УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ І ОБМЕЖЕНИХ НА $\mathbb{R}^2$ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ

М. І. Гром'як

Тернопіл. пед. ун-т, Україна

For a system of integral partial differential functional equations with linearly transformed arguments, we prove a theorem on existence of a solution that is continuously differentiable and bounded on $\mathbb{R}^2$.

Доведено теорему існування неперервно диференційовного і обмеженого на $\mathbb{R}^2$ *розв'язку системи інтегро-диференціальних функціональних рівнянь з частинними похідними і лінійно перетвореними аргументами.*

1. Вступ. У даній роботі досліджуються питання, пов'язані з існуванням неперервно диференційовного та обмеженого на $\mathbb{R}^2$ розв'язку системи нелінійних інтегро-диференціальних функціональних рівнянь з частинними похідними і лінійно перетвореними аргументами. Для деяких аналогічних рівнянь ці проблеми розглядались у роботі [1].

2. Основна теорема. Розглянемо систему інтегро-диференціальних функціональних рівнянь вигляду

$$u_t(t,x) + \Lambda u_x(t,x) = Au(t,x) +$$

$$+ f\left(t, x, u(t,x), u(\lambda t + a, x), u(t, \mu x + b), u(\lambda t + a, \mu x + b), \int\limits_0^{h(t,x)} \phi(t,x,s,u(t,x))ds\right), \quad (1)$$

де $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i, i = 1, \ldots, n,$ — дійсні числа $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i = \mathrm{const}$, $i = 1, \ldots, n$; λ, μ, a, b — довільні дійсні числа $(\lambda, \mu \neq 0)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(t, x, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ і $u(t,x)$ — невідома n-вимірна вектор-функція.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1) $\operatorname{Re} a_i > 0$, $i = 1, \ldots, p$, $\quad \operatorname{Re} a_j < 0$, $j = p+1, \ldots, n$;

2) вектор-функція $\phi(t,x,s,u(t,x))$ *та функція* $h(t,x)$ *є неперервно диференційовними за всіма своїми змінними і при* $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ *маємо*

$$|h(t,x)| \leq K,$$

$$\left|\phi(t,x,s,\tilde{u}) - \phi(t,x,s,\tilde{\tilde{u}})\right| \leq d\left|\tilde{u} - \tilde{\tilde{u}}\right|,$$

де $d \leq \dfrac{l}{K}$*;*

$$\left|(v_5(t,x,\tilde{u}))'_x - \left(v_5(t,x,\tilde{\tilde{u}})\right)'_x\right| \leq l\left|\tilde{u} - \tilde{\tilde{u}}\right|,$$

$$v_5(t,x,u(t,x)) = \int\limits_0^{h(t,x)} \phi(t,x,s,u(t,x))ds,$$

$$|\phi(t,x,s,u)| \stackrel{\text{df}}{=} \max_{1\leq j\leq n} |\phi_j(t,x,s,u_j)|;$$

3) вектор-функція $f(t,x,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$ *та її частинні похідні*

$$\frac{d^{i_1+i_2} f(t,x,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)}{dx^{i_1} dx_j^{i_2}},$$

$i_1 + i_2 = 1$, $j = 1,\ldots,5$*, неперервні за всіма своїми змінними, і при* $t \in \mathbb{R}$*,* $x \in \mathbb{R}$, $v_1 \in \mathbb{R}$, $v_2 \in \mathbb{R}$, $v_3 \in \mathbb{R}$, $v_4 \in \mathbb{R}$, $v_5 \in \mathbb{R}$ *маємо*

$$\sup|f(t,x,0,0,0,0,v_5)| = N,$$

$$\sup\left|\frac{d^{i_1+i_2} f(t,x,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)}{dx^{i_1} dv_j^{i_2}}\right| \leq l,$$

де N, l *— деякі додатні сталі і*

$$|f(t,x,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)| \stackrel{\text{df}}{=} \max_{1\leq j\leq n} |f_j(t,x,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)|;$$

