УДК 517.911

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

А. Е. Зернов, Ю. В. Кузина

Южноукр. пед. ун-т
Украина, 65020, Одесса, ул. Старопортофранковская, 26
e-mail: itim@inbox.ru

We consider the initial value problem $\sum\limits_{1\leqslant i+j+k\leqslant 2} a_{ijk}t^i x^j (x')^k + f(t,x,x') = 0,\ x(0) = 0,$ *where* $a_{000} = 0,$ $a_{001} = 0,$ $a_{002} = 0,$ *and prove that there exist continuously differentiable solutions* $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ *with required asymptotic properties.*

Розглядається задача Коші $\sum\limits_{1\leqslant i+j+k\leqslant 2} a_{ijk}t^i x^j (x')^k + f(t,x,x') = 0,\ x(0) = 0,$ *де* $a_{000} = 0,$ $a_{001} = 0,$ $a_{002} = 0.$ *Доведено існування неперервно диференційовних розв'язків* $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ *з потрібними асимптотичними властивостями.*

Проблема существования и числа решений сингулярной задачи Коши для дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных неизвестных, подробно исследовалась многими авторами (см., например, [1 – 5]). Значительное внимание уделялось и задаче Коши для дифференциальных уравнений неявного вида; рассматривались как общие вопросы о разрешимости и числе решений [6 – 9], так и признаки сходимости к решению последовательных приближений [10 – 13]. Однако асимптотическое поведение решений задачи Коши для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных неизвестных, исследовалось сравнительно мало, причем не только в сингулярном, но и в регулярном случае. В предлагаемой работе авторы сделали попытку рассмотреть сингулярную задачу Коши для дифференциального уравнения неявного вида. Доказано существование непустого множества непрерывно дифференцируемых решений с требуемыми асимптотическими свойствами. В то же время исследуется и асимптотическое поведение первых производных этих решений. При определенных условиях дан ответ на вопрос о числе решений указанного вида. Используются методы качественной теории дифференциальных уравнений [2, 14 – 18].

1. В настоящей работе рассматривается задача Коши

$$\sum_{1\leqslant i+j+k\leqslant 2} a_{ijk}t^i x^j (x')^k + f(t,x,x') = 0, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $t \in (0,\tau)$ — действительная переменная, $x : (0,\tau) \to \mathbb{R}$ — действительная неизвестная функция переменной t, все a_{ijk} — постоянные, $i,j,k \in \{0,1,2\}$, $a_{001} = a_{002} = 0$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция,

$$\mathcal{D} = \{(t,x,y) : t \in (0,\tau),\ |x| < r_1 t,\ |y| < r_2\},$$

$|f(t,x,y)| \leqslant t^2\alpha(t), (t,x,y) \in \mathcal{D}$, где $\alpha : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0}\alpha(t) = 0$.

Определение. *Для каждого $\rho \in (0,\tau)$ непрерывно дифференцируемая функция $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ называется ρ-решением задачи (1), (2), если:*

1) $(t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D},\ t \in (0,\rho]$;

2) x тождественно удовлетворяет уравнению (1) при $t \in (0,\rho]$.

В первой части работы предполагаем, что выполнены условия A:

1) если $\mathcal{P}(s) = a_{011}s^2 + (a_{010} + a_{101})s + a_{100},\ b(s) = -(a_{101} + a_{011}s)$, то уравнение $\mathcal{P}(s) = 0$ имеет действительный корень $s = c$, удовлетворяющий условиям

$$|c| < \min\{r_1, r_2\},\ \ \mathcal{P}'(c) \neq 0,\ \ b(c) \neq 0;$$

2) $|f(t_1,x,y) - f(t_2,x,y)| \leqslant l_t(\mu)|t_1 - t_2|,\ \ 0 < \mu \leqslant t_1, t_2 < \tau, \qquad (t_i,x,y) \in \mathcal{D},$

$$|f(t,x_1,y) - f(t,x_2,y)| \leqslant l_x(t)|x_1 - x_2|,\ \ (t,x_i,y) \in \mathcal{D},$$

$$|f(t,x,y_1) - f(t,x,y_2)| \leqslant l_y t|y_1 - y_2|,\ \ (t,x,y_i) \in \mathcal{D},$$

$$i \in \{1,2\},$$

где $l_t : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывная функция, $0 < t_1 < t_2 < \tau \Rightarrow l_t(t_1) \geqslant l_t(t_2)$, $l_x : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция,

$$\lim_{t\to+0} t\frac{l_x'(t)}{l_x(t)} = L_x, \qquad -\infty < L_x \leqslant 0,$$

l_y — постоянная, $l_y < |b(c)|$.

