рассматривались в работах [1 – 5].

Рассмотрим систему дискретных уравнений стандартного вида

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon F(i, x_i), \quad x_0 = x^0, \tag{1}$$

где $x_i \in \mathbf{R}^n$ — фазовый вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $F(i,x)$ — вектор-функция, $i \in I = \{0, 1, ..., N\}, N = E(L\varepsilon^{-1}),\ E(s)$ — целая часть s.

Пусть существует функция $F^0(i,x)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=p}^{p+n-1} [F(i,x) - F^0(i,x)] = 0. \tag{2}$$

Тогда системе (1) поставим в соответствие систему

$$y_{i+1} = y_i + \varepsilon F^0(i, y_i), \quad y_0 = x^0, \tag{3}$$

и назовем ее частично усредненной.

Рассмотрим вопрос о близости решений систем (1) и (3) на конечном промежутке.
Наряду с системами (1), (3) рассмотрим системы

$$z_{k+1} = z_k + \varepsilon \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} F(i, z_k), \quad z_0 = x^0, \tag{4}$$

$$w_{k+1} = w_k + \varepsilon \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} F^0(i, w_k), \quad w_0 = x^0, \tag{5}$$

где $h(\varepsilon)-$ целое число и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h(\varepsilon) = \infty, \ \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon h(\varepsilon) = 0. \tag{6}$$

Лемма 1. *Пусть в области $Q\{i \in I, \ x \in D \subset R^n\}$ выполнены следующие условия :*

1) функции $F(i,x)$ и $F^0(i,x)$ равномерно ограничены константой M и удовлетворяют условию Липшица по x с постоянной λ;

2) решения $\{z_k\}, \{w_k\}$ с начальным условием $x^0 \in D' \subset D$ определены при $\varepsilon \in \in (0,\sigma], \ k \geq 0$ и вместе с ρ-окрестностью принадлежат области D.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$, что для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^0$ и $i \in I$ выполняются неравенства

$$||x_i - z_k|| \leq \eta, \ ||y_i - w_k|| \leq \eta, \ \ i \in [kh, (k+1)h - 1).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned} x_{(k+1)h} &= x_{kh} + \varepsilon \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} F(i, x_i), \quad x_0 = x^0, \\ y_{(k+1)h} &= y_{kh} + \varepsilon \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} F^0(i, y_i), \quad y_0 = x^0. \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть $\gamma_k = ||x_{kh} - z_k||$, тогда из (7), (4) имеем

$$\gamma_{k+1} \leq \gamma_k + \varepsilon \left\| \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} F(i, x_i) - \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} F(i, z_k) \right\| \leq$$

$$\leq \gamma_k + \varepsilon\lambda \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} ||x_i - z_k|| \leq (1 + \varepsilon\lambda h)\gamma_k + \varepsilon\lambda \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} ||x_i - x_{kh}|| \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon\lambda h)\gamma_k + \varepsilon^2\lambda \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} \sum_{j=kh}^{i} ||F(j,x_j)|| \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon\lambda h)\gamma_k + \varepsilon^2\lambda M h^2/2 \leq (e^{\lambda L}-1)\varepsilon h M/2.$$

Поскольку

$$||x_i - x_{kh}|| \leq \varepsilon h M, \;\; kh \leq i \leq (k+1)h,$$

то

$$||x_i - z_k|| \leq (e^{\lambda L}+1)\varepsilon h M/2. \tag{8}$$

Аналогично получаем

$$\begin{gathered} ||y_{kh} - w_k|| \leq (e^{\lambda L}-1)\varepsilon h M/2, \;\; 1 \leq k \leq N, \\ ||y_i - w_k|| \leq (e^{\lambda L}+1)\varepsilon h M/2, \;\; 1 \leq k \leq N. \end{gathered} \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть в области $Q\{i \in I, \; x \in D \subset R^n\}$ выполнены следующие условия :*

1) функции $F(i,x)$ и $F^0(i,x)$ равномерно ограничены константой M и удовлетворяют условию Липшица по x с постоянной λ;

2) равномерно относительно x и p существует предел (2);

3) решения w_k усредненной системы (5) с начальным условием $w_0 = x^0 \in D' \subset D$ определены при $\varepsilon \in (0,\sigma], \; k \geq 0$ и вместе с ρ-окрестностью принадлежат области D.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$, что для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^0$ и $i \in I$ выполняется неравенство

$$||x_i - y_i|| \leq \eta, \tag{10}$$

где

$$y_i = w_k + (i-kh)(w_{k+1}-w_k)/h, \quad i \in [kh,(k+1)h), \tag{11}$$

x_i — решение системы (1), $x_0 = y_0 \in D'$.

