

УДК 533.6.013.42

**ПЛОСКАЯ НЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА
УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТВЕРДОГО
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С ЖИДКОСТЬЮ**

В.Д. Кубенко

*Ин-т механики НАН Украины,
Украина, 252057, Киев, ул. Нестерова, 3*

В.В. Гавриленко

*Укр. транспорт. ун-т,
Украина, 252610, Киев, ул. Суворова, 1*

Planar asymmetrical problem of impact of rigid body into a compressible fluid is considered. It is supposed that the penetrating elliptical cylindrical body has biased center of mass. Solution of the boundary problem is reduced to infinite system of 2-nd kind Volterra's integral equations. An analysis of results as a function of initial means of angle of asymmetry is done.

Розглядається плоска несиметрична задача вертикального удару твердого еліптичного циліндра по поверхні стисливої рідини. Розв'язок крайової задачі зводиться до розв'язку нескінченної системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. В чисельному прикладі проведено аналіз результатів для різних значень початкового кута асиметрії.

В настоящей статье решается плоская несимметричная задача вертикального удара о поверхность сжимаемой жидкости твердого эллиптического цилиндра, когда главные оси эллипса, находящегося в поперечном сечении цилиндра, наклонены к поверхности жидкости. Предполагается непроницаемость поверхности тела для жидкости. Жидкость имеет бесконечную глубину, а ее поведение описывается волновым уравнением.

На основе использования методов интегральных преобразований Лапласа по времени, разделения переменных, разложения в ряды Фурье, решение смешанной нестационарной краевой задачи сводится к решению бесконечной системы линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно коэффициентов разложения гидродинамического давления в ряд Фурье, на базе которой выполнены конкретные расчеты.

Рассматриваемая краевая задача является в общем случае нелинейной, поскольку определяемые в каждый момент времени границы области контакта тела с жидкостью зависят от интегральных характеристик (силы реакции со стороны жидкости и момента реакции внешних сил), а они сложным функциональным образом определяются через искомые коэффициенты ряда Фурье.

Решение несимметричной задачи является дальнейшим развитием численно-аналитического подхода [1], с помощью которого авторами решен ряд задач удара о сжимаемую жидкость жестких тел и тонких упругих оболочек, в частности, для плоского симметричного случая — в [2], для осесимметричного случая — в [1, 3 – 7].

1. Постановка задачи. Бесконечно протяженный твердый эллиптический цилиндр, двигаясь перпендикулярно поверхности невозмущенной жидкости, в некоторый момент $t = 0$ достигает этой поверхности и начинает погружаться в жидкость со скоростью $v_0(t)$, причем начальное значение скорости погружения $v_0 = v_0(0)$. Считаем, что образующая поверхности цилиндра в процессе взаимодействия тела с жидкостью остается параллельной первоначально невозмущенной поверхности жидкости. Жидкость предполагается невесомой, баротропной, идеально сжимаемой. Введем в полупространстве, занимаемом жидкостью, декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$: оси Ox и Oy направим по невозмущенной поверхности жидкости, причем ось Oy — параллельно образующей поверхности тела, ось Oz — в глубь жидкости; таким образом, невозмущенная поверхность жидкости совпадет с плоскостью $z = 0$. Поскольку гидродинамическая картина процесса погружения в жидкость эллиптического цилиндра в его произвольном поперечном сечении повторяется, достаточно ограничиться рассмотрением движения в одном из сечений — в плоскости xOz . Сечением погружающегося в жидкость эллиптического цилиндра в плоскости xOz является эллипс с полуосями a и b ($a \geq b$). В момент касания поверхности жидкости ни одна из осей эллипса не является параллельной оси Ox , вследствие чего обтекание тела жидкостью при погружении имеет несимметричный характер, а движение тела состоит из поступательного и вращательного движения.