Обозначим через $\mathcal{U}_1(\rho, M, q, r)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$|u(t) - ct| \leqslant Mt^{1+r},\ \ \big|u'(t) - c\big| \leqslant qMt^r, \quad t \in (0,\rho]; \tag{3}$$

здесь ρ, M, q, r — постоянные, $\rho \in (0,\tau),\ M > 0,\ q > 0, r \in (0,1]$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия A и $b\mathcal{P}'(c) > 0$. Тогда существуют ρ, M, q, r такие, что задача (1), (2) имеет бесконечное множество ρ-решений, принадлежащих множеству $\mathcal{U}_1(\rho, M, q, r)$. Если при этом постоянная ξ удовлетворяет условию $|\xi - c\rho| < M\rho^{1+r}$, то задача (1), (2) имеет ρ-решение $x_\xi : (0,\rho] \to \mathbb{R}$, принадлежащее множеству $\mathcal{U}_1(\rho, M, q, r)$, такое, что $x_\xi(\rho) = \xi$.*

Обозначим через $\mathcal{U}_2(\rho, M, q)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$|u(t) - ct| \leqslant Mt^2,\ \ \big|u'(t) - c\big| \leqslant qMt,\ \ t \in (0,\rho]; \tag{4}$$

здесь ρ, M, q — постоянные, $\rho \in (0,\tau),\ M > 0,\ q > 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия A и*

$$b\mathcal{P}'(c) < 0, \ \ \frac{\mathcal{P}'(c)}{b} - 1 < L_x \leqslant 0.$$

Тогда существуют ρ, M, q такие, что задача (1), (2) имеет ρ-решение, принадлежащее множеству $\mathcal{U}_2(\rho, M, q)$.

Доказательство теоремы 1. Вначале выберем постоянные ρ, M, q, r. Пусть $r < \dfrac{\mathcal{P}'(c)}{b}$,

$$M > \frac{|a_{200}| + |a_{020}|c^2 + |a_{110}||c|}{\left(\frac{\mathcal{P}'(c)}{b} - r\right)|b|}, \ \ q > \frac{1}{|b|}\Big(|a_{010} + a_{011}c| + |\mathcal{P}'(c) - rb|\Big).$$

Условия, определяющие выбор ρ, здесь не приводим ввиду ограниченности объема статьи. Отметим лишь, что $\rho \in (0, \tau)$, ρ достаточно мало. Обозначим через $\mathcal{B}$ пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \max_{t \in [0,\rho]} (|x(t)| + |x'(t)|). \tag{5}$$

Пусть $\mathcal{U}$ — подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям (3), причем $u(0) = 0, \ u'(0) = c$ и при этом

$$\forall \mu \in (0, \rho] \ \forall t_i \in [\mu, \rho], \ \ i \in \{1, 2\} : |u'(t_1) - u'(t_2)| \leqslant K(\mu)|t_1 - t_2|, \tag{6}$$

где

$$K(\mu) = 2((|b| - l_y)\mu)^{-1}\Big(l_t(\mu) + l_x(\mu)(|c| + 1) + 2|b||c| + 2|a_{010} + a_{011}c||c| + |a_{011}||c| + 1\Big).$$

Множество $\mathcal{U}$ замкнуто, ограничено, выпукло и (на основании теоремы Арцела) компактно. Преобразуем уравнение (1) к виду

$$bt(x' - c) = (a_{010} + a_{011}c)(x - ct) + a_{200}t^2 + a_{020}x^2 + a_{110}tx +$$

$$+ \ a_{011}(x - ct)(x' - c) + f(t, x, x') \tag{7}$$

и далее будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$x' = c + (bt)^{-1}\Big((a_{010} + a_{011}c)(x - ct) + a_{200}t^2 + a_{020}x^2 + a_{110}tx +$$

$$+ \ a_{011}(u(t) - ct)(u'(t) - c) + f(t, u(t), u'(t))\Big), \tag{8}$$

где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция.

Пусть

$$\mathcal{D}_0 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ x \in \mathbb{R}\}.$$

В $\mathcal{D}_0$ для уравнения (8) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Обозначим

$$\Phi_1 = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - ct| = Mt^{1+r}\},$$

$$\mathcal{D}_1 = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - ct| < Mt^{1+r}\},$$

$$\mathrm{H} = \{(t,x) : t = \rho,\ |x - c\rho| < M\rho^{1+r}\}.$$

Пусть функция $A_1 : \mathcal{D}_0 \to [0,+\infty)$ определяется равенством $A_1(t,x) = (x-ct)^2 t^{-2(1+r)}$ и $a_1 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ — производная функции A_1 в силу уравнения (8). Нетрудно убедиться в том, что $a_1(t,x) > 0$ при $(t,x) \in \Phi_1$. Докажем, что если $(t_0,x_0) \in \Phi_1$ — любая точка и $J_0 : (t, x_0(t))$ — интегральная кривая (8), проходящая через точку (t_0,x_0), то при достаточно малом $\delta > 0$ $(t,x_0(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_1$ при $t \in (t_0, t_0+\delta)$ (здесь $t \leqslant \rho$) и $(t,x_0(t)) \in \mathcal{D}_1$ при $t \in \in (t_0-\delta, t_0)$. Действительно,

$$A_1(t_0, x_0(t_0)) = A_1(t_0,x_0) = M^2,\ \ a_1(t_0,x_0(t_0)) = a_1(t_0,x_0) > 0,$$

поэтому если $t_0 \in (0,\rho)$, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$\operatorname{sign}(A_1(t,x_0(t)) - A_1(t_0,x_0(t_0))) = \operatorname{sign}(t-t_0),\ \ |t-t_0| < \delta,$$

или

$$\operatorname{sign}(|x_0(t) - ct|t^{-1-r} - M) = \operatorname{sign}(t-t_0),\ \ |t-t_0| < \delta;$$

