НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 3 • 1999

УДК 517.928

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ

О.І. Кочерга

Ніжин. пед. ун-т,
Україна, 251200, Чернігівська обл., вул. Крапив'янського, 2

The asymptotic solution of the Cauchy problem for the singularly perturbed linear system with degenerate matrix at the derivatives in case when the limit matrix bundle is regular and has multiple „completed" and simple „endless" elementary divisor is constructed.

Побудовано асимптотику розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреної лінійної системи з виродженою матрицею при похідних у випадку, коли гранична в'язка матриць регулярна і має кратний „скінченний" і простий „нескінченний" елементарні дільники.

Розглянемо задачу Коші для лінійної системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h B(t)\,\frac{dx}{dt} = A\,(t,\varepsilon)\,x + f\,(t,\varepsilon)\;, \tag{1}$$

$$x\,(0,\varepsilon) = x_0\;, \tag{2}$$

де $t \in [0;T]$, $B(t)$, $A(t,\varepsilon)$ — $(n\times n)$-вимірні матриці, $x(t,\varepsilon)$ і $f(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектори, $\varepsilon > 0$ — малий дійсний параметр, $h \in N$, $\det B(t) \equiv 0$ на $[0,T]$.

Питання про структуру загального розв'язку системи (1) та побудову його асимптотики у вигляді розвинень за степенями малого параметра досліджувалось у роботах [1 – 6]. Використовуючи результати цих робіт, у даній статті пропонується метод побудови асимптотики розв'язку задачі Коші для системи (1) у випадку кратного спектра головного оператора.

Нехай виконуються такі умови:

1) матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ на даному відрізку $[0,T]$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\ge 0} \varepsilon^k A_k(t); \qquad f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\ge 0} \varepsilon^k f_k(t);$$

2) матрична в'язка $L(t,\lambda) = A_0(t) - \lambda B(t)$ регулярна на $[0,T]$ і має один „скінченний" елементарний дільник $(\lambda-\lambda_0)^p$ кратності p та один „нескінченний" елементарний дільник кратності $q = n - p$;

3) матриці $A_k(t)$, $k = 0,1,\ldots$, $B(t)$ та вектор-функції $f_k(t)$, $k = 0,1,\ldots$, нескінченно диференційовні на $[0;T]$.

З умови 2 випливає [1], що матриця $A_0(t)$ має B-жорданів ланцюжок векторів довжини p, що складається з власного вектора $\varphi_1(t) = \varphi(t)$, який відповідає власному значенню $\lambda_0(t)$, і $p-1$ B-приєднаних векторів $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_p(t)$, які задовольняють співвідношення

$$(A_0 - \lambda_0 B)\,\varphi = 0, \quad (A_0 - \lambda_0 B)\,\varphi_i = B\varphi_{i-1}\,, \quad i = \overline{2,p}\,, \tag{3}$$

причому рівняння

$$(A_0 - \lambda_0 B)\, y = B\varphi_p \tag{4}$$

несумісне.

Приєднані вектори з цих рівнянь можна визначити за формулою

$$\varphi_i = (HB)^{i-1}\varphi\,, \quad i = \overline{2,p}\,, \tag{5}$$

де $H(t)$ — напівобернена матриця [1] до матриці $(A_0 - \lambda_0 B)$.

В свою чергу, матриця $B(t)$ має A_0-жорданів ланцюжок векторів довжини q, що складається з власного вектора $\widetilde{\varphi}_1(t) = \widetilde{\varphi}(t)$, який відповідає нульовому власному значенню, і $q-1$ A_0-приєднаних векторів $\widetilde{\varphi}_2(t), \ldots, \widetilde{\varphi}_q(t)$, які задовольняють співвідношення

$$B\widetilde{\varphi} = 0\,, \quad B\widetilde{\varphi}_j = A_0\widetilde{\varphi}_{j-1}\,, \quad j = \overline{2,q}\,, \tag{6}$$

причому рівняння

$$Bz = A_0\widetilde{\varphi}_q \tag{7}$$

несумісне.