Доказательство. Уравнения (1) и (3) запишем в виде

$$x_j = x_{kh} + \varepsilon \sum_{i=kh}^{j-1} F(i,x_i),$$

$$y_j = y_{kh} + \varepsilon \sum_{i=kh}^{j-1} F^0(i,y_i).$$

Пусть $\delta_k = ||z_k - w_k||$, тогда из (4) и (5) получаем

$$\delta_{k+1} \le \delta_k + \varepsilon \left\| \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} F(i, z_k) - \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} F^0(i, w_k) \right\| \le$$

$$\le (1 + \varepsilon h\lambda)\delta_k + \varepsilon \left\| \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} F(i, w_k) - \varepsilon \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} F^0(i, w_k) \right\|. \tag{12}$$

В силу условия 2 теоремы можно указать такую монотонно убывающую функцию $f(h)$, стремящуюся к нулю при $h \to \infty$, что для всех $x \in D$ выполняется

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=hj}^{(j+1)h-1} [F(i, y) - F^0(i, y)] \right\| \le \varepsilon h f(h). \tag{13}$$

Из (11) – (13) имеем

$$||y_i - w_k|| \le \varepsilon h M,$$

$$\delta_{k+1} \le (1 + \varepsilon\lambda h)\delta_k + \varepsilon h f(h) \le (e^{\lambda L} - 1)\frac{f(h)}{\lambda}. \tag{14}$$

Таким образом, из (8), (14) получаем

$$||x_i - y_i|| \le (e^{\lambda L} + 3)\varepsilon h M/2 + (e^{\lambda L} - 1)\frac{f(h)}{\lambda}. \tag{15}$$

Из (6) и (15) следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Рассмотрим схему ступенчатого усреднения [3], т. е. зададим функцию $F^0(i, x)$ следующим образом :

$$F^0(i, x) = \left\{ F_k(x) = \frac{1}{h} \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} F(j, x),\ i \in [kh, (k+1)h - 1),\ k = 0, 1, ... \right\}. \tag{16}$$

При этом неравенство (13) примет вид

$$\varepsilon \sum_{j=0}^{k-1} \left\| \sum_{i=hj}^{(j+1)h-1} [F(i, y_{hj}) - F^0(i, y_{hj})] \right\| = 0,$$

и, следовательно, оценку (10) можно записать в виде

$$||x_i - y_i|| \le C\varepsilon h, \tag{17}$$

где $C = e^{\lambda L} M(\lambda L + 2)$.

Если $h(\varepsilon) \equiv h_0$, то оценка (17) имеет вид

$$||x_i - y_i|| \le C_1\varepsilon,$$

где постоянная $C_1 = Ch_0$ не зависит от ε.

Заметим, что величину $h(\varepsilon)$ можно выбирать не обязательно целочисленной. В этом случае в доказательстве теоремы суммы $\sum\limits_{j=kh}^{(k+1)h-1}$ необходимо заменить суммами $\sum\limits_{kh \le j < (k+1)h}$.

Замечание 2. Если функция $F(i,x)$ периодична по i с периодом p, то, выбирая $h = p$ из (16), получаем

$$F^0(i,x) \equiv \overline{F}(x) = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} F(i,x),$$

и система (3) принимает вид

$$y_{n+1} = y_n + \varepsilon\overline{F}(y_n), \qquad y_0 = x^0, \tag{18}$$

т. е. получаем схему полного усреднения.

