УДК 517.9

ПРО СТІЙКІСТЬ ЗА ЛІНІЙНИМ НАБЛИЖЕННЯМ

В. Ю. Слюсарчук

Укр. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@USUWM.rv.ua

We obtain new statements on stability from a linear approximation.

Отримано нові твердження про стійкість за лінійним наближенням.

У даній роботі для різницевих і диференціально-функціональних рівнянь наведено твердження про стійкість розв'язків за лінійним наближенням, що є новими навіть у випадку скінченновимірного банахового простору.

1. Стійкість за лінійним наближенням розв'язків різницевих рівнянь. У теорії різницевих рівнянь важливим є наступне твердження.

Теорема 1 [1, 2]. *Нехай*:

1) B *— нульовий розв'язок різницевого рівняння*

$$x_{n+1} = Bx_n,\ n \geq 0, \tag{1}$$

де B *— лінійний неперервний оператор, що діє в банаховому просторі* E, *є експоненціально стійким*;

2) *для деякого числа* $\nu > 0$ *оператори* $G_n : E \longrightarrow E$, $n \geq 0$, *задовольняють співвідношення*

$$\sup_{n \geq 0} \|G_n x\| \leq \nu \|x\|, \text{ якщо } \|x\| \leq R,$$

де R *— додатне число, і*

$$\nu \sum_{k=0}^{\infty} \|B^k\| < 1.$$

Тоді нульовий розв'язок різницевого рівняння

$$x_{n+1} = Bx_n + G_n x_n,\ n \geq 0, \tag{2}$$

є локально експоненціально стійким.

Доведення. Завдяки першій умові теореми

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\|B^n\|} < 1$$

(див., наприклад, [2]). Тому ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\|B^k\|$ збігається. Введемо в просторі E нову норму рівністю

$$\|x\|_B = \sum_{k=0}^{\infty}\|B^k x\|.$$

Очевидно, що $\|x\| \le \|x\|_B \le M\|x\|$, де $M = \sum_{k=0}^{\infty}\|B^k\|$. Оцінюючи різницю

$$\triangle\|x_n\|_B = \|x_{n+1}\|_B - \|x_n\|_B$$

з урахуванням рівняння (2), отримуємо

$$\triangle\|x_n\|_B = \sum_{k=0}^{\infty}\|B^k x_{n+1}\| - \sum_{k=0}^{\infty}\|B^k x_n\| =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\|B^{k+1}x_n + B^k G_n x_n\| - \sum_{k=0}^{\infty}\|B^k x_n\| \le$$

$$\le -\|x_n\| + \sum_{k=0}^{\infty}\|B^k G_n x_n\| \le -\|x_n\| + M\|G_n x_n\| \le$$

$$\le -\|x_n\| + M\nu\|x_n\| = (-1+M\nu)\|x_n\| \le \frac{M\nu-1}{M}\|x_n\|_B$$

(вважаємо, що $\|x_n\| \le R$).

Таким чином,

$$\triangle\|x_n\|_B \le \frac{M\nu-1}{M}\|x_n\|_B,$$

якщо $\|x_n\| \le R$. Тому

$$\|x_{n+1}\|_B \le \left(1+\frac{M\nu-1}{M}\right)\|x_n\|_B$$

і

$$\|x_n\| \le M\left(1+\frac{M\nu-1}{M}\right)^{n-n_0}\|x_{n_0}\|,\ n \ge n_0,$$

якщо $\|x_{n_0}\| \le \dfrac{R}{M}$, де n_0 — довільне ціле невід'ємне число. Звідси випливає, що нульовий розв'язок рівняння (2) є локально експоненціально стійким.

Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. *Нехай виконується перша умова теореми 1 і*

$$\sup_{n \ge 0} \|G_n x\| = o(\|x\|) \quad \text{при} \quad \|x\| \to 0.$$

Тоді нульовий розв'язок різницевого рівняння (2) є локально експоненціально стійким.

Використаємо доведення теореми 1 для встановлення більш важливого для подальших досліджень твердження.

Справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Нехай:*

1) нульовий розв'язок різницевого рівняння (1) є експоненціально стійким;

2) для операторів $G_n : E \longrightarrow E$, $n \ge 0$, справджується співвідношення

$$\sup_{n \ge 0} \|G_n x\| \le \varphi(\|x\|), \quad \text{якщо} \quad \|x\| \le R,$$

де R — додатне число і $\varphi : [0, R] \longrightarrow [0, +\infty)$ — строго зростаюча неперервна функція, для якої $\varphi(0) = 0$;

3) для деякого додатного числа ν

$$\sup_{n \ge 1} \|G_n(Bx + G_{n-1}x)\| \le \nu \|x\|, \quad \text{якщо} \quad \|x\| \le R,$$

і

$$\sqrt{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \|B^k\| < 1,$$

де R — те саме число, що й у другій умові теореми.

Тоді нульовий розв'язок різницевого рівняння (2) є локально експоненціально стійким.

Доведення. Використовуючи ті самі позначення, що й при доведенні теореми 1, отримуємо

$$\triangle \|x_n\|_B \le -\|x_n\| + \sum_{k=0}^{\infty} \|B^k G_n x_n\| \le -\|x_n\| + M\|G_n x_n\| \le$$

$$\le -\|x_n\| + M\|G_n(B + G_{n-1})x_{n-1}\| \le -\frac{1}{M}\|x_n\|_B + M\nu\|x_{n-1}\| \le$$

$$\le -\frac{1}{M}\|x_n\|_B + M\nu\|x_{n-1}\|_B$$

(вважаємо, що $\|x_{n-1}\|_B \le R$). Отже,

$$\|x_{n+1}\|_B \le \left(1 - \frac{1}{M}\right)\|x_n\|_B + M\nu\|x_{n-1}\|_B, \tag{3}$$

якщо $\|x_{n-1}\|_B \le R$.

Нехай n_0 — довільне ціле невід'ємне число, μ — таке число з проміжку $(0, R]$, що

$$\|B\|\mu + \varphi(\mu) \leq \frac{R}{M},$$

і

$$\|x_{n_0}\|_B \leq \mu.$$

Тоді на підставі (2)

$$\|x_{n_0+1}\|_B \leq R.$$

Тому завдяки (3) і тому, що

$$\left|1 - \frac{1}{M}\right| + M\nu < 1, \tag{4}$$

для всіх $n \geq n_0$

$$\|x_n\|_B \leq R$$

(співвідношення (4) випливає з третьої умови теореми і того, що $M \geq 1$).

Із (3) отримуємо

$$\|x_{n+1}\|_B \leq \left(1 - \frac{1}{M} + M\nu\right) \max\left\{\|x_n\|_B, \|x_{n-1}\|_B\right\},$$

якщо $\|x_{n-1}\|_B \leq R$. Тому

$$\|x_n\|_B \leq \left(1 - \frac{1}{M} + M\nu\right)^{\left[\frac{n-n_0}{2}\right]} \max\left\{\|x_{n_0}\|_B, \|x_{n_0+1}\|_B\right\}$$

для всіх $n \geq n_0$, якщо

$$\max\left\{\|x_{n_0}\|_B, \|x_{n_0+1}\|_B\right\} \leq R,$$

де $\left[\dfrac{n-n_0}{2}\right]$ — ціла частина числа $\dfrac{n-n_0}{2}$. Звідси та з (4) випливає локальна експоненціальна стійкість нульового розв'язку рівняння (2).

Теорему 2 доведено.

Наслідок 2. *Нехай виконуються перші дві умови теореми 2 і*

$$\sup_{n\geq 1} \|G_n(B + G_{n-1})x\| = \mathrm{o}(\|x\|) \quad \textit{при} \quad \|x\| \to 0.$$

Тоді нульовий розв'язок різницевого рівняння (2) є локально експоненціально стійким.

Наслідок 3. *Нехай* $B \in L(E,E)$, $(C_n)_{n\ge 0}$ — *обмежена послідовність елементів простору* $L(E,E)$ *і нульовий розв'язок рівняння*

$$x_{n+1} = Bx_n, \; n \ge 0,$$

є експоненціально стійким.