Если обозначить через O' центр масс и геометрический центр эллипса, расположив его на оси Oz , а через $\psi(t)$ угол между положительными направлениями осей Oz и $O'z'$ (назовем его углом асимметрии) (рис. 1), причем в начальный момент удара этот угол равен ψ_0 , начальная угловая скорость тела равна $\dot{\psi}_0$, то декартовы координаты центра масс $O'(x_0, z_0)$ в произвольный момент времени определяются формулами

$$x_0 = 0; \quad z_0 = z^* - \sqrt{a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi}.$$

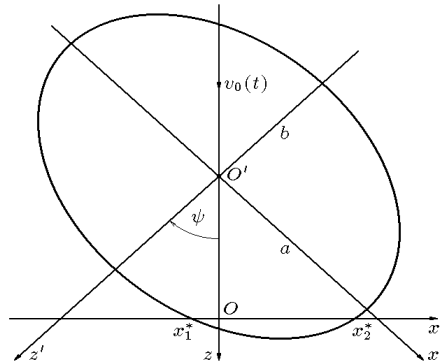


Рис. 1

Здесь z^* — путь, пройденный центром масс за время t при поступательном его движении вдоль оси Oz со скоростью $v_0(t)$:

$$z^* = \int_0^t v_0(\tau) d\tau.$$

Границы области контакта тела с жидкостью в произвольный момент времени определяются точками x_1^* и x_2^* пересечения его контура, т. е. эллипса, имеющего полуоси a , b и угол асимметрии ψ , с осью Ox по формулам

$$x_1^* = \frac{-B - \sqrt{D}}{2A}; \quad x_2^* = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A}, \quad (1)$$

где

$$A = \frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2}, \quad B = z_0 \sin 2\psi \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right),$$

$$C = z_0^2 \left(\frac{\sin^2 \psi}{a^2} + \frac{\cos^2 \psi}{b^2} \right) - 1, \quad D = B^2 - 4AC.$$

Исследуем ранний этап процесса ударного взаимодействия цилиндрического тела с жидкостью, соответствующий следующим ограничениям: рассматриваемые скорости погружения тела малы по сравнению со скоростью звука в жидкости C , т. е. $\frac{v_0}{C} \ll 1$, а глубины погружения тела в жидкость малы по сравнению с его линейными размерами, т. е. $\frac{z^*}{R} \ll 1$, где R — характерный линейный размер поперечного сечения цилиндра.

Затупленность цилиндрического тела в пределах области его контакта с жидкостью и малые глубины погружения дают возможность отождествить линейные координаты вдоль поверхностей жидкости и тела, линеаризовать граничные условия и снести их на невозмущенную поверхность жидкости $z = 0$.

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{t} = \frac{Ct}{R}, \quad \bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R}, \quad \bar{V} = \frac{V}{C},$$

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho C^2}, \quad \bar{F} = \frac{F}{\rho C^2 R}, \quad \bar{M} = \frac{M}{\rho C^2 R^2}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{CR},$$

где ρ — плотность жидкости, p — давление, V — скорость, F — сила реакции жидкости, M — момент реакции внешних сил, φ — волновой потенциал. Поскольку в дальнейшем будут использоваться только безразмерные переменные, черточку над ними опускаем.

Потенциал жидкости удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Скорость деформирования поверхности жидкости $V(t, x)$ и гидродинамическое давление $p(t, x)$ определяются по формулам

$$V(t, x) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (3)$$

$$p(t, x) = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=0}. \quad (4)$$

Сформулируем граничные условия. На свободной поверхности жидкости должно выполняться динамическое условие: давление на ней постоянно и для простоты считаем его равным нулю

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=0} = 0, \quad (x < x_1^*) \cup (x > x_2^*). \quad (5)$$

В области контакта жидкости с телом его поверхность предполагается непроницаемой для жидкости

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} = v_0(t), \quad x_1^* < x < x_2^*. \quad (6)$$