4) вектор-функція $f(t,x,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$ *та її частинні похідні першого порядку по* $x, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ *задовольняють умову Ліпшиця*

$$\left|f(t,x,\tilde{v}_1,\tilde{v}_2,\tilde{v}_3,\tilde{v}_4,\tilde{v}_5) - f(t,x,\tilde{\tilde{v}}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\tilde{\tilde{v}}_3,\tilde{\tilde{v}}_4,\tilde{\tilde{v}}_5)\right| \leq$$

$$\leq l\left(|\tilde{v}_1 - \tilde{\tilde{v}}_1| + |\tilde{v}_2 - \tilde{\tilde{v}}_2| + |\tilde{v}_3 - \tilde{\tilde{v}}_3| + |\tilde{v}_4 - \tilde{\tilde{v}}_4| + |\tilde{v}_5 - \tilde{\tilde{v}}_5|\right),$$

$$\left| \frac{d^{i_1+i_2} f}{dx^{i_1} dv_j^{i_2}}(t, x, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4, \tilde{v}_5) - \frac{d^{i_1+i_2} f}{dx^{i_1} dv_j^{i_2}}(t, x, \tilde{\tilde{v}}_1, \tilde{\tilde{v}}_2, \tilde{\tilde{v}}_3, \tilde{\tilde{v}}_4, \tilde{\tilde{v}}_5) \right| \leq$$

$$\leq l \left(|\tilde{v}_1 - \tilde{\tilde{v}}_1| + |\tilde{v}_2 - \tilde{\tilde{v}}_2| + |\tilde{v}_3 - \tilde{\tilde{v}}_3| + |\tilde{v}_4 - \tilde{\tilde{v}}_4| + |\tilde{v}_5 - \tilde{\tilde{v}}_5| \right),$$

де $(t, x, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4, \tilde{v}_5), (t, x, \tilde{\tilde{v}}_1, \tilde{\tilde{v}}_2, \tilde{\tilde{v}}_3, \tilde{\tilde{v}}_4, \tilde{\tilde{v}}_5) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Тоді при достатньо малому значенні l існує неперервно диференційовний і обмежений на $\mathbb{R}^2$ розв'язок системи рівнянь (1).

3. Доведення теореми. Вважаючи

$$f\left(t, x, u(t,x), u(\lambda t + a, x), u(t, \mu x + b), u(\lambda t + a, \mu x + b), \int\limits_0^{h(t,x)} \phi(t, x, s, u(t,x)) ds\right)$$

вільним членом, розглянемо систему рівнянь

$$u_i(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(t-\tau) f_i\Big(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x,$$

$$u(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x), u(\lambda\tau + a, \lambda_j(\tau - t) + x),$$

$$u(\tau, \mu(\lambda_j(\tau - t) + x) + b), u(\lambda\tau + a, \mu(\lambda_j(\tau - t) + x) + b),$$

$$\int\limits_0^{h(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x)} \phi(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x, s, u(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x)) ds\Big) d\tau, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad (2)$$

де $G(t) = (G_{ij}(t))$ визначається співвідношенням

$$G(t) = \begin{cases} -\mathrm{diag}\,(e^{A_1 t}, 0), & t < 0; \\ \mathrm{diag}\,(0, e^{A_2 t}), & t > 0, \end{cases}$$

причому $A_1 = \mathrm{diag}\,(a_1, \ldots, a_p)$, $A_2 = \mathrm{diag}\,(a_{p+1}, \ldots, a_n)$.

На підставі властивостей функції $G(t)$ [1] неперервно диференційовний і обмежений на $\mathbb{R}^2$ розв'язок $W(t,x)$ системи рівнянь (2) є також обмеженим на всій площині розв'язком системи інтегро-диференціальних функціональних рівнянь (1).

Розв'язок системи (2) побудуємо за допомогою методу послідовних наближень, які визначимо формулами

$$u_i^0(t,x) = 0$$

та

$$u_i^m(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(t-\tau) f_j\Bigg(\tau, \lambda_j(\tau-t)+x,$$

$$u^{m-1}(\tau, \lambda_j(\tau-t)+x), u^{m-1}(\lambda\tau+a, \lambda_j(\tau-t)+x),$$

$$u^{m-1}(\tau, \mu(\lambda_j(\tau-t)+x)+b), u^{m-1}(\lambda\tau+a, \mu(\lambda_j(\tau-t)+x)+b),$$

$$\int\limits_{0}^{h(\tau,\lambda_j(\tau-t)+x)} \phi(\tau, \lambda_j(\tau-t)+x, s, u^{m-1}(\tau, \lambda j(\tau-t)+x)ds\Bigg)d\tau, \tag{3}$$

$$i = 1, \ldots, n, m = 1, 2, \ldots .$$

Покажемо, що при всіх $m \geq 1, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ виконується оцінка

$$\left|u_i^m(t,x) - u_i^{m-1}(t,x)\right| \leq M\theta^{m-1}, \tag{4}$$

де $0 < \theta < 1$. Для $\left|u_i^1(t,x) - u_i^0(t,x)\right|, i = 1, \ldots, n$, згідно з зображенням (3), властивостями функції $G(t)$, а також умовами 2 та 3 теореми одержимо

$$\left|u_i^1(t,x) - u_i^0(t,x)\right| = \left|u_i^1(t,x)\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \max_i \sum_{j=1}^{n} |G_{ij}(t-\tau)|\, |f_j(\tau, \lambda_j(\tau-t)+x, 0, 0, 0, 0, v_5)|\, d\tau \leq$$

$$\leq N \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)|\, d\tau \leq N\frac{2L}{\alpha}.$$