Тоді існує додатне число ε_0, *залежне від* B, *таке, що у випадку*

$$\sup_{n\ge 0} \|C_{n+1}(B + C_n)\| \le \varepsilon_0 \tag{5}$$

нульовий розв'язок рівняння

$$x_{n+1} = Bx_n + C_n x_n, \; n \ge 0, \tag{6}$$

є експоненціально стійким.

Зауваження 1. У цьому твердженні величина $\sup\limits_{n\ge 0} \|C_n\|$ *може бути досить великою, що підтверджується наступним прикладом.*

Приклад. Нехай банахів простір E подається у вигляді

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3,$$

де $E_k, k = \overline{1,3}$, — підпростори простору E (так подати простір E можна, якщо $\dim E \ge 3$). Для $k \in \{1,2,3\}$ розглянемо оператор проектування P_k на E_k паралельно $E_{k_1} \oplus E_{k_2}$, де $k_1 < k_2$ і $k \notin \{k_1, k_2\}$. Визначимо оператори $B, C_n \in L(E,E)$, $n \ge 0$, рівностями

$$B = \frac{1}{2} P_1$$

і

$$C_n = \begin{cases} \omega P_2, & \text{якщо } n \text{ — парне число;} \\ \omega P_3, & \text{якщо } n \text{ — непарне число,} \end{cases}$$

де ω – довільне дійсне число. Тоді

$$C_{n+1}(B + C_n) = O$$

для всіх $n \ge 0$, тобто співвідношення (5) виконується для кожного $\varepsilon_0 > 0$, нульовий розв'язок рівняння (1) є експоненціально стійким і, отже, нульовий розв'язок рівняння (6) також є експоненціально стійким за наслідком 3 (зазначимо, що ця властивість нульового розв'язку рівняння (6) має місце для довільного $\omega \in \mathbb{R}$).

Очевидно, що

$$\sup_{n\ge 0} \|C_n\| = |\omega|.$$

Ця величина може бути як завгодно великою.

Наведемо ще одне твердження.

Теорема 1. *Нехай:*

1) E_1 — банахів простір із нормою $\|\cdot\|_{E_1}$, $E_1 \subset E$, $E_1 \neq E$ і $\|x\|_{E_1} \geq \|x\|_E$ для всіх $x \in E_1$;

2) $B : E \longrightarrow E_1$ — лінійний неперервний оператор і нульовий розв'язок різницевого рівняння (1) є експоненціально стійким;

3) для операторів $G_n : E \longrightarrow E_1$, $n \geq 0$, справджуються співвідношення

$$\sup_{n\geq 0} \|G_n x\|_{E_1} \leq a\|x\|_E, \quad \text{якщо} \quad \|x\|_E \leq r, \tag{7}$$

і

$$\sup_{n\geq 0} \|G_n x\|_E \leq b\|x\|_{E_1}, \quad \text{якщо} \quad \|x\|_{E_1} \leq r, \tag{8}$$

де a, b і r — додатні числа.

Якщо

$$\sqrt{b\left(\|A\|_{L(E,E_1)} + a\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \|B^k\|_{L(E,E)} < 1,$$

то нульовий розв'язок різницевого рівняння (2) є локально експоненціально стійким.

Ця теорема випливає з теореми 2. Справді, завдяки першій і другій умовам теореми оператор B є елементом простору $L(E, E)$, а нульовий розв'язок різницевого рівняння (1) є експоненціально стійким. З третьої умови теореми випливає, що справджується друга умова теореми 2. Розглянемо таке число $R \in (0, r]$, щоб

$$\|B\|_{L(E,E_1)} R + aR \leq r.$$

Якщо $\|x\|_E \leq R$, то

$$\|Bx + G_n x\|_{E_1} \leq r.$$

Тому завдяки (7) і (8) для таких x

$$\sup_{n\geq 1} \|G_n(Bx + G_{n-1}x)\|_E \leq$$

$$\leq b\|Bx + G_{n-1}x\|_{E_1} \leq b\left(\|B\|_{L(E,E_1)} + a\right)\|x\|_E,$$

тобто виконується третя умова теореми 2, якщо

$$\nu = b\left(\|B\|_{L(E,E_1)} + a\right).$$

Таким чином, усі умови теореми 2 виконано.