Поскольку до начала взаимодействия тела с жидкостью последняя находилась в состоянии покоя, то начальные условия будут нулевыми:

$$\varphi|_{t=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

Возмущения, вызванные в жидкости телом, на бесконечности затухают:

$$\varphi \rightarrow 0, \quad x^2 + z^2 \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Краевая задача (2), (5) – (8) решается совместно с уравнениями движения тела. Движение тела при взаимодействии с жидкостью состоит из вертикального поступательного перемещения и вращения около центра масс. Вертикальное движение тела в жидкости определяется согласно второму закону Ньютона

$$\mu \dot{v}_0(t) = -F(t), \quad v_0(0) = v_0, \quad (9)$$

где μ — погонная масса тела, отнесенная к ρR^2 ; $F(t)$ — гидродинамическая сила сопротивления погружению тела со стороны жидкости, которая в линеаризованном случае определяется как интеграл от давления, распределенного по области контакта тела с жидкостью:

$$F(t) = \int_{x_1^*}^{x_2^*} p(t, x) dx. \quad (10)$$

Вращательное движение цилиндра вокруг центра масс его поперечного сечения определяется уравнением

$$I_0 \ddot{\psi}(t) = -M(t), \quad \psi(0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0, \quad (11)$$

где I_0 — момент инерции сечения цилиндра относительно центра масс, $M(t)$ — момент реакции внешних сил относительно центра масс, определяемый по формуле

$$M(t) = \int_{x_1^*}^{x_2^*} p(t, x) x dx. \quad (12)$$

Сформулированная краевая задача является в общем случае нелинейной, так как в соотношениях (10), (12) гидродинамическая сила и момент реакции сложным функциональным образом определяются через искомые величины.

2. Метод решения. Ограничивая рассмотрение процесса малым отрезком времени, будем искать решение сформулированной задачи в пределах полуполосы $-l \leq x \leq l$, $z > 0$. Величина l выбирается из условия, согласно которому в течение рассматриваемого временного интервала отраженные от боковых граней полуполосы волны не достигают области контакта. Ниже положено $l = \pi$. Граничные условия на боковых гранях полуполосы выберем из соображений удобства разделения переменных.

В дальнейшем при использовании метода разложения функций в ряды Фурье по косинусам и синусам для удобства записи будем представлять ряд Фурье в виде

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{f_n^{(1)}(t) \cos nx + f_n^{(2)}(t) \sin nx\}, \quad k_n = \begin{cases} 2, & \text{если } n = 0; \\ 1, & \text{если } n = \overline{1, \infty}, \end{cases}$$

$$f_n^{(1)}(t) = \frac{1}{\pi k_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, x) \cos nx \, dx, \quad f_n^{(2)}(t) = \frac{1}{\pi k_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, x) \sin nx \, dx,$$

полагая, что коэффициент $f_0^{(2)}(t) \equiv 0$.

Представим скорость деформирования поверхности жидкости $V(t, x)$ и гидродинамическое давление $p(t, x)$ в виде рядов Фурье по $\cos nx$ и $\sin nx$:

$$V(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{V_n^{(1)}(t) \cos nx + V_n^{(2)}(t) \sin nx\}, \quad (13)$$

$$p(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{p_n^{(1)}(t) \cos nx + p_n^{(2)}(t) \sin nx\}. \quad (14)$$

Применяя к уравнению (2) преобразование Лапласа по времени t с параметром s [8], получаем в пространстве изображений уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial z^2} - s^2 \varphi^L = 0. \quad (15)$$

Общее решение уравнения (15), удовлетворяющее условию затухания на бесконечности (8), имеет вид

$$\varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-z\sqrt{s^2+n^2}} \{A_n \cos nx + B_n \sin nx\}, \quad (16)$$

где A_n, B_n — постоянные коэффициенты.