если же $t_0 = \rho$, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$A_1(t,x_0(t)) < A_1(t_0,x_0(t_0)),\ \ t \in (\rho-\delta,\rho),$$

или

$$|x_0(t) - ct|t^{-1-r} < M,\ \ t \in (\rho-\delta,\rho).$$

Отсюда можно сделать вывод, что каждая из интегральных кривых (8), пересекающих множество H, определена при $t \in (0,\rho]$ и лежит в $\mathcal{D}_1$ при всех $t \in (0,\rho]$. Действительно, каждая из этих интегральных кривых при убывании t от ρ до 0 не может иметь общих точек с Φ_1. Пусть $G(\rho, x_G) \in \mathrm{H}$ — произвольная фиксированная точка. Рассмотрим интегральную кривую $J_u : (t, x_u(t))$ уравнения (8), проходящую через точку G. Как следует из изложенного, $J_u : (t,x_u(t))$ лежит в $\mathcal{D}_1$ при $t \in (0,\rho]$. Поэтому

$$|x_u(t) - ct| \leqslant Mt^{1+r},\ \ t \in (0,\rho].$$

Легко видеть, что

$$|x_u'(t) - c| \leqslant qMt^r,\ \ t \in (0,\rho],$$

и

$$\forall \mu \in (0,\rho]\ \ \forall t_i \in [\mu,\rho],\ \ i \in \{1,2\} : |x_u'(t_1) - x_u'(t_2)| \leqslant K(\mu)|t_1 - t_2|. \tag{9}$$

Если положить $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = c$, то $x_u \in \mathcal{U}$. Определим оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ равенством $\mathrm{T}u = x_u$. Отметим, что $x_u(\rho) = x_G$ при любом выборе функции $u \in \mathcal{U}$ в правой части уравнения (8).

Докажем, что $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ — непрерывный оператор. Пусть $u_i \in \mathcal{U}, i \in \{1, 2\}$, — произвольные фиксированные функции. Обозначим $\mathrm{T}u_i = x_i, i \in \{1, 2\}$. Если $u_1 = u_2$, то и $x_1 = x_2$. Пусть, далее, $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h, h > 0$. Положим

$$\Phi_2 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_2(t)| = \eta h^{\nu} t^{(1+r)(1-\nu)} l_x(t)\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_2(t)| < \eta h^{\nu} t^{(1+r)(1-\nu)} l_x(t)\},$$

где η, ν — постоянные, определяемые следующими условиями:

$$0 < \nu < 1,\ \ \eta > \frac{4(2M)^{1-\nu}}{|b|\left(\frac{\mathcal{P}'(c)}{b} - r\right)}.$$

Пусть функция $A_2 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_2(t, x) = (x - x_2(t))^2 (t^{(1+r)(1-\nu)} l_x(t))^{-2}$$

и $a_2 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ — производная функции A_2 в силу уравнения

$$x' = c + (bt)^{-1}\Big((a_{010} + a_{011}c)(x - ct) + a_{200}t^2 + a_{020}x^2 + a_{110}tx +$$
$$+ a_{011}(u_1(t) - ct)(u'_1(t) - c) + f(t, u_1(t), u'_1(t))\Big). \tag{10}$$

Поскольку

$$|u_1(t) - u_2(t)| = |u_1(t) - u_2(t)|^{\nu} |u_1(t) - u_2(t)|^{1-\nu} \leqslant$$
$$\leqslant \|u_1 - u_2\|^{\nu}_{\mathcal{B}} (|u_1(t) - ct| + |u_2(t) - ct|)^{1-\nu} \leqslant h^{\nu}(2Mt^{1+r})^{1-\nu},$$

$$|u'_1(t) - u'_2(t)| = |u'_1(t) - u'_2(t)|^{\nu} |u'_1(t) - u'_2(t)|^{1-\nu} \leqslant$$
$$\leqslant \|u_1 - u_2\|^{\nu}_{\mathcal{B}} (|u'_1(t) - c| + |u'_2(t) - c|)^{1-\nu} \leqslant h^{\nu}(2qMt^{r})^{1-\nu},$$
$$t \in (0, \rho],$$

нетрудно убедиться в том, что $a_2(t, x) > 0$ для всех точек $(t, x) \in \Phi_2$, удовлетворяющих условию

$$|x - ct| \leqslant Mt^{1+r},\ \ t \in (0, \rho]. \tag{11}$$

Отсюда следует, что если взять любую точку $(t_0, x_0) \in \Phi_2$, удовлетворяющую условию (11), и рассмотреть интегральную кривую $J_0 : (t, x_0(t))$ уравнения (10), проходящую через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ $(t, x_0(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_2$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leqslant \rho$) и $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_2$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение для Φ_1. При этом $x_1(\rho) = x_2(\rho) = x_G$. Существенным является то обстоятельство, что для интегральной кривой $J_1 : (t, x_1(t))$ уравнения (10) выполнено условие $|x_1 - ct| \leqslant Mt^{1+r}, t \in (0, \rho]$. Поэтому если бы эта интегральная кривая имела общую точку с кривой Φ_2, то для такой точки неизбежно было бы выполнено условие (11), которое предполагалось выполненным при рассмотрении знака $a_2(t, x)$ в точках кривой Φ_2. Из изложенного следует, что если t уменьшается от ρ до 0, то интегральная кривая $J_1 : (t, x_1(t))$ уравнения (10) не может иметь общих точек с Φ_2. Значит, эта интегральная кривая лежит в $\mathcal{D}_2$ при всех $t \in (0, \rho]$ и поэтому