Отже, нульовий розв'язок різницевого рівняння (2) є локально експоненціально стійким.

Наслідок 4. *Нехай виконуються перші дві умови теореми 3, справджується співвідношення (7) і*

$$\sup_{n\geq 0}\|G_n x\|_E = \mathrm{o}\left(\|x\|_{E_1}\right) \quad \textit{при} \quad \|x\|_{E_1} \to 0.$$

Тоді нульовий розв'язок різницевого рівняння (2) є локально експоненціально стійким.

2. Стійкість за лінійним наближенням розв'язків диференціально-функціональних рівнянь із запізненням. Розглянемо довільне число $T > 0$, замкнені кулі

$$B_0[0,r] = \left\{y \in C([-T,0],E) : \|y\|_{C([-T,0],E)} \leq r\right\},$$

$$B_1[0,r] = \left\{y \in C^1([-T,0],E) : \|y\|_{C^1([-T,0],E)} \leq r\right\},$$

лінійний неперервний оператор $A : C([-T,0],E) \longrightarrow E$ і неперервний оператор $F : [0,+\infty) \times C([-T,0],E) \longrightarrow E$, що задовольняє умови:

а) $F(t,0) = 0$ для всіх $t \geq 0$;

б) існують сталі $a > 0$ і $N > 0$ такі, що

$$\sup_{t\geq 0}\|F(t,x) - F(t,y)\|_E \leq N\|x-y\|_{C([-T,0],E)}$$

для всіх $x, y \in B_0[0,a]$.

Наведемо достатні умови експоненціальної стійкості нульового розв'язку рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax_t + F(t,x_t),\ t \geq 0, \tag{9}$$

де

$$x_t = x_t(\theta) = x(t+\theta),\ \theta \in [-T,0].$$

Такого типу рівняння були об'єктом дослідження у багатьох роботах (див., наприклад, [3–6]).

Справедливою є така теорема.

Теорема 4. *Нехай для відображення F виконано умови* а), б) *і нульовий розв'язок рівняння*

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay_t,\ t \geq 0, \tag{10}$$

є експоненціально стійким.

Тоді у випадку досить малого числа N *нульовий розв'язок рівняння* (9) *є локально експоненціально стійким.*

Ця теорема аналогічна відповідній теоремі Ляпунова [7] і є окремим випадком більш загального твердження, наведеного у [8].

Зауважимо, що у випадку

$$F(t, x_t) = x(t) - x(t - \varepsilon),\ \varepsilon \in (0, T],$$

і експоненціально стійкого нульового розв'язку рівняння (10) із теореми 4 не випливає, що нульовий розв'язок рівняння (9) є локально експоненціально стійким для досить малого $\varepsilon > 0$, оскільки

$$\inf_{\varepsilon \in (0,T]} \sup_{x \in B[0,a],\ t \geq 0} \|x(0) - x(-\varepsilon)\|_E = 2a$$

(у цьому випадку $N = 2$ для всіх $\varepsilon \in (0, T]$) і число 2 може не бути „досить малим".

Наведемо твердження про експоненціальну стійкість за лінійним наближенням, що можна застосовувати до дослідження рівнянь і з такого типу відображеннями F.

Теорема 5. *Нехай:*

1) виконуються умови а) і б);

2) для деякого числа $N_1 > 0$ *справджується нерівність*

$$\sup_{t \geq 0} \|F(t, x) - F(t, y)\|_E \leq N_1 \|x - y\|_{C^1([-T,0],E)}$$

для всіх $x, y \in B_1[0, a]$*;*

3) нульовий розв'язок рівняння (10) є експоненціально стійким.

Тоді у випадку досить малого числа N_1 *нульовий розв'язок рівняння (9) є локально експоненціально стійким.*

Це твердження доводиться зведенням рівняння (9) до різницевого рівняння вигляду (2) і застосуванням до нього теореми 2.