Замечание 3. При усреднении дифференциальных уравнений системе

$$\dot{x} = \varepsilon F(t,x), \quad x(0) = x^0, \qquad t \in [0, L\varepsilon^{-1}], \tag{19}$$

ставится в соответствие усредненная система

$$\frac{dy}{d\tau} = F^0(y), \quad \tau = \varepsilon t,\ y(0) = x^0, \qquad \tau \in [0, L]. \tag{20}$$

При численном интегрировании системы (19) необходимо интегрировать неавтономную систему на асимптотически большом промежутке времени. При численном интегрировании усредненной системы (20) интегрируется автономная система на конечном промежутке, что требует меньшего объема вычислений.

Системы (1) и (18) определяются на одном и том же множестве, и поэтому решение системы (18) требует меньшего объема вычислений только при условии меньших затрат на вычисление функции $F^0(x)$ по сравнению с затратами на вычисление функции $F(i,x)$. При рассмотрении схемы частичного усреднения предполагается, что система (3) проще системы (1).

Рассмотрим схему полного усреднения в общем случае. Предположим, что существует среднее функции $F(i,x)$, т. е.

$$F^0(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=p}^{p+n-1} F(i,x). \tag{21}$$

Системе (1) поставим в соответствие следующую усредненную систему:

$$y_{i+1} = y_i + \varepsilon F^0(y_i), \quad y_0 = x^0.$$

Рассмотрим также систему

$$\begin{gathered} z_{k+1} = z_k + \varepsilon h F^0(z_k), \quad z_0 = x^0, \\ y_i = z_k + (i - kh)(z_{k+1} - z_k)/h, \quad kh \le i < (k+1)h, \qquad k = 0, 1, \ldots , \end{gathered} \tag{22}$$

где h удовлетворяет условиям (6).

Теорема 2. *Пусть в области $Q\{i \in I, x \in D\}$ выполнены следующие условия:*
1) функция $F(i,x)$ равномерно ограничена и удовлетворяет условию Липшица по x:

$$||F(i,x)|| \le M, \ \ ||F(i,x) - F(i,y)|| \le \lambda ||x - y||;$$

2) равномерно относительно x и p существует предел (21);
3) решения z_k усредненной системы (22) с начальным условием $z_0 = x^0 \in D^{'} \subset D$ определены при $k \ge 0$ и вместе с ρ-окрестностью принадлежат области D.
Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$, что для $0 < \varepsilon \le \varepsilon^0$ и $i \in I$ выполняется неравенство

$$||x_i - y_i|| \le \eta, \tag{23}$$

где x_i и y_i — решения уравнений соответственно (1) и (22), удовлетворяющие условию $x_0 = y_0 \in D^{'}$.

Доказательство. Очевидно, что функция $F^0(x)$ равномерно ограничена и удовлетворяет условию Липшица. Таким образом, оценка (23) следует из теоремы 1.

Замечание 4. Решение системы (22) проводится с шагом $h(\varepsilon)$ и, следовательно, объем вычислений для получения решения y_i меньше объема вычислений, необходимого для получения решения x_i. В качестве $h(\varepsilon)$ можно взять, например, $h(\varepsilon) = c/\sqrt{\varepsilon}$.

Теорема 3. *Пусть в области Q выполнены условия теоремы 2 и, кроме того :*
4) решения z_k системы (22) равномерно асимптотически устойчивы равномерно относительно $\varepsilon \in (0, \sigma]$.
Тогда для любого $0 < \eta < \rho$ можно указать такое $\varepsilon_0(\eta) > 0$, что при $0 < \varepsilon \le \varepsilon^0$ и $i \ge 0$ выполняется неравенство

$$||x_i - y_i|| \le \eta.$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы Банфи – Филатова [6] с заменой ссылок на теорему Боголюбова ссылками на теорему 2.

Рассмотрим задачу оптимального управления дискретной системой

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon[f(i, x_i) + A(x_i)\varphi(i, u_i)], \quad x_0 = x^0, \tag{24}$$

с терминальным критерием

$$I(u) = \Phi(x_N), \tag{25}$$

где $f(i,x), \varphi(i,u)$ — вектор-функции, $A(x)$ — матрица размерности $n \times m$, $u_i \in U-$ вектор управления, $U \in \mathrm{comp}(R^p)$, $i = 0,1,...,N,\ N = E(L/\varepsilon)$, $\mathrm{comp}(R^n)$ — пространство всех непустых компактных подмножеств пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$\delta(A,B) = \min\{d \geq 0 | B \subset S_d(A), A \subset S_d(B)\},$$

$S_d(A)$ — замкнутая d-окрестность компактного множества $A \subset R^n$.

