УДК 517.9

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ*

Г. П. Пелюх

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3
e-mail: grygor@imath.kiev.ua

We study the structure of the set of solutions, which are continuous and bounded for $t \in R^+$, for a certain class of systems of nonlinear functional-difference equations with a nonlinear deviation in the argument that depends on unknown functions.

Досліджено структуру множини неперервних і обмежених при $t \in R^+$ розв'язків одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь із нелінійним відхиленням аргументу, що залежить від невідомих функцій.

Рассмотрим систему нелинейных функционально-разностных уравнений вида

$$x(t+1) = x(t) + f(t, x(t), x(\varphi(t, x(t)))), \tag{1}$$

где $t \in R^+ = [0, \infty)$, $f : R^+ \times R^n \times R^n \to R^n$, $\varphi : R^+ \times R^n \to R^+$.

Многие частные случаи таких систем (например, когда $\varphi(t, x) \equiv t$) достаточно хорошо изучены. Особенно это касается вопросов существования и единственности периодических и почти периодических решений, асимптотического поведения решений, которые возникают при исследовании дифференциальных и дискретных разностных уравнений [1, 2]. Однако решения систем уравнений вида (1) имеют и специфические свойства, которые отсутствуют у решений дифференциальных и дискретных разностных уравнений и имеют особое значение для развития теории таких уравнений. В настоящей работе продолжается исследование вопросов, поставленных в [3, 4] и касающихся существования непрерывных и ограниченных при $t \in R^+$ решений системы (1), удовлетворяющих при $t \to \infty$ условию

$$x(t) = \omega(t) + o(1), \tag{2}$$

где $\omega(t)$ — непрерывная, 1-периодическая вектор-функция размерности n.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) вектор-функция $f(t, x, y)$ является непрерывной при $t \in R^+ = [0, \infty)$, $x, y \in R^n$, и удовлетворяет соотношению

$$\left|f\left(t, x', y'\right) - f\left(s, x'', y''\right)\right| \le \eta_1(t, s)\,|t - s| + \eta_2(t, s)\left(\left|x' - x''\right| + \left|y' - y''\right|\right),$$

*Выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований при Министерстве Украины по вопросам науки и технологий.

где $\eta_1(t,s), \eta_2(t,s)$ — *некоторые непрерывные, неотрицательные функции,* $t,s \in R^+$, $x', x'', y', y'' \in R^n$ *и* $|x| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$;

2) функция $\varphi(t,x)$ *является непрерывной и неотрицательной при* $t \in R^+,\ x \in R^n$ *и удовлетворяет условию Липшица*

$$|\varphi(t,x) - \varphi(s,y)| \le l_1 |t-s| + l_2 |x-y|,$$

где $l_1, l_2 = \mathrm{const} > 0\,(l_1 \le 1, l_2 \le 1)\,, t,s \in R^+, x,y \in R^n$;

3) ряды

$$H_1(t,s) = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_1(t+i, s+i),$$

$$H_2(t,s) = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2(t+i, s+i)$$

равномерно сходятся при всех $t,s \in R^+$ *и* $H_1(t,s) \le \theta_1, H_2(t,s) \le \theta_2 < \dfrac{1}{2}$.

Тогда для произвольного непрерывного, ограниченного и удовлетворяющего условию

$$|\gamma(t) - \gamma(s)| \le k|t-s|, \qquad k = \mathrm{const} > 0,\ t,s \in R^+, \tag{3}$$

решения $\gamma(t)$ *системы уравнений (1) существует непрерывная, 1-периодическая, удовлетворяющая условию*

$$|\omega(t) - \omega(s)| \le l|t-s|, \qquad l = \mathrm{const} > 0,\ \ t,s \in R^+, \tag{4}$$

вектор-функция $\omega(t)$ *такая, что при* $t \to \infty$ *выполняется условие (2).*

Доказательство. Пусть $\gamma(t)$ — некоторое непрерывное, ограниченное и удовлетворяющее условию (3) решение системы (1). Тогда

$$\gamma(t+1) \equiv \gamma(t) + f(t, \gamma(t), \gamma(\varphi(t, \gamma(t)))),$$

$$\gamma(t) = \omega(t) - \sum_{i=0}^{\infty} f(t+i, \gamma(t+i), \gamma(\varphi(t+i, \gamma(t+i)))),$$

где $\omega(t) = \gamma(t) + \sum\limits_{i=0}^{\infty} f(t+i, \gamma(t+i), \gamma(\varphi(t+i, \gamma(t+i))))$.