Розглянемо оператор $U_{\text{н}}(t_1)$, $t_1 \geq 0$, зсуву на T вздовж розв'язків рівняння (9), тобто оператор, який кожному елементу $g = g(\theta)$ простору $C([-T, 0], E)$ ставить у відповідність елемент x_{t_1+T} цього ж простору, породжений розв'язком $x = x(t)$ рівняння (9), що задовольняє початкову умову $x_{t_1}(\theta) = g(\theta)$, $\theta \in [-T, 0]$ (див. [8]). Існування оператора $U_{\text{н}}(t_1)$ випливає з обмежень на $F(t, x)$ і A. Звідси також випливає, що $x_{t_1+T} \in C^1([-T, 0], E)$ для кожного $g \in C([-T, 0], E)$, якщо $x_{t_1} = g$, і оператор $U_{\text{н}}(t_1) : C([-T, 0], E) \longrightarrow$ $\longrightarrow C^1([-T, 0], E)$ є неперервним.

Очевидно, що

$$x_{(n+1)T} = U_{\text{н}}(nT) x_{nT},\ n \geq 0. \tag{11}$$

Розглянемо також оператор $U_{\text{л}}(t_1)$, $t_1 \geq 0$, зсуву на T вздовж розв'язків лінійного рівняння (10), тобто оператор, який кожному елементу $g = g(\theta)$ простору $C([-T, 0], E)$ ставить у відповідність елемент y_{t_1+T} цього ж простору (точніше простору $C^1([-T, 0], E)$), породжений розв'язком $y = y(t)$ рівняння (10), що задовольняє початкову умову $y_{t_1}(\theta) = g(\theta), \theta \in [-T, 0]$.

Очевидно, що

$$U_{\text{л}}(nT) = U_{\text{л}}((n+1)T),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{12}$$

Визначимо оператор $\Phi_n : C([-T,0],E) \longrightarrow C^1([-T,0],E)$ рівністю

$$\Phi_n = U_{\text{н}}(nT) - U_{\text{л}}(nT).$$

Завдяки (12) різницеве рівняння (11) набирає вигляду

$$x_{(n+1)T} = U_{\text{л}}(0)x_{nT} + \Phi_n x_{nT},\ n \geq 0. \tag{13}$$

Отже, дослідження рівняння (9) зводиться до дослідження різницевого рівняння (13).

Очевидною є така лема.

Лема 1. *Наступні твердження є рівносильними*:

1) *нульовий розв'язок диференціально-функціонального рівняння (9) є локально експоненціально стійким*;

2) *нульовий розв'язок різницевого рівняння (13) є локально експоненціально стійким.*

Наведемо твердження про оцінки для $\sup\limits_{n\geq 0} \|\Phi_n v\|_{C([-T,0],E)}$ в деякому досить малому околі нульового елемента простору $C([-T,0],E)$, що дадуть змогу обґрунтувати теорему 5.

Лема 2. *Нехай відображення F задовольняє умови а) і б).*

Тоді

$$\sup_{n\geq 0} \|\Phi_n v\|_{C([-T,0],E)} \leq NTe^{(2Q+N)T}\|v\|_{C([-T,0],E)} \tag{14}$$

для всіх $v \in B_0[0,\gamma]$, де

$$Q = \|A\|_{L(C([-T,0],E),E)}$$

і

$$\gamma = a\left(e^{QT} + NTe^{(2Q+N)T}\right)^{-1}.$$

Доведення. Виберемо довільну функцію $g \in B_0[0,\gamma]$. Нехай $x(t)$ і $y(t)$ — розв'язки відповідно рівнянь (9) і (10) на відрізку $[nT,(n+1)T]$, що задовольняють умови $x_{nT}(\theta) = g(\theta), y_{nT}(\theta) = g(\theta), \theta \in [-T,0]$. Розглянемо функцію

$$w(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad t \in [(n-1)T, nT]; \\ x(t) - y(t), & \text{якщо} \quad t \in [nT,(n+1)T]. \end{cases}$$