Покладаючи $M = N\dfrac{2L}{\alpha}$, переконуємося, що оцінка (4) справедлива для $m = 1$. Припустимо, що оцінка (4) справджується для деякого $m > 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Справді, на підставі (3), властивостей функції G та умови 4 теореми маємо

$$\left|u_i^{m+1}(t,x) - u_i^m(t,x)\right| \leq M\theta^{m-1} 5l \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G_{ij}(t-\tau)|\, d\tau \leq M\theta^{m-1}\frac{10L}{\alpha}l.$$

Нехай θ таке, що $\dfrac{10L}{\alpha}l < \theta < 1$ при достатньо малому l. Тоді оцінка (4) виконується для $m+1$, а значить, і для всіх $m \geq 1$.

Отже, послідовність функцій

$$u^m(t,x) = (u_1^n(t,x), u_2^m(t,x), \ldots, u_n^m(t,x)), \qquad m = 0, 1, \ldots,$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної і обмеженої функції $W(t,x) = (W_1(t,x), W_2(t,x), \ldots, W_n(t,x))$. Переходячи в (3) до границі при $m \to \infty$, переконуємося, що $W(t,x)$ є розв'язком системи (2).

Залишилось довести, що знайдені функції $W_i(t,x)$ мають неперервні перші похідні по t і x. Насамперед зауважимо, що з умов теореми випливає, що всі наближення, побудовані при доведенні існування розв'язку, мають неперервні похідні по t і x. Тоді, продиференціювавши по t і x рівність, яка визначає m-те наближення, одержимо

$$\frac{du_i^m(t,x)}{dx} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(t-\tau)\Bigg(\frac{df_j(\langle m-1\rangle)}{dx} +$$

$$+ \frac{df_j(\langle m-1\rangle)}{dv_1}\frac{du^{m-1}(\tau, \lambda_j(\tau-t)+x)}{dx} +$$

$$+ \frac{df_j(\langle m-1\rangle)}{dv_2}\frac{du^{m-1}(\lambda\tau+a, \lambda_j(\tau-t)+x)}{dx} +$$

$$+ \mu\frac{df_j(\langle m-1\rangle)}{dv_3}\frac{du^{m-1}(\tau, \mu(\lambda_j(\tau-t)+x)+b)}{dx} +$$

$$+ \mu\frac{df_j(\langle m-1\rangle)}{dv_4}\frac{du^{m-1}(\lambda\tau+a, \mu(\lambda_j(\tau-t)+x)+b)}{dx} +$$

$$+ \frac{df_j(\langle m-1\rangle)}{dv_5}\frac{d\Bigg(\int\limits_0^{h(\tau,\lambda_j(\tau-t)+x)} \phi(\tau, \lambda_j(\tau-t)+x, s, u^{m-1}(\tau, \lambda_j(\tau-t)+x))ds\Bigg)}{dx}\Bigg)d\tau \qquad (5)$$

та

$$\frac{du_i^m(t,x)}{dt} = f_i(\langle m-1\rangle) + a_i u_i^m(t,x) +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(t-\tau)\Bigg(-\lambda_j\frac{df_j(\langle m-1\rangle)}{dx} -$$

$$- \lambda_j\frac{df_j(\langle m-1\rangle)}{dv_1}\frac{du^{m-1}(\tau, \lambda_j(\tau-t)+x)}{dx} -$$

$$- \ \lambda_j \frac{df_j(\langle m-1\rangle)}{dv_2} \frac{du^{m-1}(\lambda\tau + a, \lambda_j(\tau - t) + x)}{dx} -$$

$$- \ \lambda_j \mu \frac{df_j(\langle m-1\rangle)}{dv_3} \frac{du^{m-1}(\tau, \mu(\lambda_j(\tau - t) + x) + b)}{dx} -$$

$$- \ \lambda_j \mu \frac{df_j(\langle m-1\rangle)}{dv_4} \frac{du^{m-1}(\lambda\tau + a, \mu(\lambda_j(\tau - t) + x) + b)}{dx} -$$

$$- \ \lambda_j \frac{df_j(\langle m-1\rangle)}{dv_5} \frac{d\Big(\int\limits_0^{h(\tau,\lambda_j(\tau-t)+x)} \phi(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x, s, u^{m-1}(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x))ds\Big)}{dx}\Bigg)d\tau, \quad (6)$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