Приєднані вектори з цих рівнянь визначимо за формулою

$$\widetilde{\varphi}_j = (GA_0)^{j-1}\widetilde{\varphi}\,, \quad j = \overline{1,q}\,, \tag{8}$$

де $G(t)$ — напівобернена матриця [1] до матриці $B(t)$.

Позначимо через $\psi(t)$ нуль матриці $(A_0 - \lambda_0 B)^*$, а через $\widetilde{\psi}(t)$ — нуль матриці $B^*(t)$. Із сумісності рівнянь (3) і (6) і співвідношень (5) і (8) випливає

$$\begin{aligned} &(B(HB)^{i-1}\varphi, \psi) = 0\,, \qquad i = \overline{1, p-1}\,, \\ &(A_0(GA_0)^{j-1}\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) = 0\,, \qquad j = \overline{1, q-1}\,, \end{aligned} \tag{9}$$

а з несумісності рівнянь (4) і (7) і з того, що вектори $\psi(t)$ і $\widetilde{\psi}(t)$ визначаються з точністю до довільного скалярного множника, маємо

$$\begin{aligned} &(B(HB)^{p-1}\varphi, \psi) = 1\,, \\ &(A_0(GA_0)^{q-1}\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) = 1\,, \end{aligned} \tag{10}$$

де символом (x, y) позначено скалярний добуток векторів x, y у n-вимірному унітарному просторі U^n.

Припустимо, що має місце „нерезонанс", тобто серед власних значень даної в'язки немає нульового. Згідно із структурою загального розв'язку системи (1), встановленого в [1], розв'язок задачі (1), (2) шукатимемо у вигляді

$$
\begin{gathered}
x(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{p}u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t(\lambda_0+\lambda_i(t,\varepsilon))dt\right)+\\
+\sum_{j=1}^{q-1}v_j(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\frac{dt}{\xi_j(t,\varepsilon)}\right)+w(t,\varepsilon),\\
i=\overline{1,p},\qquad j=\overline{1,q-1},
\end{gathered}
\tag{11}
$$

де $u_i(t,\varepsilon)$, $v_j(t,\varepsilon)$, $w(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектор-функції, $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $\xi_j(t,\varepsilon)$ — скалярні функції, які зображаються формальними розвиненнями

$$
\begin{aligned}
&u_i(t,\varepsilon)=\mu^{-(p-1)}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k u_k^{(i)}(t)\ ,\quad i=\overline{1,p}\ ,\\
&\lambda_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k^{(i)}(t)\ ,\\
&v_j(t,\varepsilon)=\nu^{-(q-2)}\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k v_k^{(j)}(t)\ ,\quad j=\overline{1,q}\ ,\\
&\xi_j(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu^k\xi_k^{(j)}(t)\ ,\\
&w(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k(t)\ ,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

в яких $\mu=\sqrt[p]{\varepsilon}$, $\nu=\sqrt[q-1]{\varepsilon}$.

Підставивши (11) в (1) і врахувавши (12), прирівняємо вирази при однакових експонентах. Врахувавши початкову умову (2), матимемо

$$
\begin{gathered}
\mu^{hp}B\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(u_k^{(i)}(t)\right)'+B\left(\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k^{(i)}(t)\right)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k u_k^{(i)}(t)=\\
=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{kp}A_k(t)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k u_k^{(i)}(t)\ ,\qquad i=\overline{1,p}\ ,
\end{gathered}
\tag{13}
$$

$$
\begin{gathered}
\nu^{h(q-1)}B\sum_{k=1}^{\infty}\nu^k\xi_k^{(j)}(t)\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k\left(v_k^{(j)}(t)\right)'+B\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k v_k^{(j)}(t)=\\
=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^{k(q-1)}A_k(t)\sum_{k=1}^{\infty}\nu^k\xi_k^{(j)}(t)\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k v_k^{(j)}(t)\ ,\qquad j=\overline{1,q-1}\ ,
\end{gathered}
\tag{14}
$$

$$\varepsilon^h B\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\,(w_k(t))' = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_k(t)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(t)\,, \tag{15}$$

$$\mu^{-(p-1)}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k u_k^{(i)}(0) + \nu^{-(q-2)}\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k v_k^{(j)}(0) +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k(0) = x_0\,. \tag{16}$$

Покажемо, що з цієї системи рівнянь можна послідовно визначити будь-які коефіцієнти формальних розвинень (12).