Очевидно, що

$$w(t)+y(t)=g(0)+\int\limits_{nT}^{t}A\left(w_\tau+y_\tau\right)d\tau+$$

$$+\int\limits_{nT}^{t}F(\tau,w_\tau+y_\tau)d\tau,\ t\in[nT,(n+1)T], \tag{15}$$

і

$$y(t)=g(0)+\int\limits_{nT}^{t}Ay_\tau d\tau,\ t\in[nT,(n+1)T]. \tag{16}$$

Із (15) і (16) випливає

$$w(t)=\int\limits_{nT}^{t}Aw_\tau d\tau+\int\limits_{nT}^{t}F(\tau,w_\tau+y_\tau)d\tau \tag{17}$$

для всіх $t\in[nT,(n+1)T]$. Очевидно, що

$$w_{(n+1)T}=\Phi_n g. \tag{18}$$

Оцінимо $\|w_{(n+1)T}\|_{C([-T,0],E)}$. Із (16) випливає нерівність

$$\|y_{(n+1)T}\|_{C([-T,0],E)}\le e^{QT}\|g\|_{C([-T,0],E)}. \tag{19}$$

Використаємо цю нерівність для оцінки $\|w_{(n+1)T}\|_{C([-T,0],E)}$. Подамо співвідношення (17) у вигляді

$$w(t)=\int\limits_{nT}^{t}F(\tau,y_\tau)d\tau+\int\limits_{nT}^{t}Aw_\tau d\tau+\int\limits_{nT}^{t}F_1(\tau,w_\tau,y_\tau)d\tau, \tag{20}$$

де $t\in[nT,(n+1)T]$ і

$$F_1(\tau,z,y)=F(\tau,y+z)-F(\tau,y). \tag{21}$$

Тут $y,z\in C([-T,0],E)$. Очевидно, що

$$\sup_{t\ge0}\|F_1(t,z,y)\|_E\le N\|z\|_{C([-T,0],E)}, \tag{22}$$

якщо $\|y+z\|_{C([-T,0],E)} \leq a$ і $\|y\|_{C([-T,0],E)} \leq a$. Із співвідношень (19) – (22), із неперервності функції $w(t)$ та з нерівності $b = e^{QT}\|g\|_{C([-T,0],E)} < a$ випливає, що існує відрізок $[nT, \beta] \subset [nT, (n+1)T]$, $\beta > nT$, для якого

$$\|w(t)\|_E \leq TNb + \int\limits_{nT}^{t} (Q+N)\|w_\tau\|_{C([-T,0],E)} d\tau \tag{23}$$

для всіх $t \in [nT, \beta]$. Оскільки $\|w(t)\|_E \leq TNbe^{(Q+N)(t-nT)}$ для $t \in [nT, \beta]$, що випливає з (23), і $TNbe^{(Q+N)T} + b \leq a$, то нерівність (23) справджується і для $\beta = (n+1)T$.

Таким чином, завдяки (23)

$$\|w_{(n+1)T}\|_{C([-T,0],E)} \leq TNbe^{(Q+N)T}.$$

Враховуючи (18) і те, що

$$b = e^{QT}\|g\|_{C([-T,0],E)},$$

отримуємо (14), якщо $\|g\|_{C([-T,0],E)} \leq \gamma$.

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай*:

1) *відображення F задовольняє умови а) і б)*;

2) *справджується друга умова теореми 4*.

Тоді

$$\sup_{n\geq 1} \|\Phi_n(U_л(0)u + \Phi_{n-1}u)\|_{C([-T,0],E)} \leq$$

$$\leq N_1T(1+Q)e^{(2Q+N)T} \sup_{n\geq 1} \|U_л(0)u + \Phi_{n-1}u\|_{C([-T,0],E)} \tag{24}$$

для всіх $u \in B_0[0,\gamma_1]$, де

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{(1+Q+N)\left(1+(1+Q)e^{QT} + NTe^{(2Q+N)T}\right)}.$$

Зауважимо, що Q і γ визначено в лемі 2.