Отсюда и из условий 1–3 следует, что функция $\omega(t)$ является непрерывной при $t \in R^+$ и условие (2) выполняется. Более того, покажем, что функция $\omega(t)$ является 1-периодической и удовлетворяет условию (4).

Действительно,

$$\omega(t+1) = \gamma(t+1) + \sum_{i=0}^{\infty} f(t+1+i, \gamma(t+1+i), \gamma(\varphi(t+1+i, \gamma(t+1+i)))) =$$

$$= \gamma(t) + \sum_{i=0}^{\infty} f(t+i, \gamma(t+i), \gamma(\varphi(t+i, \gamma(t+i)))) = \omega(t),$$

$$\left|\omega(t) - \omega(s)\right| \leq |\gamma(t) - \gamma(s)| +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \Big| f(t+i, \gamma(t+i), \gamma(\varphi(t+i, \gamma(t+i)))) -$$

$$- f(s+i, \gamma(s+i), \gamma(\varphi(s+i, \gamma(s+i)))) \Big| \leq$$

$$\leq k|t-s| + \sum_{i=0}^{\infty} \eta_1(t+i, s+i)|t-s| +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2(t+i, s+i) \Big(|\gamma(t+i) - \gamma(s+i)| +$$

$$+ |\gamma(\varphi(t+i, \gamma(t+i))) - \gamma(\varphi(s+i, \gamma(s+i)))| \Big) \leq$$

$$\leq k|t-s| + \theta_1|t-s| + \theta_2(k|t-s| + k(l_1|t-s| + l_2k|t-s|)) \leq l|t-s|,$$

где $l = k + \theta_1 + \theta_2 k(2+k)$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1 – 3 теоремы 1. Тогда система уравнений (1) имеет единственное непрерывное, ограниченное, удовлетворяющее условиям (2) – (4) решение $\gamma(t)$.*

Поскольку в силу условий 1 – 3 произвольное непрерывное, ограниченное, удовлетворяющее условию (3) решение задачи (1), (2) удовлетворяет системе уравнений

$$x(t) = \omega(t) - \sum_{i=0}^{\infty} f(t+i, x(t+i), x(\varphi(t+i, x(t+i)))), \tag{5}$$

а произвольное непрерывное, ограниченное, удовлетворяющее условию (3) решение системы (5) является решением системы (1) (в этом легко убедиться непосредственной подстановкой (5) в (1)) и удовлетворяет при $t \to \infty$ условию (2), для доказательства теоремы 2 достаточно доказать существование единственного непрерывного, ограниченного и удовлетворяющего условиям (2), (3) решения системы уравнений (5).

Пусть $C^0(R^+)$ — множество непрерывных и ограниченных при $t \in R^+$ вектор-функций $x(t)$. С помощью соотношения

$$\rho(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\| = \sup_{t \in R^+} |x(t) - y(t)|$$

введем в $C^0(R^+)$ метрику ρ. Тогда множество вектор-функций $C^0(R^+)$ с метрикой ρ является полным метрическим пространством.

Обозначим через $C^{0,k}(R^+)$ множество вектор-функций $x(t)$, которые принадлежат $C^0(R)$ и удовлетворяют условиям

$$|x(t)| \le M, \qquad t \in R^+, \tag{6}$$

$$|x(t) - x(s)| \le k|t - s|, \qquad t, s \in R^+, \tag{7}$$

где $M = (1 - 2\theta_2)^{-1} M'$, $M' = \max\limits_t |x(t)|$,

$$k = \frac{1 - 2\theta_2}{2\theta_2} + \frac{1 - 2\theta_2}{2\theta_2}\sqrt{1 - \frac{4\theta_2}{(1 - 2\theta_2)^2}(l + \theta_1)}, \qquad l + \theta_1 \le \frac{(1 - 2\theta_2)^2}{4\theta_2}.$$

Нетрудно убедиться, что множество $C^{0,k}(R^+)$ является компактным в себе. С помощью соотношения

$$Tx(t) = \omega(t) - \sum_{i=0}^{\infty} f\big(t + i, x(t + i), x(\varphi(t + i, x(t + i)))\big) \tag{8}$$

определим отображение T и покажем, что оно является сжатым отображением множества $C^{0,k}(R^+)$ в себя.