де

$$\langle m-1\rangle = \Big(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x, u^{m-1}(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x),$$

$$u^{m-1}(\lambda\tau + a, \lambda_j(\tau - t) + x), u^{m-1}(\tau, \mu(\lambda_j(\tau - t) + x) + b),$$

$$u^{m-1}(\lambda\tau + a, \mu(\lambda_j(\tau - t) + x) + b),$$

$$\int\limits_0^{h(\tau,\lambda_j(\tau-t)+x)} \phi(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x, s, u^{m-1}(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x))ds\Big).$$

З (5), (6) безпосередньо випливає, що для доведення існування неперервних перших похідних по t, x достатньо довести, що послідовності

$$\frac{du_i^m(t,x)}{dx}, \qquad i = 1, \ldots, n, \ m = 0, 1, \ldots,$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Покажемо, що при всіх $m \geq 1$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ виконуються оцінки

$$\left|\frac{du_i^m(t,x)}{dx} - \frac{du_i^{m-1}(t,x)}{dx}\right| \leq \tilde{M}\theta^{m-1}, \qquad i = 1, ..., n, \tag{7}$$

де $\tilde{M}$ — деяка достатньо велика стала.

Враховуючи (5) і умову 3 теореми, при $m = 1$ маємо

$$\left|\frac{du_i^m(t,x)}{dx} - \frac{du_i^{m-1}(t,x)}{dx}\right| \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} |G_{ij}(t-\tau)| \left|\frac{df_j(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x, 0, 0, 0, 0, v_5)}{dx}\right| +$$

$$+ \left|\frac{df_j(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x, 0, 0, 0, 0, v_5)}{dv_5}\frac{dv_5}{dx}\right| d\tau \le$$

$$\le l(1+M)\frac{2L}{\alpha} \le \tilde{M}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

тобто в цьому випадку оцінки (7) виконуються. Міркуючи за індукцією, припускаємо, що оцінки (7) для деякого $m > 1$ встановлено, і покажемо, що вони не зміняться при переході від m до $m + 1$. Справді, на підставі (4), (5), (7) і умов $2-4$ одержуємо

$$\left|\frac{du_i^{m+1}(t,x)}{dx} - \frac{du_i^m(t,x)}{dx}\right| \le 5lM\theta^{m-1}\frac{2L}{\alpha} + (3 + 2|\mu|)l\tilde{M}\theta^{m-1}\frac{2L}{\alpha} +$$

$$+ (3 + 2|\mu|)l\frac{\tilde{M}}{1-\theta}\frac{2L}{\alpha}5M\theta^{m-1} \le \tilde{M}\theta^m,$$

де θ таке, що при достатньо малому l виконуються співвідношення

$$1 > \theta > \begin{cases} \dfrac{10L}{\alpha}l + \dfrac{10L}{\alpha}M\tilde{M}^{-1}l + \dfrac{50L}{\alpha(1-\theta)}Ml & \text{при } |\mu| \le 1; \\ \dfrac{2(3+2|\mu|)L}{\alpha}l + \dfrac{10L}{\alpha}M\tilde{M}^{-1}l + \dfrac{10(3+2|\mu|)L}{\alpha(1-\theta)}Ml & \text{при } |\mu| > 1. \end{cases}$$

Таким чином, оцінки (7) виконуються для всіх $m \ge 1$ і $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ і, отже, послідовності $\dfrac{du_i^m(t,x)}{dx}$, $i = 1, \ldots, n, m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ до неперервних функцій $\dfrac{dW_i(t,x)}{dx}$, $\quad i = 1, \ldots, n$. Оскільки

$$\frac{dW(t,x)}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{du_i^m(t,x)}{dx} - \frac{du_i^{m-1}(t,x)}{dx}\right], \quad i = 1, \ldots, n,$$

то на підставі (7) маємо

$$\left|\frac{dW(t,x)}{dx}\right| \leq \frac{\tilde{M}}{1-\theta}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо λ ($\neq$ 0) — ціле число і вектор-функція $f(t, x, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ є T-періодичною по t, то побудований розв'язок системи (1) також буде T-періодичним по t.

1. *Gromyak M. I.* Existence of a continuously differentiable solutions of a Cauchy problem for a system of integro-functional equations with partial derivatives and linearly transformed arguments // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, № 3. — P. 298–307.

Одержано 05.03.2002,
після доопрацювання — 10.04.2003