Доведення. Вважатимемо, що в доведенні леми 2 $n \geq 1$ і

$$g = U_л(0)u + \Phi_{n-1}u, \tag{25}$$

де u — довільний елемент кулі $B_0[0,\gamma_1]$. Тоді

$$g \in B_0[0,\gamma] \cap B_1[0,a]. \tag{26}$$

Справді, $g \in B_0[0,\gamma]$, оскільки $u \in B_0[0,\gamma_1]$, $\gamma_1 \le \gamma$, і за лемою 2

$$\|U_л(0)u + \Phi_{n-1}u\|_{C([-T,0],E)} \le \|U_л(0)\|_{L(C([-T,0],E),C^1([-T,0],E))}\|u\|_{C([-T,0],E)} +$$

$$+\ NTe^{(2Q+N)T}\|u\|_{C([-T,0],E)} \le \Big((1+Q)e^{QT} + NTe^{(2Q+N)T}\Big)\|u\|_{C([-T,0],E)}. \quad (27)$$

Тут використано нерівність

$$\|U_л(0)\|_{L(C([-T,0],E),C^1([-T,0],E))} \le (1+Q)e^{QT}, \quad (28)$$

що випливає з властивостей розв'язків рівняння (10). Включення $g \in B_1[0,a]$ справджується, оскільки $u \in B_0[0,\gamma_1]$, функція $g = g(t)$ є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay_t + F(t,y_t),\ t \in [nT,(n+1)T], \\ y_{nT}(\theta) &= u(\theta),\ \theta \in [-T,0], \end{aligned}$$

звідки випливає, що для всіх $t \in [nT,(n+1)T]$

$$\left\|\frac{dy(t)}{dt}\right\|_E \le (Q+N)\left(\|y_{(n+1)T}\|_{C([-T,0],E)} + \|u\|_{C([-T,0],E)}\right) =$$

$$= (Q+N)\left(\|U_л(0)u + \Phi_{n-1}u\|_{C([-T,0],E)} + \|u\|_{C([-T,0],E)}\right) \le$$

$$\le (Q+N)\Big(1 + (1+Q)e^{QT} + NTe^{(2Q+N)T}\Big)\|u\|_{C([-T,0],E)}$$

і

$$\|U_л(0)u + \Phi_{n-1}u\|_{C^1([-T,0],E)} \le \|U_л(0)u + \Phi_{n-1}u\|_{C([-T,0],E)} +$$

$$+\ \le (Q+N)\Big(1 + (1+Q)e^{QT} + NTe^{(2Q+N)T}\Big)\|u\|_{C([-T,0],E)} \le$$

$$\le (1+Q+N)\left(1 + (1+Q)e^{QT} +\ NTe^{(2Q+N)T}\right)\|u\|_{C([-T,0],E)} \le a$$

(тут враховано означення норми в $C^1([-T,0],E)$, співвідношення (25), (28), включення $u \in B_0[0,\gamma_1]$ і те, що $0 < \gamma \le a$).

Завдяки (25) та включенням (26), $u \in B_0[0,\gamma_1]$ у співвідношеннях (15) – (17) і (20) функція y_τ є елементом множини $B_1[0,a]$ для кожного $\tau \in [nT,(n+1)T]$. Тому для $F(t,y_t)$, $t \in [nT,(n+1)T]$, можна використовувати другу умову теореми 5.

Очевидно, що з (16) випливає не лише співвідношення (19), а й співвідношення

$$\|y_{(n+1)T}\|_{C^1([-T,0],E)} \le (1+Q)e^{QT}\|g\|_{C([-T,0],E)}. \quad (29)$$

Із співвідношень (20), (22) і (29), із неперервності функції $w(t)$ та з нерівності $b = (1 + +Q)e^{QT}\|g\|_{C([-T,0],E)} < a$ випливає, що існує відрізок $[nT, \beta] \subset [nT, (n+1)T]$, $\beta > nT$, для якого

$$\|w(t)\|_E \leq TN_1 b + \int\limits_{nT}^{t} (Q+N)\|w_\tau\|_{C([-T,0],E)} d\tau \tag{30}$$

