УДК 517.9

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

К. К. Кенжебаев

Актюбин. ун-т
Казахстан, 463000, Актюбе, пр. А. Молдагуловой, 34
e-mail: eac akyobe@nursat.kz

А. Н. Станжицкий

Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченка
Украина, 01033, Киев, ул. Владимирская, 64
e-mail: stom@mail.univ.kiev.ua

For impulse systems, in terms of Lyapunov functions we obtain conditions for existence of invariant sets and study stability of the invariant sets.

Для імпульсних систем у термінах функцій Ляпунова наведено умови існування інваріантних множин та досліджено їх стійкість.

Будем рассматривать системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием вида

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = X(t,x), \qquad t \neq \tau_i(x),\\
&\Delta x\big|_{t=\tau_i(x)} = I_i(x), \qquad \tau_i(x) < \tau_{i+1}(x),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

предполагая, что функции $X(t,x), I_i(x)$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по x при $t \geq 0,\ x \in D$, где D — некоторая область из $\Re^n$. Будем считать, что выполняются условия, исключающие биение решений системы (1) о поверхности $t = \tau_i(x)$ (см., например, [1, 2]).

Изучим положительно инвариантные множества системы (1). Поскольку данная система неавтономна, инвариантные множества будем рассматривать в расширенном фазовом пространстве $\Re^{n+1}$. Эти множества исследуем в терминах неотрицательных функций Ляпунова $V(t,x)$ аналогично тому, как это сделано для систем без импульсов [3].

Пусть D_1 — ограниченная область, содержащаяся в D вместе с некоторой своей окрестностью. Функцию $V(t,x)$, определенную и имеющую непрерывные частные производные по t и x, при x, принадлежащем какой-нибудь области, содержащей $\bar{D}_1$, будем называть непрерывно дифференцируемой при

$$t \geq 0, \qquad x \in \bar{D}_1.$$

Пусть $V(t,x)$ — непрерывно дифференцируемая при $t \geq 0, x \in \bar{D}_1$, неотрицательная функция. Обозначим через N_t множество ее нулей при $t \geq 0,\ x \in D_1$. Предположим, что $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{R}^n} N_t = N$ — компакт в D_1. При этом, естественно, считаем, что N_t не пусто. Предположим также, что все нули $V(t,x)$ находятся в области $t \geq 0, x \in D_1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются указанные выше условия. Тогда если при* $t \geq 0$, $x \in D_1$

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i} X_i(t,x) \leq 0,$$
$$V\left(\tau_i(x), x + I_i(x)\right) \leq V\left(\tau_i(x), x\right), \tag{2}$$

то множество

$$V(t,x) = 0, \qquad x \in D_1, \qquad t \geq 0,$$

будет положительно инвариантным для системы (1).

Если же

$$\inf_{\substack{t\geq 0 \\ x\in D_1 : \rho(\bar{x}, N_t) > \delta}} V(t,x) = V_\delta > 0 \qquad \forall \delta > 0, \tag{3}$$

то при выполнении приведенных выше условий это множество будет и устойчивым.

Доказательство. Рассмотрим решение $x(t,x_0)$ системы (1), начинающееся при $t = 0$ в точке $x_0 \in N_0$. Возможны два случая:

1) точка $t = 0$ не является моментом импульса для $x(t,x_0)$;

2) точка $t = 0$ — момент импульсного воздействия для решения $x(t,x_0)$.

Поскольку N — компакт в D_1, N_0 также будет компактом в D_1. А поэтому в первом случае $x(t,x_0) \in D_1$ для t из некоторого интервала $[0,h)$, причем длина этого интервала меньше, чем расстояние от нуля до момента первого импульса для решения $x(t,x_0)$. Вследствие отсутствия биения h будет больше нуля.

Согласно сделанным предположениям,

$$\frac{dV\left(t, x(t,x_0)\right)}{dt} \leq 0 \qquad \text{для} \quad t \in [0,h).$$

Но тогда функция $V(t,x(t,x_0))$ не возрастает для $t \in [0,h)$, поэтому выполняется неравенство

$$V(t,x(t,x_0)) \leq V(0,x_0) = 0 \qquad \text{при} \quad t \in [0,h),$$

которое доказывает, что

$$(t, x(t,x_0)) \in N_t \qquad \text{для} \quad t \in [0,h).$$

Поскольку для любого фиксированного $t \geq 0$ N_t является компактом в D_1 и, следовательно, между N_t и границей ∂D_1 области D_1 есть „зазор", точка $x(t,x_0)$, изменяя непрерывно свое положение в области D_1, вообще не может выйти из множества N_t до момента первого импульса.

Пусть τ_1 — момент первого импульса. Тогда для него выполняется второе из неравенств (2), а именно:

$$V(\tau_1, x(\tau_1)) + I_1(x(\tau_1)) \leq V(\tau_1, x(\tau_1)) = 0,$$

которое доказывает, что точка

$$(\tau_1, x(\tau_1)) + I_1(x(\tau_1)) \in N_{\tau_1}.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны таковым при рассмотрении поведения решения на интервале $[0, h)$.

Во втором случае в силу второго неравенства из (2) импульс не выводит решение из множества N_0; дальнейшие рассуждения аналогичны таковым в первом случае. Поэтому в обоих случаях точка $(t, x(t, x_0))$ вообще не выходит из множества N_t ни при каком $t \geq 0$. Следовательно, N_t — положительно инвариантное множество системы (1).