Задаче (24), (25) поставим в соответствие следующую автономную задачу:

$$z_{k+1} = z_k + \varepsilon\omega[f^0(z_k) + A(z_k)v_k], \quad z_0 = x^0, \tag{26}$$

$$I^0(v) = \Phi(y_N), \tag{27}$$

$$y_i = z_k + \frac{(i-k\omega)(z_{k+1}-z_k)}{\omega}, \quad k\omega \leq i < (k+1)\omega, \tag{28}$$

где

$$f^0(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=p}^{p+n-1} f(i,x),$$

$$v_i \in V = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=p}^{p+n-1} \varphi(i,U). \tag{29}$$

Сходимость в (29) понимается в смысле метрики Хаусдорфа.

Решение полученной автономной задачи оптимального управления (26) – (29) требует значительно меньшего объема вычислений, чем решение исходной задачи (24), (25).

Для обоснования данного алгоритма рассмотрим сначала ω-периодический случай, т. е. предположим, что существует целое число $\omega > 0$ такое, что $f(i,x) = f(i+\omega,x)$, $\varphi(i,u) = \varphi(i+\omega,u)$. Тогда

$$f^0(x) = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} f(i,x),$$

$$v_i \in V^0 = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} \varphi(i,U).$$

Заметим, что в данном случае множество $V^0 \in \mathrm{comp}(R^n)$ не является выпуклым, но $V = \mathrm{conv} V^0$.

Установим следующее соответствие между управлениями u_i уравнения (24) и управлениями v_k уравнения (26):

$$\sum_{i=k\omega}^{(k+1)\omega-1} \varphi(i, u_i) = \omega v_k, \quad k \geq 0. \tag{30}$$

Теорема 4. *Пусть в области* $Q\{i \geq 0,\ x \in D\ \subset R^n,\ u \in U\}$ *выполнены следующие условия:*

1) функции $f(i,x),\ A(x),\ \varphi(i,u)$ *равномерно ограничены и удовлетворяют условию Липшица:*

$$||f(i,x)|| \leq M,\ ||f(i,x) - f(i,y)|| \leq \lambda ||x-y||,\ ||A(x)|| \leq M,$$

$$||A(x) - A(y)|| \leq \lambda ||x-y||,\ ||\varphi(i,u)|| \leq M,\ ||\varphi(i,u) - \varphi(i,z)|| \leq \lambda ||u-z||;$$

2) существует целое число $\omega > 0$ *такое, что* $f(i,x) = f(i+\omega, x),\ \varphi(i,u) = \varphi(i+\omega, u)$;

3) решения $\{z_k, k = 0, 1, \dots\}$ *уравнения (26) с начальным условием* $z_0 = x^0 \in D' \subset D$ *для любого управления* v_k *определены для* $k \geq 0$ *и вместе с* ρ*-окрестностью принадлежат области* D.

Тогда для любого $L > 0$ *существуют такие* $C > 0$ *и* $\varepsilon_0(L) > 0$, *что для* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 \leq i \leq E(L\varepsilon^{-1})$ *справедливы следующие утверждения:*

1) для любого управления v_k *системы (26) существует в соответствии с (30) управление* u_i *системы (24) такое, что имеет место оценка*

$$||x_i - y_i|| \leq C\varepsilon, \tag{31}$$

где $y_i,\ x_i$ — *решения систем (26), (28) и (24), соответствующие управлениям* v_k *и* u_i, $x_0 = y_0 \in D'$;

2) для любого управления u_i *системы (24) существует в соответствии с (30) управление* v_k *системы (26) такое, что справедлива оценка (31).*

Доказательство. Пусть u_i — произвольное допустимое управление системы (24), x_i — соответствующая ему траектория, v_k — управление системы (26), построенное согласно (30) по управлению u_i, y_i — соответствующая траектория системы (26).