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant \eta h^\nu t^{(1+r)(1-\nu)} l_x(t), \;\; t \in (0, \rho]. \tag{12}$$

Поскольку для каждого $i \in \{1, 2\}$ функция $x_i : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ является решением уравнения (8), где $u = u_i$ соответственно, с помощью (12) легко доказать, что

$$|x'_1(t) - x'_2(t)| \leqslant \frac{l_x(t)}{t} h^\nu \omega(t), \;\; t \in (0, \rho], \tag{13}$$

где $\omega : (0, \rho] \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t \to +0} \omega(t) = 0$. Из (12), (13) следует

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \leqslant \frac{l_x(t)}{t} h^\nu, \;\; t \in (0, \rho]. \tag{14}$$

Перейдем непосредственно к доказательству непрерывности оператора $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Существует такое $t_\varepsilon \in (0, \rho)$, что

$$2Mt^{1+r} + 2qMt^r \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ при }\; t \in (0, t_\varepsilon].$$

Поэтому если $t \in (0, t_\varepsilon]$, то

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \leqslant |x_1(t) - ct| + |x_2(t) - ct| + |x'_1(t) - c| + |x'{}_2(t) - c| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть, далее, $t \in [t_\varepsilon, \rho]$. Тогда $\dfrac{l_x(t)}{t} \leqslant \dfrac{l_x(t_\varepsilon)}{t_\varepsilon}$ и из (14) имеем

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \leqslant \frac{l_x(t_\varepsilon)}{t_\varepsilon} h^\nu, \;\; t \in [t_\varepsilon, \rho]. \tag{15}$$

Положим

$$\delta(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon t_\varepsilon}{2 l_x(t_\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{\nu}}. \tag{16}$$

Если $h < \delta(\varepsilon)$, то согласно (15)

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \;\; t \in [t_\varepsilon, \rho].$$

Значит, если $h < \delta(\varepsilon)$, то

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ при }\; t \in (0, \rho],$$

и поэтому

$$\max_{t\in[0,\rho]}\Big(|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)|\Big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \;\text{ т. е. }\; \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

В итоге для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что если $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h < \delta(\varepsilon)$, то

$$\|\mathrm{T}u_1 - \mathrm{T}u_2\|_{\mathcal{B}} = \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Проведенные рассуждения не зависят от выбора функций $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$. Непрерывность оператора $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1 остается применить к оператору $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \to \mathcal{U}$ теорему Шаудера о неподвижной точке.

Доказательство теоремы 2. Прежде всего выберем постоянные ρ, M, q. Пусть

$$M > \frac{|a_{200}| + |a_{020}|c^2 + |a_{110}||c|}{\left(1 - \frac{\mathcal{P}'(c)}{b}\right)|b|}, \;\; q > \frac{|a_{010} + a_{011}c|}{|b|} + 1 - \frac{\mathcal{P}'(c)}{b}.$$

Условия выбора ρ не приводим ввиду ограниченности объема статьи. Укажем только, что $\rho \in (0, \tau)$ и ρ достаточно мало. Обозначим через $\mathcal{B}$ пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ с нормой (5). Пусть $\mathcal{U}$ — подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям (4), причем $u(0) = 0, \; u'(0) = c$ и при этом выполнено условие (6), где

$$K(\mu) = 2((|b| - l_y)\mu)^{-1}\Big(l_t(\mu) + l_x(\mu)(|c| + 1) + 2|b||c| + 2|a_{010} + a_{011}c||c| + 1\Big).$$

Множество $\mathcal{U}$ замкнуто, ограничено, выпукло и (на основании теоремы Арцела) компактно. Пусть

$$\mathcal{D}_0 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \; x \in \mathbb{R}\}.$$

Рассмотрим уравнение (8), где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. В $\mathcal{D}_0$ для уравнения (8) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Обозначим

$$\Phi_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \; |x - ct| = Mt^2\},$$

$$\mathcal{D}_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \; |x - ct| < Mt^2\},$$