Применяя к выражениям (3), (4) и разложениям (13), (14) преобразование Лапласа и учитывая соотношения (16), получаем формулу, связывающую коэффициенты $V_n^{(i)L}(s)$ и $p_n^{(i)L}(s)$:

$$V_n^{(i)L}(s) = \frac{\sqrt{s^2+n^2}}{s} p_n^{(i)L}(s), \quad n = \overline{0, \infty}, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (17)$$

Тогда по теореме о свертке оригиналов двух функций [8] из соотношений (17) получаем зависимости [1]

$$V_n^{(i)}(t) = p_n^{(i)}(t) + \int_0^t p_n^{(i)}(\tau) f_n(t - \tau) d\tau, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (18)$$

связывающие коэффициенты $V_n^{(i)}(t)$ и $p_n^{(i)}(t)$. Здесь

$$f_n(t) = \int_0^t \frac{n J_1(n\xi)}{\xi} d\xi,$$

$J_1(t)$ — цилиндрическая функция Бесселя первого рода первого порядка [9].

С учетом разложений (13), (14) и соотношений (18) получаем связь между скоростью $V(t, x)$ и давлением $p(t, x)$:

$$V(t, x) = p(t, x) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^t \{p_n^{(1)}(\tau) \cos nx + p_n^{(2)}(\tau) \sin nx\} f_n(t - \tau) d\tau \right). \quad (19)$$

Удовлетворяя с помощью соотношения (19) граничным условиям (5), (6), получаем

$$p(t, x) = H((x - x_1^*)(x_2^* - x)) \left\{ v_0(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^t \{p_n^{(1)}(\tau) \cos nx + p_n^{(2)}(\tau) \sin nx\} f_n(t - \tau) d\tau \right) \right\}, \quad (20)$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда, имеющая вид $H(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Представляя в виде рядов Фурье левую и правую части выражения (20) и приравняв коэффициенты при соответствующих косинусах и синусах, получаем бесконечную систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно коэффициентов $p_n^{(1)}(t)$, $p_n^{(2)}(t)$, $n = \overline{0, \infty}$:

$$\begin{aligned} p_n^{(1)}(t) &= v_{0n}^{(1)}(t) - \sum_{m=0}^{\infty} \left(\beta_{mn}^{(1)}(x_1^*, x_2^*) \int_0^t p_m^{(1)}(\tau) f_m(t - \tau) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \beta_{mn}^{(2)}(x_1^*, x_2^*) \int_0^t p_m^{(2)}(\tau) f_m(t - \tau) d\tau \right), \\ p_n^{(2)}(t) &= v_{0n}^{(2)}(t) - \sum_{m=0}^{\infty} \left(\beta_{mn}^{(3)}(x_1^*, x_2^*) \int_0^t p_m^{(1)}(\tau) f_m(t - \tau) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \beta_{mn}^{(4)}(x_1^*, x_2^*) \int_0^t p_m^{(2)}(\tau) f_m(t - \tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$v_{0n}^{(1)}(t) = \frac{v_0(t)}{\pi k_n} \int_{x_1^*}^{x_2^*} \cos nx \, dx, \quad v_{0n}^{(2)}(t) = \frac{v_0(t)}{\pi k_n} \int_{x_1^*}^{x_2^*} \sin nx \, dx,$$

$$\beta_{mn}^{(1)}(x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{\pi k_n} \int_{x_1^*}^{x_2^*} \cos mx \cos nx \, dx,$$

$$\beta_{mn}^{(2)}(x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{\pi k_n} \int_{x_1^*}^{x_2^*} \sin mx \cos nx \, dx,$$

$$\beta_{mn}^{(3)}(x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{\pi k_n} \int_{x_1^*}^{x_2^*} \cos mx \sin nx \, dx,$$

$$\beta_{mn}^{(4)}(x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{\pi k_n} \int_{x_1^*}^{x_2^*} \sin mx \sin nx \, dx.$$

После преобразований коэффициенты $v_{0n}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, 2}$, и $\beta_{mn}^{(j)}(x_1^*, x_2^*)$, $j = \overline{1, 4}$, принимают вид

$$v_{0n}^{(i)}(t) = \frac{v_0(t)}{\pi k_n} g_n^{(i)}(x_1^*, x_2^*), \quad \beta_{mn}^{(j)}(x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{2\pi} q_{mn}^{(j)}(x_1^*, x_2^*),$$