При указанном построении управления v_k для систем (24) и (26) выполнены условия теоремы 1 с построением частично усредненной системы по схеме ступенчатого усреднения (16).

Следовательно, для решений x_i и y_i выполнена оценка (17), где постоянная C не зависит от управления u_i.

Таким образом, справедливо утверждение 2 теоремы. Утверждение 1 доказывается аналогично.

Замечание 5. Из теоремы 4 следует, что

$$\delta(X_N, Y_N) \leq C\varepsilon,$$

где X_N и Y_N — множества достижимости систем соответственно (24) и (26).

Теорема 5. *Пусть в области Q выполнены условия 1, 3 теоремы 4 и равномерно относительно $x \in D$ и p существуют пределы (29).*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0,$ что при $0 < \varepsilon \le \varepsilon^0$ и $0 \le i \le E(L\varepsilon^{-1})$ справедливы следующие утверждения:

1) для любого управления v_k системы (26) существует такое управление u_i системы (24), что выполняется оценка

$$||x_i - y_i|| \le \eta, \tag{32}$$

где $x_i,\ y_i$ — траектории систем (24) и (26), соответствующие управлениям $u_i,\ v_k$;

2) для любого управления u_i системы (24) существует такое управление v_k системы (26), что справедлива оценка (32).

Доказательство. Применим к системе (24) схему ступенчатого усреднения (16) с шагом $h(\varepsilon)$. Из условия теоремы следует, что выполняется неравенство

$$\delta\left(V, \frac{1}{h}\sum_{i=p}^{p+h-1}\varphi(i, U)\right) \le f(h).$$

Следовательно, для любого управления u_i системы (24) существует такое управление $v_k \in V$ системы (26) , что имеет место неравенство

$$\left\|v_k - \frac{1}{h}\sum_{i=p}^{p+h-1}\varphi(i, u_i)\right\| = \min_{v \in V}\left\|v - \frac{1}{h}\sum_{i=p}^{p+h-1}\varphi(i, u_i)\right\| \le f(h). \tag{33}$$

Аналогично для любого управления $v_k \in V$ существует управление u_i такое, что выполняется

$$\left\|v_k - \frac{1}{h}\sum_{i=p}^{p+h-1}\varphi(i, u_i)\right\| = \min_{r_i \in U}\left\|v_k - \frac{1}{h}\sum_{i=p}^{p+h-1}\varphi(i, r_i)\right\| \le f(h). \tag{34}$$

Повторяя выкладки, аналогичные доказательству теоремы 1, и учитывая соответствия (33) и (34) между управлениями u_i и v_k, получаем оценку (32).

Замечание 6. Из теоремы 5 следует, что

$$\delta(X_N, Y_N) \le \eta,$$

где X_N и Y_N — множества достижимости систем соответственно (24) и (26).

Теорема 6. *Пусть в области Q выполнены условия теоремы 5 и, кроме того,*

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \le \mu\|x - y\|.$$

Тогда оптимальное решение задачи (26), (27) является асимптотически оптимальным решением исходной задачи (24), (25), т. е. для любых $\eta > 0,\ L > 0$ существует такое $\varepsilon^0(\eta, L) > 0,$ что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ справедливы оценки

$$|J^{0*} - J^*| \le \eta, \quad \widetilde{J} - J^* \le \eta, \tag{35}$$

где $\{J^*, J^{0*}\}$ *— оптимальные решения исходной и усредненной задач,* $\widetilde{J}$ *— значение критерия исходной задачи при управлении* $\{\widetilde{u}_i\}$*, соответствующем оптимальному управлению усредненной задачи.*

Доказательство. Пусть $\{z_k^*, v_k^*, J^{0*}\}$ — оптимальное решение задачи (26), (27), а $\{\widetilde{u}_i\}$ — соответствующее управление системы (24), построенные согласно (33).

Из теоремы 5 следует, что для любых $L > 0,\ \eta_1 > 0$ существует такое $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$, что справедлива оценка

$$\|\widetilde{x}_N - y_N\| \leq \eta_1,$$

где $\widetilde{x}_i$ — решение системы (24), соответствующее управлению $\widetilde{u}_i$.