$$\mathrm{H} = \{(t, x) : t = \rho, \; |x - c\rho| < M\rho^2\}.$$

Пусть функция $A_1 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством $A_1(t, x) = (x - ct)^2 t^{-4}$ и $a_1 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ — производная функции A_1 в силу уравнения (8). Легко видеть, что $a_1(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_1$. Поэтому если $(t_0, x_0) \in \Phi_1$ — любая точка и $J_0 : (t, x_0(t))$ — интегральная кривая (8), проходящая через точку (t_0, x_0), то при достаточно малом $\delta > 0$ $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_1$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leqslant \rho$) и $(t, x_0(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_1$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Это доказывается теми же рассуждениями, что и аналогичное утверждение относительно Φ_1 при доказательстве теоремы 1. Докажем теперь, что среди интегральных кривых (8), пересекающих H, найдется хотя бы одна интегральная кривая (обозначим ее через $J_u : (t, x_u(t))$), которая определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в $\mathcal{D}_1$ при всех $t \in (0, \rho]$. Действительно, любая интегральная кривая (8), пересекшая Φ_1 при $t \in (0, \rho)$, при последующем возрастании t не сможет иметь общих точек с Φ_1. Поэтому она пересечет $\overline{\mathrm{H}}$. Определим отображение $\psi : \Phi_1 \to \overline{\mathrm{H}}$, сопоставив каждой точке $P \in \Phi_1$ точку $\psi(P) \in \overline{\mathrm{H}}$, принадлежащую той же интегральной кривой (8), что и точка P. Пусть $\psi(\Phi_1) = \{Q \in \overline{\mathrm{H}} : Q = \psi(P),\ \ P \in \Phi_1\}$. Множество $\psi(\Phi_1)$ незамкнуто как образ незамкнутого множества Φ_1. В то же время $\overline{\mathrm{H}}$ — замкнутое множество; поэтому множество $\overline{\mathrm{H}} \backslash \psi(\Phi_1)$ непусто. Тогда найдется хотя бы одна интегральная кривая $J_u : (t, x_u(t))$ уравнения (8) такая, что $(\rho, x_u(\rho)) \in \overline{\mathrm{H}} \backslash \psi(\Phi_1)$. Очевидно, что $J_u : (t, x_u(t))$ определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в $\mathcal{D}_1$ при $t \in (0, \rho]$. Нетрудно убедиться в том, что не только

$$|x_u(t) - ct| \leqslant Mt^2, \ \ t \in (0, \rho],$$

но и

$$|x_u'(t) - c| \leqslant qMt, \ \ t \in (0, \rho],$$

и, кроме того, выполнено условие (9). Положим $x_u(0) = 0$, $x_u'(0) = c$. Тогда $x_u \in \mathcal{U}$. Докажем, что $J_u : (t, x_u(t))$ — единственная интегральная кривая (8) с такими свойствами. Иначе говоря, докажем, что если (t_0, x_0) — любая точка множества $\overline{\mathcal{D}}_1 \backslash \{(0, 0)\}$, удовлетворяющая условию $x_0 \neq x_u(t_0)$, то интегральная кривая (8), проходящая через точку (t_0, x_0), выйдет из множества $\overline{\mathcal{D}}_1$ при уменьшении t. Действительно, рассмотрим однопараметрические семейства множеств

$$\Phi_2(\nu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_u(t)| = \nu t^2(-\ln t)\},$$

$$\mathcal{D}_2(\nu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_u(t)| < \nu t^2(-\ln t)\},$$

где ν — параметр, $\nu \in (0, 1]$. Пусть функция $A_2 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_2(t, x) = (x - x_u(t))^2 (t^2(-\ln t))^{-2}$$

и $a_2 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ — производная функции A_2 в силу уравнения (8). Легко видеть, что $a_2(t, x) < 0$, если $(t, x) \in \mathcal{D}_0$ и при этом $x \neq x_u(t)$. В частности, $a_2(t, x) < 0$, если $(t, x) \in \Phi_2(\nu)$ для любого $\nu \in (0, 1]$. Поэтому если взять любую точку (t_0, x_0) любой кривой $\Phi_2(\nu)$, $\nu \in (0, 1]$, и обозначить через $J_0 : (t, x_0(t))$ интегральную кривую (8), проходящую через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_2(\nu)$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leqslant \rho$) и $(t, x_0(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_2(\nu)$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение относительно Φ_1. Пусть теперь $P_*(t_*, x_*)$ — произвольная точка множества $\overline{\mathcal{D}}_1 \backslash \{(0,0)\}$, удовлетворяющая условию $x_* \neq x_u(t_*)$. Существует такое $\nu_* \in (0,1]$, что $P_* \in \Phi_2(\nu_*)$. Из изложенного выше следует, что интегральная кривая $J_* : (t, x^*(t))$ уравнения (8), проходящая через точку P_*, лежит вне $\overline{\mathcal{D}}_2(\nu_*)$ при всех $t \in (t_-, t_*)$, где (t_-, t_*) — левый максимальный интервал существования решения x^*. С другой стороны, существует такое $t_{**} \in (0, \rho)$, что если одновременно $(t, x) \in \overline{\mathcal{D}}_1$, $t \in (0, t_{**})$, то $(t, x) \in \mathcal{D}_2(\nu_*)$, так как

$$|x - x_u(t)| \leqslant |x - ct| + |x_u(t) - ct| \leqslant 2Mt^2 < \nu_* t^2(-\ln t),$$

если $t \in (0, t_{**})$, где $t_{**} \in (0, \rho)$ достаточно мало. Пусть

$$t^* = \min\{t_*, t_{**}\}.$$

Из изложенного выше следует, что если $t \in (t_-, t^*)$, то интегральная кривая $J_* : (t, x^*(t))$ уравнения (8) лежит вне $\overline{\mathcal{D}}_1$, что и требовалось доказать. Определим оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ равенством $\mathrm{T}u = x_u$. Докажем, что $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ — непрерывный оператор. Пусть $u_i \in \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$, — произвольные фиксированные функции. Обозначим $\mathrm{T}u_i = x_i$, $i \in \in \{1, 2\}$. Если $u_1 = u_2$, то и $x_1 = x_2$. Пусть, далее, $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h$, $h > 0$. Положим

$$\Phi_3 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_2(t)| = \eta h^\nu t^{2(1-\nu)} l_x(t)\},$$

$$\mathcal{D}_3 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_2(t)| < \eta h^\nu t^{2(1-\nu)} l_x(t)\},$$