где

$$g_n^{(1)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} x_2^* - x_1^*, & n = 0; \\ \frac{\sin nx_2^* - \sin nx_1^*}{n}, & n = \overline{1, \infty}, \end{cases}$$

$$g_n^{(2)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} 0, & n = 0; \\ \frac{\cos nx_1^* - \cos nx_2^*}{n}, & n = \overline{1, \infty}, \end{cases}$$

$$q_{mn}^{(1)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} x_2^* - x_1^*, & m = n, n = 0; \\ \frac{\sin mx_2^* - \sin mx_1^*}{m}, & m \neq n, n = 0; \\ x_2^* - x_1^* + \frac{\sin 2mx_2^* - \sin 2mx_1^*}{2m}, & m = n, n \neq 0; \\ \frac{\sin(m-n)x_2^* - \sin(m-n)x_1^*}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x_2^* - \sin(m+n)x_1^*}{m+n}, & m \neq n, n \neq 0, \end{cases}$$

$$q_{mn}^{(2)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} 0, & m = n, n = 0; \\ \frac{\cos mx_1^* - \cos mx_2^*}{m}, & m \neq n, n = 0; \\ \frac{\cos 2mx_1^* - \cos 2mx_2^*}{2m}, & m = n, n \neq 0; \\ \frac{\cos(m-n)x_1^* - \cos(m-n)x_2^*}{m-n} + \frac{\cos(m+n)x_1^* - \cos(m+n)x_2^*}{m+n}, & m \neq n, n \neq 0, \end{cases}$$

$$q_{mn}^{(3)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} 0, & m = n, n = 0; \\ 0, & m \neq n, n = 0; \\ \frac{\cos 2mx_1^* - \cos 2mx_2^*}{2m}, & m = n, n \neq 0; \\ \frac{\cos(m+n)x_1^* - \cos(m+n)x_2^*}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x_1^* - \cos(m-n)x_2^*}{m-n}, & m \neq n, n \neq 0, \end{cases}$$

$$q_{mn}^{(4)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} 0, & m = n, n = 0; \\ 0, & m \neq n, n = 0; \\ x_2^* - x_1^* - \frac{\sin 2mx_2^* - \sin 2mx_1^*}{2m}, & m = n, n \neq 0; \\ \frac{\sin(m-n)x_2^* - \sin(m-n)x_1^*}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x_2^* - \sin(m+n)x_1^*}{m+n}, & m \neq n, n \neq 0. \end{cases}$$

После того, как коэффициенты $p_n^{(i)}(t)$ определены из решения системы (21), коэффициенты $V_n^{(i)}(t)$ определяются по формуле (18), а скорость деформирования поверхности жидкости $V(t, x)$ и гидродинамическое давление $p(t, x)$ — соответственно по формулам (13), (14).

Используя соотношения (10) и (14), получаем гидродинамическую силу сопротивления погружению тела в жидкость в виде

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{p_n^{(1)}(t)g_n^{(1)}(x_1^*, x_2^*) + p_n^{(2)}(t)g_n^{(2)}(x_1^*, x_2^*)\}.$$

Дифференциальное уравнение (9) принимает вид

$$\mu \dot{v}_0(t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \{p_n^{(1)}(t)g_n^{(1)}(x_1^*, x_2^*) + p_n^{(2)}(t)g_n^{(2)}(x_1^*, x_2^*)\}, \quad v_0(0) = v_0. \quad (22)$$

Используя соотношения (12) и (14), получаем момент реакции

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{p_n^{(1)}(t)h_n^{(1)}(x_1^*, x_2^*) + p_n^{(2)}(t)h_n^{(2)}(x_1^*, x_2^*)\},$$