для всіх $t \in [nT, \beta]$. Тут використано оцінку

$$\left\| \int\limits_{nT}^{t} F(\tau, y_\tau) d\tau \right\|_E \leq TN_1 \|y_{(n+1)T}\|_{C^1([-T,0],E)},\ t \in [nT, (n+1)T],$$

що встановлюється за допомогою другої умови леми. Оскільки

$$\|w(t)\|_E \leq TN_1 b e^{(Q+N)(t-nT)}$$

для $t \in [nT, \beta]$, що випливає з (30), і $TN_1 b e^{(Q+N)T} + b \leq a$, то нерівність (30) справджується і для $\beta = (n+1)T$.

Таким чином, завдяки (30)

$$\|w_{(n+1)T}\|_{C([-T,0],E)} \leq TN_1 b e^{(Q+N)T}.$$

Враховуючи (18), (25) і те, що

$$b = (1+Q)e^{QT}\|g\|_{C([-T,0],E)},$$

отримуємо (24).

Лему 3 доведено.

Зауважимо, що теорема 5 є наслідком теореми 2, лем 1 – 3 і того, що з третьої умови теореми 5 випливає експоненціальна стійкість нульового розв'язку лінійного різницевого рівняння (11).

Наслідок 5. *Нехай A і B — лінійні неперервні оператори, що діють із простору $C([-T,0],E)$ в простір E, і нульовий розв'язок рівняння*

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay_t,\ t \geq 0,$$

є експоненціально стійким.

У випадку досить малої норми $\|B\|_{L(C^1([-T,0],E),C([-T,0],E))}$ нульовий розв'язок рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay_t + By_t,\ t \geq 0,$$

є експоненціально стійким.

Зауваження 2. Норма $\|B\|_{L(C([-T,0],E),C([-T,0],E))}$ оператора B в попередньому твердженні може бути як завгодно великою.

На завершення зазначимо, що стійкість та нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь за лінійним наближенням у нескінченновимірному банаховому просторі були об'єктом досліджень у багатьох роботах (див., наприклад, [1 – 3, 8 – 17]).

1. *Слюсарчук В. Е.* Устойчивость решений разностных уравнений в банаховом пространстве: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Черновцы, 1972. — 91 с.
2. *Слюсарчук В. Ю.* Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі. — Рівне: Вид-во Укр. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2003. — 366 с.
3. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. — 211 с.
4. *Пинни Э.* Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 248 с.
5. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.
6. *Тышкевич В. А.* Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1981. — 80 с.
7. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 472 с.
8. *Слюсарчук В. Е.* К вопросу об устойчивости по первому приближению систем с периодическими операторными коэффициентами и периодическими запаздываниями в банаховом пространстве // Функциональные и дифференциально-разностные уравнения. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. — С. 129 – 140.
9. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 535 с.
10. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
11. *Слюсарчук В. Е.* Разностные уравнения в функциональных пространствах // Дополнение II монографии Д.И. Мартынюка „Лекции по качественной теории разностных уравнений". — Киев: Наук. думка, 1972. — С. 197 – 222.
12. *Слюсарчук В. Е.* К вопросу о неустойчивости по первому приближению // Мат. заметки. — 1978. — **23**, № 5. — С. 721 – 723.
13. *Слюсарчук В. Е.* К теории устойчивости систем по первому приближению // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1981. — № 9. — С. 27 – 30.
14. *Слюсарчук В. Е.* Новые теоремы о неустойчивости разностных систем по первому приближению // Дифференц. уравнения. — 1983. — **19**, № 5. — С. 906 – 908.
15. *Слюсарчук В. Е.* К неустойчивости разностных уравнений по первому приближению // Там же. — 1986. — **22**, № 4. — С. 722 – 723.
16. *Слюсарчук В. Е.* К неустойчивости автономных систем по линейному приближению // Асимптотические методы и их применение в задачах математической физики. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. — С. 112 – 114.
17. *Слюсарчук В. Е.* Теоремы о неустойчивости систем по линейному приближению // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 8. — С. 1104 – 1113.

Одержано 16.09.2003