где ν, η — постоянные, которые определяются следующими условиями:

$$0 < \nu < \min\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{P}'(c)}{b} - 1 - L_x\right), 1\right\},\ \ \eta > \frac{4(2M)^{1-\nu}}{|b|\left(1 + L_x - \frac{\mathcal{P}'(c)}{b} - 2\nu\right)}.$$

Пусть функция $A_3 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_3(t, x) = (x - x_2(t))^2 (t^{2(1-\nu)} l_x(t))^{-2}$$

и $a_3 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ — производная функции A_3 в силу уравнения (10). Поскольку

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant h^\nu (2Mt^2)^{1-\nu},\ \ |u'_1(t) - u'_2(t)| \leqslant h^\nu (2qMt)^{1-\nu},\ \ t \in (0, \rho],$$

нетрудно убедиться в том, что $a_3(t, x) < 0$ для всех точек $(t, x) \in \Phi_3$, удовлетворяющих условию

$$|x - ct| \leqslant Mt^2,\ \ t \in (0, \rho]. \tag{17}$$

Отсюда следует, что если (t_0, x_0) — любая точка Φ_3, удовлетворяющая условию (17), и $J_0 : (t, x_0(t))$ — интегральная кривая уравнения (10), проходящая через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_3$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leqslant \rho$) и $(t, x_0(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_3$

при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение для Φ_1. При этом

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant |x_1(t) - ct| + |x_2(t) - ct| \leqslant 2Mt^2 < \eta h^\nu t^{2(1-\nu)} l_x(t),$$

если $t \in (0, t(h)]$, где $t(h) \in (0, \rho)$ достаточно мало. Значит, интегральная кривая $J_1 : (t, x_1(t))$ уравнения (10) лежит в $\mathcal{D}_3$ при $t \in (0, t(h)]$. Отметим, что для интегральной кривой $J_1 : (t, x_1(t))$ выполнено условие $|x_1(t) - ct| \leqslant Mt^2, t \in (0, \rho]$. Поэтому если бы $J_1 : (t, x_1(t))$ имела с Φ_3 общую точку, то в такой точке условие (17) обязательно было бы выполнено. Из изложенного следует, что если t увеличивается от $t(h)$ до ρ, то интегральная кривая $J_1 : (t, x_1(t))$ уравнения (10) не может иметь общих точек с Φ_3. Следовательно, $J_1 : (t, x_1(t))$ лежит в $\mathcal{D}_3$ при всех $t \in (0, \rho]$ и поэтому

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant \eta h^\nu t^{2(1-\nu)} l_x(t), \ \ t \in (0, \rho].$$

Далее, проводя те же рассуждения, что и в соответствующей части доказательства теоремы 1, получаем неравенства (13), (14) и (15), где $t_\varepsilon \in (0, \rho)$ столь мало, что

$$2Mt^2 + 2qMt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ \text{при} \ t \in (0, t_\varepsilon].$$

Как и при доказательстве теоремы 1, покажем, что если $\delta(\varepsilon)$ определяется формулой (16) и $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h < \delta(\varepsilon)$, то $\|\mathrm{T}u_1 - \mathrm{T}u_2\|_{\mathcal{B}} = \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Проведенные рассуждения не зависят от выбора функций $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$. Следовательно, оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ непрерывен.

Для завершения доказательства теоремы 2 достаточно применить к оператору $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ теорему Шаудера о неподвижной точке.

2. Во второй части работы предполагаем, что выполнены условия B:

1) $a_{010} = 0$, $a_{100} = 0$;

2) $a_{101} \neq 0$;

3) если обозначить $\mathcal{D}_* = \{(t, x, y) : t \in (0, \tau), \ |x| < r_3 t^2, \ |y| < r_4 t\}$ и считать $\mathcal{D}_* \subset \mathcal{D}$, то

$$|f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)| \leqslant l_x t |x_1 - x_2|, \ \ (t, x_i, y) \in \mathcal{D}_*,$$

$$|f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2)| \leqslant l_y t |y_1 - y_2|, \ \ (t, x, y_i) \in \mathcal{D}_*,$$

$$i \in \{1, 2\},$$

где l_x, l_y — постоянные;

4) $\left|\frac{a_{200}}{a_{101}}\right| < \min\{2r_3, r_4\}$;

5) $\left|a_{110} - \frac{a_{200}a_{011}}{a_{101}}\right| + l_x + l_y < |a_{101}|$;

6) $\alpha : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $\lim\limits_{t \to +0} t\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = \alpha_0$, $\lim\limits_{t \to +0} \frac{t}{\alpha(t)} = l_\alpha$, где $0 \leqslant \alpha_0 < +\infty$, $0 \leqslant l_\alpha < +\infty$.