где

$$h_n^{(1)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} \frac{(x_2^* + x_1^*)(x_2^* - x_1^*)}{2}, & n = 0, \\ \frac{n(x_2^* \sin nx_2^* - x_1^* \sin nx_1^*) + \cos nx_2^* - \cos nx_1^*}{n^2}, & n = \overline{1, \infty}, \end{cases}$$

$$h_n^{(2)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{n(x_1^* \cos nx_1^* - x_2^* \cos nx_2^*) + \sin nx_2^* - \sin nx_1^*}{n^2}, & n = \overline{1, \infty}. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение (11) принимает вид

$$I_0 \ddot{\psi}(t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \{p_n^{(1)}(t)h_n^{(1)}(x_1^*, x_2^*) + p_n^{(2)}(t)h_n^{(2)}(x_1^*, x_2^*)\}, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0. \quad (23)$$

Таким образом, разрешающая система уравнений состоит из бесконечной системы интегральных уравнений (21), уравнений поступательного перемещения (22), вращательного движения (23) и соотношения (1), определяющего границы области контакта x_1^*, x_2^* .

3. Численная реализация задачи. Решение краевой задачи в общем случае сведено к решению системы интегральных уравнений (21) совместно с дифференциальными уравнениями (22), (23) по определяемым в каждый момент времени t границам области контакта тела с жидкостью из соотношений (1).

Решение задачи осуществлялось на конечном отрезке времени $[0; T]$, который разбивался на равные части длиной Δt , и в полученных узлах разбиения вычислялись все искомые величины.

Бесконечная система интегральных уравнений (21) и ряды в дифференциальных уравнениях (22), (23) подвергались усечению. Степень усечения определялась из соображений практической сходимости. В системе (21) все интегралы вычислялись по квадратурным формулам трапеций и Симпсона [10]. Решение системы интегральных уравнений (21) и дифференциальных уравнений (22), (23) осуществлялось итерационным методом последовательных приближений. Для улучшения сходимости рядов Фурье применялись σ -множители Гиббса [11].

В вычислениях на временном интервале $[0; 2]$ варьировались следующие параметры: начальный угол асимметрии $\psi_0 = 0^\circ \div 180^\circ$, начальная скорость вращения $\dot{\psi}_0 = 0 \div 0, 1$, масса тела $\mu = 0, 01 \div 20$, начальная скорость погружения $v_0 = 0, 001 \div 0, 15$.

На рис. 2 – 6 приведены некоторые результаты численного решения при следующих параметрах: $v_0 = 0, 1$; $\mu = 1$; $\dot{\psi}_0 = 0$; $\rho_0 = 2, 7$. На рис. 2 – 4 геометрические характеристики эллипса таковы: $a = 1, 2$; $b = 0, 8$.

На рис. 2 показана зависимость гидродинамического давления p от времени для различных значений начального угла асимметрии ψ_0 : 1 — 0° ; 180° ; 2 — 45° ; 135° ; 3 — 90° . Из этого рисунка видно, что:

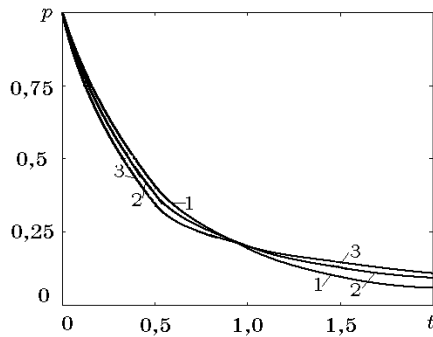


Рис. 2

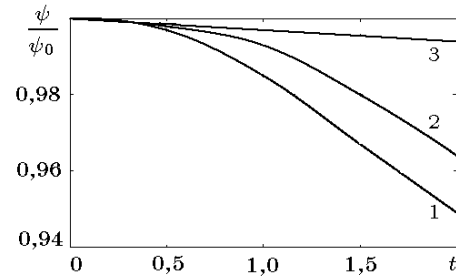


Рис. 3

на отрезке времени, когда величина гидродинамического давления еще относительно велика ($p \geq 0,25$), давление убывает тем быстрее, чем ближе значение начального угла асимметрии ψ_0 к 90° ; расчеты показывают, что графики гидродинамического давления для всех значений начального угла асимметрии расположены между кривыми 1 и 3, соответствующими случаям симметричного вертикального удара, причем один под другим в порядке приближения начального угла асимметрии к 90° ;