Следовательно,

$$|\widetilde{J} - J^{0*}| = |\Phi(\widetilde{x}_N) - \Phi(y_N)| \leq \mu\|\widetilde{x}_N - y_N^*\| \leq \mu\eta_1. \tag{36}$$

Из (36) при $\eta_1 = \eta/\mu$ получаем

$$|J^{0*} - \widetilde{J}| \leq \eta. \tag{37}$$

Аналогично

$$|J^* - \widetilde{J}^0| \leq \eta, \tag{38}$$

где $\{J^*, x_i^*, u_i^*\}$ — оптимальное решение задачи (24), (25), а $\{\widetilde{J}^0, \widetilde{z}_k\}$ — значение критерия (27) и решение системы (26), соответствующие управлению $\widetilde{z}_k$, построенному по управлению u_i^* согласно (33).

Очевидно, что

$$J^* \leq \widetilde{J},\ \ J^{0*} \leq \widetilde{J}^0. \tag{39}$$

Возможно выполнение одного из неравенств

$$J^* > J^{0*} \ \text{или}\ \ J^* \leq J^{0*}. \tag{40}$$

Из неравенств (36) – (40) следует оценка (35).

Таким образом, получено обоснование следующего алгоритма численно-асимптотического решения задачи (24), (25):

1) с помощью метода усреднения задаче (24), (25) ставим в соответствие задачу (26), (27);

2) численными методами решаем упрощенную задачу (26), (27).

Из теоремы 5 следует, что полученное решение является асимптотически оптимальным решением исходной задачи.

Для исследования движения управляемых объектов широко используются дифференциальные включения. В работах [2 – 4] построены алгоритмы численно-асимптотического решения задач управления, основанные на методе усреднения дифференциальных включений.

Рассмотрим аналогичный подход, использующий усреднение дискретных включений.

Теорема 7. *Пусть в области Q определены дискретные включения*

$$x_{n+1} \in x_n + \varepsilon F^1(n, x_n), \quad x_0 = x^0, \tag{41}$$

$$y_{n+1} \in y_n + \varepsilon F^2(n, y_n), \quad y_0 = x^0, \tag{42}$$

и выполнены следующие условия:

1) отображения $F^i(n,x)$ являются непустыми компактами при всех допустимых значениях аргументов, равномерно ограничены, удовлетворяют условию Липшица по x с постоянной λ, т. е.

$$|F^i(n,x)| \leq M, \quad \delta\left(F^i(n,x), F^i(n,y)\right) \leq \lambda \|x-y\|;$$

2) равномерно относительно $p \geq 0,\ \ x \in D$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \delta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=p}^{p+n-1} F^1(i,x), \frac{1}{n}\sum_{i=p}^{p+n-1} F^2(i,x)\right) = 0;$$

3) для всех $x^0 \in D' \subset D$ и $\varepsilon \in (0,\sigma]$ решения y_i включения (42) при $i \geq 0$ вместе с ρ-окрестностью принадлежат области D.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon^0(\eta, L) \in (0,\sigma]$, что при $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$, $i \in [0, E(L\varepsilon^{-1})]$ справедливы следующие утверждения:

1) для любого решения x_i включения (41) существует такое решение y_i включения (42), что выполняется неравенство

$$\|x_i - y_i\| \leq \eta; \tag{43}$$

2) для любого решения y_i включения (42) существует такое решение x_i включения (41), что выполняется неравенство (43).

Таким образом, справедлива оценка

$$\delta(X_N, Y_N) \leq \eta,$$

где X_N, Y_N — сечения семейств решений включений соответственно (41) и (42).

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Пусть x_i — произвольное решение включения (41). Запишем решения включений (41), (42) в виде

$$x_{(k+1)h} = x_{kh} + \varepsilon \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} v_n, \ \ v_n \in F^1(n, x_n),$$

$$y_{(k+1)h} = y_{kh} + \varepsilon \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} w_n, \ \ w_n \in F^2(n, y_n).$$