Пусть постоянная c определяется равенством $c = -\dfrac{a_{200}}{2a_{101}}$. Обозначим через $\mathcal{U}_3(\rho, M)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\left|u(t) - ct^2\right| \leqslant Mt^2\alpha(t), \ \ \left|u'(t) - 2ct\right| \leqslant Mt\alpha(t), \ \ t \in (0, \rho]; \tag{18}$$

здесь ρ, M — постоянные, $\rho \in (0, \tau), \ M > 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия B. Тогда существуют ρ, M такие, что задача (1), (2) имеет ρ-решение, принадлежащее множеству $\mathcal{U}_3(\rho, M)$, и притом единственное.*

Доказательство. Вначале выберем постоянные ρ, M. Пусть

$$M > (|a_{110}| + 2|a_{001}||c|)|c|l_\alpha + 2.$$

Условия, определяющие выбор ρ, не приводим ввиду ограниченности объема статьи. Укажем только, что $\rho \in (0, \tau)$, ρ достаточно мало. Обозначим через $\mathcal{B}$ пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ с нормой (5). Пусть $\mathcal{U}$ — подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет при $t \in (0, \rho]$ условиям (18), причем $u(0) = 0, \ u'(0) = 0$. $\mathcal{U}$ — ограниченное и замкнутое множество.

Преобразуем уравнение (1) к виду

$$-\left(a_{101} + a_{011}\frac{x}{t}\right) t(x' - 2ct) = a_{020}x^2 + (a_{110} + 2a_{011}c)tx + f(t, x, x')$$

и далее будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$x' = 2ct - \left(a_{101} + a_{011}\frac{u(t)}{t}\right)^{-1} t^{-1}\Big(a_{020}(u(t))^2 + (a_{110} + 2a_{011}c)tu(t) + \\ + f(t, u(t), u'(t))\Big), \tag{19}$$

где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Пусть

$$\mathcal{D}_0 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ x \in \mathbb{R}\}.$$

В $\mathcal{D}_0$ для уравнения (19) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Положим

$$\Phi_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - ct^2| = Mt^2\alpha(t)\},$$

$$\mathcal{D}_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - ct^2| < Mt^2\alpha(t)\},$$

$$\mathrm{H} = \{(t, x) : t = \rho, \ |x - c\rho^2| < M\rho^2\alpha(\rho)\}.$$

Пусть функция $A_1 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством $A_1(t, x) = (x - ct^2)^2(t^2\alpha(t))^{-2}$ и $a_1 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ — производная функции A_1 в силу уравнения (19). Легко видеть, что

$a_1(t,x) < 0$ при $(t,x) \in \Phi_1$. Отсюда следует, что если $(t_0,x_0) \in \Phi_1$ — любая точка и $J_0 : (t,x_0(t))$ — интегральная кривая (19), проходящая через точку (t_0,x_0), то при достаточно малом $\delta > 0$ $(t,x_0(t)) \in \mathcal{D}_1$ при $t \in (t_0,t_0+\delta)$ (здесь $t \leqslant \rho$) и $(t,x_0(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_1$ при $t \in \in (t_0-\delta,t_0)$. Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение относительно Φ_1 при доказательстве теоремы 1. Отсюда следует, что среди интегральных кривых уравнения (19), пересекающих Н, найдется одна и только одна интегральная кривая (обозначим ее через $J_u : (t,x_u(t))$), которая определена при $t \in (0,\rho]$ и лежит в $\mathcal{D}_1$ при всех $t \in (0,\rho]$. С этой целью проводятся те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2; сейчас рассматриваются однопараметрические семейства множеств

$$\Phi_2(\nu) = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - x_u(t)| = \nu t^2\alpha(t)(-\ln t)\},$$

$$\mathcal{D}_2(\nu) = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - x_u(t)| < \nu t^2\alpha(t)(-\ln t)\},$$

где ν — параметр, $\nu \in (0,1)$, и доказывается, что производная в силу уравнения (19) от функции A_2, определенной равенством

$$A_2(t,x) = (x - x_u(t))^2(t^2\alpha(t)(-\ln t))^{-2},$$

отрицательна во всех точках $(t,x) \in \mathcal{D}_0$ таких, что $x \neq x_u(t)$. Нетрудно убедиться в том, что

$$|x_u(t) - ct^2| \leqslant Mt^2\alpha(t),\ \ |x_u'(t) - 2ct| \leqslant Mt\alpha(t),\ \ t \in (0,\rho].$$

Положим $x_u(0) = 0, x_u'(0) = 0$. Тогда $x_u \in \mathcal{U}$. Определим оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ равенством $\mathrm{T}u = x_u$. Докажем, что $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ — сжимающий оператор. Пусть $u_i \in \mathcal{U},\ i \in \in \{1,2\}$, — произвольные фиксированные функции и $\mathrm{T}u_i = x_i,\ i \in \{1,2\}$. Если $u_1 = u_2$, то и $x_1 = x_2$. Пусть, далее, $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h,\ h > 0$. Положим

$$\Phi_3 = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| = \eta h t\},$$

$$\mathcal{D}_3 = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| < \eta h t\},$$