на отрезке времени, когда величина гидродинамического давления уже относительно мала ($p < 0,25$), графики гидродинамического давления для всех значений начального угла асимметрии также расположены между кривыми 1 и 3, но в противоположном порядке.

На рис. 3 показана зависимость отношения $\frac{\psi}{\psi_0}$ от времени для различных значений начального угла асимметрии ψ_0 : 1 — 10° ; 2 — 30° ; 3 — 80° .

Из этого рисунка видно, что для начальных углов асимметрии из интервала $[0^\circ; 90^\circ)$ график относительных значений угла асимметрии убывает, причем тем быстрее, чем меньше начальный угол асимметрии. Расчеты показали, что для начальных углов асимметрии из интервала $(90^\circ; 180^\circ]$ график относительных значений угла асимметрии возрастает, причем тем быстрее, чем больше начальный угол асимметрии. Уменьшение угла асимметрии на интервале $[0^\circ; 90^\circ)$ и увеличение на интервале $(90^\circ; 180^\circ]$ объясняется стремлением тела оказаться в положении устойчивого равновесия, т. е. для углов $\psi_0 = 0^\circ; 180^\circ$.

На рис. 4 показана зависимость границ области контакта тела с жидкостью от времени t . Через x_1^* и x_2^* обозначены соответственно левая и правая границы области контакта, а кривые 1, 2 соответствуют значениям начального угла асимметрии ψ_0 , равным $10^\circ; 45^\circ$. Штриховая линия соответствует симметричному случаю при $\psi_0 = 0^\circ$. Можно заметить, что площадь области контакта тела с жидкостью тем меньше, чем ближе начальный угол асимметрии к 90° .

На рис. 5, 6 показаны зависимости некоторых параметров процесса от геометрических характеристик сечения цилиндра, в частности от эксцентриситета e эллипса, для различных значений его большей полуоси a .

Расчеты показали, что для каждого эллипса существует такое значение начального угла асимметрии $\psi_0 \in [0^\circ; 90^\circ)$ или $\psi_0 \in (90^\circ; 180^\circ]$ (обозначим его ψ_0^*), что график мак-

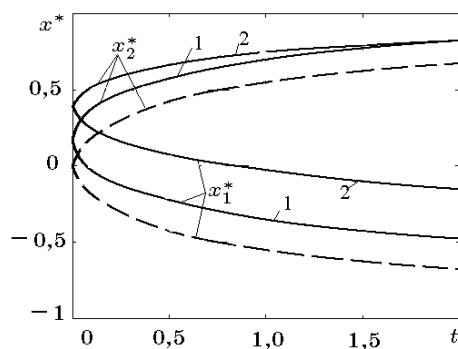


Рис. 4

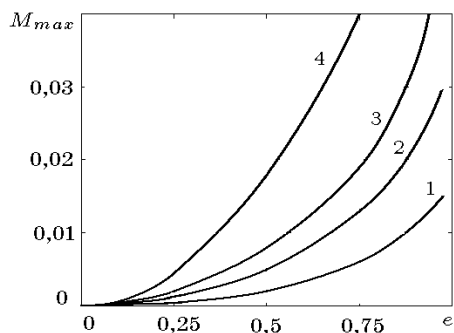


Рис. 5

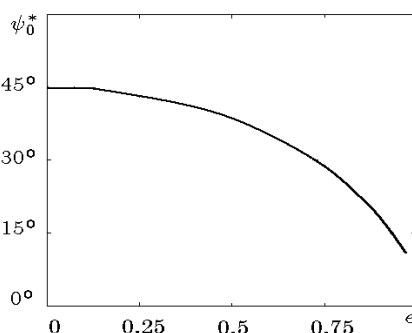


Рис. 6

симальных значений модулей моментов реакции $\max\{t \in [0; T], |M(t)|\}$ достигает своего абсолютного максимума M_{\max}^* , причем значения угла ψ_0^* и абсолютного максимума M_{\max}^* зависят от геометрических характеристик эллипса.