Пусть $\|x_{kh} - y_{kh}\| = \delta_k$, тогда

$$\delta_{k+1} \leq \delta_k + \varepsilon \left\| \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} v_n - \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} w_n \right\| \leq \delta_k + \left\| \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} v_n - \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} r_n \right\| +$$

$$+ \ \varepsilon \left\| \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} r_n - \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} r_n^{'} \right\| + \varepsilon \left\| \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} r_n^{'} - \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} p_n \right\| +$$

$$+ \ \varepsilon \left\| \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} p_n - \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} w_n \right\|, \tag{44}$$

где

$$\|v_n - r_n\| = \min_{r \in F^1(n, x_{kh})} \|v_n - r\|,$$

$$\|r_n - r_n^{'}\| = \min_{r \in F^1(n, y_{kh})} \|r_n - r\|,$$

$$\left\| \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} r_n^{'} - \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} p_n \right\| = \min_{z_n \in F^2(n, y_{kh})} \left\| \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} r_n^{'} - \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} z_n \right\|,$$

$$\|p_n - w_n\| = \min_{w \in F^2(n, y_n)} \|p_n - w\|.$$

Оценим каждое слагаемое в (44) отдельно:

$$\|v_n - r_n\| \leq \delta(F^1(n, x_n), F^1(n, x_{kh})) \leq \lambda \|x_n - x_{kh}\| \leq$$

$$\leq \lambda \varepsilon \sum_{j=kh}^{n} \|F^1(j, x_j)\| \leq \lambda M \varepsilon h,$$

$$\|r_n - r_n^{'}\| \leq \delta(F^1(n, x_{kh}), F^1(n, y_{kh})) \leq \lambda \delta_k,$$

$$\left\| \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} r_n^{'} - \sum_{n=kh}^{(k+1)h-1} p_n \right\| \leq h f(h), \tag{45}$$

$$\|p_n - w_n\| \le \delta(F^2(n, y_n), F^2(n, y_{kh})) \le \lambda\|y_n - y_{kh}\| \le$$

$$\le \lambda\varepsilon \sum_{j=kh}^{n} \|F^2(j, y_j)\| \le \lambda M\varepsilon h.$$

Из (44), (45) имеем

$$\delta_{k+1} \le (1 + \varepsilon\lambda h)\delta_k + \lambda M\varepsilon^2 h^2 + \varepsilon h f(h) \le (e^{\lambda L} - 1)\left(M\varepsilon h + \frac{f(h)}{\lambda}\right),$$

и, следовательно,

$$\|y_i - x_i\| \le (e^{\lambda L} + 1)\varepsilon M h + (e^{\lambda L} - 1)\frac{f(h)}{\lambda}. \tag{46}$$

Из (46) и (6) получаем (43). Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

Замечание 7. Если функция $F^2(n, x)$ не зависит от n, т. е. $F^2(n, x) \equiv F(x)$, то

$$y_{n+1} \in y_n + \varepsilon F(y_n), \quad y_0 = x^0,$$

и из теоремы 6 следует схема полного усреднения.

В этом случае аналогично дискретным уравнениям можно рассмотреть включение

$$z_{k+1} \in z_k + \varepsilon h F(z_k), \quad z_0 = x^0,$$

$$y_i = z_k + (i - kh)(z_{k+1} - z_k)/h, \quad kh \le i < (k+1)h, \ \ k + 0, 1, ...,$$

где $h(\varepsilon)$ удовлетворяет условию (6).

Замечание 8. Уравнения управляемого движения (24), (25) можно записать в форме включений

$$x_{i+1} \in x_i + \varepsilon[f(i, x_i) + A(x_i)\varphi(i, U)], \quad x_0 = x^0, \tag{47}$$

$$z_{k+1} \in z_k + \varepsilon h[f^0(z_k) + A(z_k)V], \quad z_0 = x^0. \tag{48}$$

Если для правых частей включения (47) выполнены условия теоремы 4, то для включений (47), (48) выполнены условия теоремы 7 и, следовательно, обоснование предложенной схемы асимптотического решения задачи оптимального управления следует из теоремы 7.

1. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

2. *Плотников В. А.* Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложение к задачам оптимального управления // Дифференц. уравнения. — 1978. — № 8. — С. 1427 – 1433.

3. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. — Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.

4. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: Астропринт, 1999. — 356 с.

5. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

6. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. — Ташкент: Фан, 1974. — 216 с.

Получено 12.01.2004