где η — постоянная, удовлетворяющая условию

$$\eta > |a_{101}|^{-1}(|a_{110} + a_{011}c| + l_x + l_y).$$

Определим функцию $A_3 : \mathcal{D}_0 \to [0,+\infty)$ равенством

$$A_3(t,x) = (x - x_2(t))^2 t^{-2}.$$

Пусть $a_3 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ — производная функции A_3 в силу уравнения

$$x' = 2ct - \left(a_{101} + a_{011}\frac{u_1(t)}{t}\right)^{-1} t^{-1}\Big(a_{020}(u_1(t))^2 + (a_{110} + 2a_{011}c)tu_1(t) +$$

$$+\ f(t,u_1(t),u'{}_1(t))\Big), \tag{20}$$

Легко видеть, что $a_3(t,x) < 0$ при $(t,x) \in \Phi_3$. Отсюда следует, что если $(t_0,x_0) \in \Phi_3$ — любая точка и $J_0 : (t,x_0(t))$ — интегральная кривая (20), проходящая через точку (t_0,x_0), то при достаточно малом $\delta > 0$ $(t,x_0(t)) \in \mathcal{D}_3$ при $t \in (t_0, t_0+\delta)$ (здесь $t \leqslant \rho$) и $(t,x_0(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_3$ при $t \in (t_0-\delta, t_0)$. Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение относительно Φ_1 при доказательстве теоремы 1. При этом

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant |x_1(t) - ct^2| + |x_2(t) - ct^2| \leqslant 2Mt^2\alpha(t) < \eta h t,$$

если $t \in (0, t(h)]$, где $t(h) \in (0,\rho)$ достаточно мало. Следовательно, интегральная кривая $J_1 : (t, x_1(t))$ уравнения (20) лежит в $\mathcal{D}_3$ при $t \in (0, t(h)]$. Из изложенного выше следует, что если t возрастает от $t(h)$ до ρ, то интегральная кривая $J_1 : (t,x_1(t))$ не может иметь общих точек с Φ_3. Поэтому указанная интегральная кривая лежит в $\mathcal{D}_3$ при всех $t \in (0,\rho]$. Это означает, что

$$|x_1(t) - x_2(t)| < \eta h t, \ \ t \in (0,\rho]. \tag{21}$$

Для каждого $i \in \{1,2\}$ функция $x_i : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ обращает в тождество уравнение (19), в котором соответственно $u = u_i$. Из этих двух тождеств с помощью (21) получаем

$$|x_1'(t) - x_2'(t)| < \left(\frac{|a_{110} + 2a_{011}c| + l_x + l_y}{|a_{101}|} + \omega(t) \right) h, \ \ t \in (0,\rho], \tag{22}$$

где $\omega : (0,\rho] \to (0,+\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0} \omega(t) = 0$. Из (21), (22), учитывая достаточную малость ρ, имеем

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant \theta h, \ \ t \in (0,\rho], \tag{23}$$

где $\theta = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{|a_{110} + 2a_{011}c| + l_x + l_y}{|a_{101}|}\right)$; в соответствии с условием $0 < \theta < 1$. Из (23) следует

$$\max_{t\in[0,\rho]} \Big(|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \Big) \leqslant \theta h, \ \ \text{т. е.} \ \ \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \theta h,$$

или, окончательно,

$$\|\mathrm{T}u_1 - \mathrm{T}u_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \theta \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}}, \ \ 0 < \theta < 1.$$

Проведенные рассуждения не зависят от выбора функций $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1,2\}$. Таким образом, доказано, что $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ — сжимающий оператор.

Для завершения доказательства теоремы 3 остается применить к оператору $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ принцип Банаха сжатых отображений.

1. *Андреев А. Ф.* Усиление теоремы единственности O-кривой в N_2 // Докл. АН СССР. — 1962. — **146**, № 1. — С. 9–10.

2. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1972. — 664 с.

3. *Кигурадзе И. Т.* О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1965. — **1**, № 10. — С. 1271–1291.

4. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. — Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. — 352 с.

5. *Чечик В. А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1959. — № 8. — С. 155 – 198.

6. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с.

7. *Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Выща шк., 1974. — 472 с.

8. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$ // Ann. mat. pura ed appl. — 1959. — № 48. — P. 97 – 102.

9. *Frigon M., Kaczynski Z.* Boundary value problems for systems of implicit differential equations // J. Math. Anal. and Appl. — 1993.— **179**, № 2. — P. 317 – 326.

10. *Бабкин Б. Н.* О приближенном решении методом Чаплыгина обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной // Прикл. математика и механика. — 1953. — **17**, вып. 5. — С. 634 – 638.

11. *Витюк А. Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных // Дифференц. уравнения. — 1971. — **7**, № 9. — С. 1575 – 1580.

12. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. вузов. Математика. — 1971. — № 9. — С. 79 – 84.

13. *Kowalski Z.* The polygonal method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ // Ann. pol. math. — 1963. — **13**, № 2. — P. 173 – 204.

14. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

15. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши // Дифференц. уравнения. — 1992. — **28**, № 5. — С. 756 – 760.

16. *Зернов А. Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 3. — С. 302 – 310.

17. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Существование и асимптотическое поведение решений задачи Коши $x(x')^\gamma = f(t, x, x'),\ x(0) = 0$ // Нелінійні коливання.— 2003. — **6**, № 2. — С. 178 – 190.

18. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Качественное исследование сингулярной задачи Коши $\sum\limits_{k=0}^{n}(a_{k1}t + a_{k2}x)(x')^k = b_1 t + b_2 x + f(t, x, x'),\ x(0) = 0$ // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 10. — С. 1433 – 1438.

Получено 25.11.2003