Докажем устойчивость множества N_t. Пусть ε — достаточно малое положительное число такое, что

$$U_\varepsilon = U_\varepsilon(N) \subset \bar{D}_1,$$

где U_ε — ε-окрестность множества N, состоящая из точек $x \in \mathfrak{R}^n$, для которых $0 < < \rho(x, N) < \varepsilon$. Обозначим

$$V\varepsilon = \inf_{t \geq 0} V(t, x), \qquad x \in \bar{D}_1 : \rho(x, N_t) > \varepsilon.$$

Согласно лемме из [3, с. 60], для данного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in U_\delta(N_{t_0})$ выполняется неравенство

$$V(t_0, x) < V_\varepsilon.$$

Пусть

$$x_0 \in U_\delta(N_{t_0}).$$

Рассмотрим решение системы (1)

$$x(t, x_0), \quad x(t_0, x_0) = x_0.$$

Если t_0 не является моментом импульсного воздействия для решения $x(t, x_0)$, то точка $x(t, x_0)$ в течение некоторого промежутка времени принадлежит области D_1 (поскольку отсутствует биение), в которой выполняется неравенство

$$V(t, x(t, x_0)) \leq V(t_0, x_0) < V_\varepsilon. \tag{4}$$

Если же t_0 — точка импульса, то в силу второго неравенства из (2) имеем

$$V(t_0, x(t_0, x_0) + I(x(t_0, x_0))) \leq V(t_0, x(t_0, x_0)) < V_\varepsilon, \tag{5}$$

а исходя из условия (3),

$$x(t_0, x_0) + I(x(t_0, x_0)) \in U_\varepsilon(N_{t_0}),$$

следовательно, указанная точка не выходит из D_1. Поэтому в обоих случаях неравенство (4) выполняется на некотором интервале

$$t \in [h_0, h_1).$$

Случай конечности h_1 непосредственно приводит к противоречию. В силу условия (3) это означает, что

$$\rho(x(t, x_0), N_t) \leq \varepsilon \qquad \forall t \geq t_0.$$

Таким образом, доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) < \varepsilon$ такое, что при $x_0 \in U_\delta(N_{t_0})$

$$\rho(x(t, x_0), N_t) \leq \varepsilon \qquad \forall t \geq t_0,$$

что и свидетельствует об устойчивости множества N_t.

Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о существовании локально инвариантных множеств для системы (1). Будем решать его в терминах функции Ляпунова $V(t, x)$. Снова предположим, что все нули функции $V(t, x)$ (если они есть) находятся в области

$$t \in \mathfrak{R}^1, \qquad x \in D_1.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Если функция $V(t, x)$ неотрицательна, а*

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_i} X_i(t, x) \leq 0,$$
$$V\left(\tau_i(x), x + I_i(x)\right) \leq V\left(\tau_i(x), x\right) \quad \textit{при} \quad t \in \mathfrak{R}^1, \quad x \in D_1, \tag{6}$$

то множество

$$V(t, x) = 0, \qquad x \in D_1,$$

если оно не пусто, является локально инвариантным множеством системы (1).

Доказательство. Пусть решение системы (1) при $t = t_0$ проходит через точку x_0 такую, что

$$V(t_0, x_0) = 0,$$

т. е. $x(t, t_0, x_0)$ при $t = t_0$ принадлежит N_{t_0}. Тогда точка $x_0 \in D_1$.

Если $t = t_0$ не является точкой импульса для $x(t, t_0, x_0)$, то

$$x(t, t_0, x_0) \in D_1$$

для $t \in (h_1, h_2)$, $h_1 < 0 < h_2$. Тогда для функции $V(t, x(t, t_0, x_0))$ выполняется неравенство

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) = 0$$

при всех $t \in [0, h_2)$, которое доказывает, что дуга решения

$$x(t, t_0, x_0) \in N_t \qquad \text{при} \quad t \in [0, h_2).$$

Этого достаточно для локальной инвариантности множества N_t.

Если же при $t = t_0$ точка t_0 является точкой импульсного воздействия для $x(t, t_0, x_0)$, то в силу второго из неравенств (6) имеем

$$V(t_0, x(t_0) + I_0(x(t_0))) \leq V(t_0, x(t_0, t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) = 0.$$

Это свидетельствует о том, что точка

$$(t_0, x(t_0) + I_0(x(t_0)))$$

принадлежит N_{t_0} в силу того, что нули функции $V(t, x)$ лежат в области

$$t \in \mathfrak{R}^1, \qquad x \in D_1.$$

Далее, поскольку биения отсутствуют, $x(t, t_0, x_0)$ некоторое время находится в области D_1, где выполняется первое из неравенств (6), доказывающее локальную инвариантность множества N_t.

Теорема доказана.

Заметим, что хотя решения импульсной системы (1) являются разрывными функциями, инвариантные поверхности для нее, фигурирующие в теоремах 1 и 2, могут быть непрерывными и даже гладкими.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Трофимчук С. И.* Проблема „биений” в импульсных системах. — Киев, 1990. — 48 с. — (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 90.11).
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations // Nonlinear Sci. Ser. A. — Singapore etc.: World Sci. Publ., 1995. — Vol. 14. — 462 p.
3. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

Получено 10.11.2003