В самом деле, если $x(t) \in C^{0,k}(R^+)$, то в силу (8) и условий 1–3 функция $Tx(t)$ является непрерывной при $t \in R^+$ и удовлетворяет условию (6). Далее, учитывая условия 1–3, получаем

$$\big|Tx(t) - Tx(s)\big| \le |\omega(t) - \omega(s)| +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \Big| f\big(t + i, x(t + i), x(\varphi(t + i, x(t + i)))\big) -$$

$$- \ f\big(s+i, x\,(s+i)\,, x\,(\varphi\,(s+i, x\,(s+i)))\big)\Big| \le$$

$$\le l\,|t-s| + \sum_{i=0}^{\infty} \eta_1\,(t+i, s+i)\,|t-s| +$$

$$+ \ \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2\,(t+i, s+i)\,(k\,|t-s| + k\,(l_1\,|t-s| + l_2 k\,|t-s|)) \le$$

$$\le \ \big(l + \theta_1 + \theta_2\,\big(2k + k^2\big)\big)\,|t-s| \,=\, k\,|t-s|\,.$$

Следовательно, отображение T преобразует множество $C^{0,k}\,(R^+)$ в себя и для завершения доказательства остается показать, что оно является сжатым. Действительно, если $x\,(t)\,, y\,(t) \in C^{0,k}\,(R^+)$, то в силу (8) и условий 1 – 3 получаем

$$\big|Tx\,(t) - Ty\,(t)\big| \le \sum_{i=0}^{\infty}\Big| f\big(t+i, x\,(t+i)\,, x\,(\varphi\,(t+i, x\,(t+i)))\big) -$$

$$- \ f\big(t+i, y\,(t+i)\,, y\,(\varphi\,(t+i, y\,(t+i)))\big)\Big| \le$$

$$\le \ \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2\,(t+i, t+i)\,\Big(|x\,(t+i) - y\,(t+i)| +$$

$$+ \ \big|x\,(\varphi\,(t+i, x\,(t+i))) - y\big(\varphi\,(t+i, x\,(t+i))\big)\big| +$$

$$+ \ |y\,(\varphi\,(t+i, x\,(t+i))) - y\,(\varphi\,(t+i, y\,(t+i)))|\Big) \le$$

$$\le \ \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2\,(t+i, t+i)\,\Big(|x\,(t+i) - y\,(t+i)| + k l_2\,|x\,(t+i) - y\,(t+i)| +$$

$$+ \,\big|x\,(\varphi\,(t+i, x\,(t+i))) - y\,(\varphi\,(t+i, x\,(t+i)))\big|\Big) \le$$

$$\le \theta_2\,(2 + k l_2)\,\|x\,(t) - y\,(t)\|$$

и, следовательно,

$$\|Tx\,(t) - Ty\,(t)\| \le \theta\,\|x\,(t) - y\,(t)\|$$

или

$$\rho\,(Tx\,(t)\,, Ty\,(t)) \le \theta\rho\,(x\,(t)\,, y\,(t))\,,$$

где $\theta = \theta_2 (2 + k)$. Поскольку $k < \dfrac{1 - 2\theta_2}{\theta_2}$, то

$$\theta = \theta_2 (2 + k) < \theta_2 \left(2 + \frac{1 - 2\theta_2}{\theta_2} \right) = 1,$$

т. е. отображение T сжато.

Таким образом, отображение T, определенное с помощью соотношения (8), преобразует $C^{0,k}(R^+)$ в себя и является сжатым. Тогда, как известно, T имеет единственную неподвижную точку $x(t) \in C^{0,k}(R^+)$ и

$$x(t) = \lim_{m \to \infty} T^m x_0(t),$$

где $x_0(t)$ — произвольная вектор-функция из множества $C^{0,k}(R^+)$.

Теорема 2 доказана.

1. *Быков Я. В., Линенко В. Г.* О некоторых вопросах качественной теории разностных уравнений. — Фрунзе: Илим, 1968. — 137 с.
2. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И., Самойленко А. М.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1984. — 216 с.
3. *Пелюх Г. П.* Асимптотическое поведение решений нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 1. — С. 138 – 141.
4. *Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах непрерывных решений систем нелинейных функционально-разностных уравнений // Докл. РАН. — 2002. — **65**, № 5.

Получено 18.11.2003