На рис. 5 показана зависимость M_{\max}^* от эксцентриситета эллипса e для различных значений полуоси a . Кривые 1–4 соответствуют значениям полуоси a , равным 0,8; 1,2; 1,5; 2,4. Можно заметить, что:

для всех цилиндров, сечения которых имеют эксцентриситет $e = 0$, абсолютные максимумы $M_{\max}^* = 0$ независимо от величины a , что соответствует случаю вертикального удара о жидкость кругового цилиндра радиуса a ;

для цилиндров, сечения которых имеют одинаковый эксцентриситет, абсолютный максимум M_{\max}^* тем больше, чем больше полуось a ;

для цилиндров, сечения которых имеют одинаковую полуось a , абсолютный максимум M_{\max}^* тем больше, чем больше эксцентриситет e ;

при $e \rightarrow 1$ абсолютный максимум M_{\max}^* неограниченно увеличивается, а при $e \rightarrow 0$ абсолютный максимум M_{\max}^* стремится к нулю.

На рис. 6 приведен график зависимости начального угла асимметрии ψ_0^* , при котором достигается M_{\max}^* , от эксцентриситета эллипса e для произвольных значений полуоси a . Расчеты проводились для значений $a \in [0, 4; 6]$, однако все кривые практически совпадали. Это дает возможность предположить, что для широкого диапазона значений большей

полуоси эллипса a угол ψ_0^* является общей характеристикой для всех эллиптических цилиндров, поперечные сечения которых имеют одинаковый эксцентриситет. Такое предположение значительно упрощает поиск значения абсолютного максимума M_{\max}^* для конкретного эллиптического цилиндра с известным эксцентриситетом e его поперечного сечения. Можно заметить, что:

угол ψ_0^* уменьшается с увеличением эксцентриситета сечения цилиндра, причем при $e \rightarrow 1$ угол ψ_0^* уменьшается до нуля;

при $e \rightarrow 0$ угол ψ_0^* увеличивается до 45° .

1. Кубенко В.Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. — Киев: Наук. думка, 1981. — 160 с.
2. Кубенко В.Д., Гавриленко В.В. Плоская задача проникания тонких упругих цилиндрических оболочек в сжимаемую жидкость // Прикл. механика. — 1990. — **26**, № 9. — С. 66 – 75.
3. Гавриленко В.В. Нестационарные нагрузки при проникании эллипсоида вращения в сжимаемую жидкость // Там же. — 1986. — **22**, № 8. — С. 113 – 117.
4. Гавриленко В.В. Определение напряженнодеформированного состояния проникающих в сжимаемую жидкость тонких упругих сферических оболочек // Там же. — 1988. — **24**, № 9. — С. 30 – 37.
5. Кубенко В.Д., Гавриленко В.В. Проникание осесимметричного твердого тела в сжимаемую жидкость // Там же. — 1986. — **22**, № 1. — С. 93 – 99.
6. Кубенко В.Д., Гавриленко В.В. Осесимметричная задача проникания жестких тел в сжимаемую жидкость // Там же. — 1987. — **23**, № 2. — С. 53 – 60.
7. Кубенко В.Д., Гавриленко В.В. Осесимметричная задача проникания тонких упругих сферических оболочек в сжимаемую жидкость // Там же. — 1988. — **24**, № 4. — С. 63 – 74.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965. — 751 с.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1966. — 296 с.
10. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
11. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. — М.: Физматгиз, 1961. — 524 с.

Получено 20.09.98