Розглянемо кожне з рівнянь окремо. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях μ в рівнянні (13), одержимо

$$(A_0-\lambda_0 B)\,u_k^{(i)} = b_k^{(i)}\,, \qquad k=0,1,\ldots\,; \quad i=\overline{1,p}\,, \tag{17}$$

де

$$b_k^{(i)}(t) = \sum_{s=1}^{k}\lambda_s^{(i)} B u_{k-s}^{(i)} + g_k^{(i)}\,, \qquad k=0,1,\ldots\,; \qquad i=\overline{1,p}\,, \tag{18}$$

$$g_k^{(i)}(t) = B\left(u_{k-hp}^{(i)}\right)' - \sum_{s=1}^{[k/p]} A_s u_{k-ps}^{(i)}\,, \quad k=p,p+1,\ldots\,; \quad i=\overline{1,p} \tag{19}$$

(символом $[a]$ позначено цілу частину числа a).

Рівняння (17) розв’язні відносно векторів $u_k^{(i)}(t)$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\left(b_k^{(i)},\psi\right) = 0\,, \quad k=0,1,\ldots\,; \quad i=\overline{1,p}\,. \tag{20}$$

При виконанні цієї умови вектори $u_k^{(i)}(t)$ знаходимо за формулою

$$u_k^{(i)}(t) = H(t)\,b_k^{(i)}(t) + C_k^{(i)}\varphi\,, \qquad k=0,1,\ldots\,; \quad i=\overline{1,p}\,, \tag{21}$$

де $C_k^{(i)}$ — сталі скалярні множники, які підлягають визначенню.

Підставивши (21) в (18), як і в [1], дістанемо формули для векторів $b_k^{(i)}$ і $u_k^{(i)}$, які можна довести методом математичної індукції:

$$b_k^{(i)}(t) = \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s} C_s^{(i)} P_j^{k-s}(\lambda^{(i)})\,B(HB)^{j-1}\varphi +$$

$$+\sum_{s=0}^{k-p}\sum_{j=0}^{k-p-s} P_s^{k-p-j}(\lambda^{(i)})\,(BH)^s g_{p+j}^{(i)}\,, \tag{22}$$

$$u_k^{(i)}(t) = \sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-s} C_s^{(i)} P_j^{k-s}(\lambda^{(i)})\,(HB)^j\varphi +$$

$$+\sum_{s=0}^{k-p}\sum_{j=0}^{k-p-s} P_s^{k-p-j}(\lambda^{(i)})\,H(BH)^s g_{p+j}^{(i)}\,, \tag{23}$$

де $g_k^{(i)}(t)$ визначаються за формулою (19), символом $P_j^s(\lambda^{(i)})$ позначено вираз

$$P_j^s(\lambda^{(i)}) = \sum_{k_1+\dots+k_j=s} \lambda_{k_1}^{(i)}\lambda_{k_2}^{(i)}\dots\lambda_{k_j}^{(i)}\,.$$

Тут підсумовування ведеться за всіма можливими наборами j натуральних індексів $k_1, k_2, \dots, k_j$, сума яких дорівнює s. Крім того, за означенням покладемо

$$P_0^0(\lambda^{(i)}) = 1, \quad P_0^k(\lambda^{(i)}) = 0 \ \text{ при } \ k \neq 0\,.$$

Аналізуючи формулу (22) і беручи до уваги (9) і (10), приходимо до висновку, що при $k < p$ умова (20) виконується. При $k = p$, згідно з (9), (10) і (19), ця умова запишеться у вигляді

$$C_0^{(i)}\left[\left(\lambda_1^{(i)}\right)^p + (K_1\varphi, \psi)\right] = 0\,, \tag{24}$$

де

$$K_s = \delta_{s,h} B\,\frac{d}{dt} - A_s\,, \quad s = 1, 2, \dots\,.$$

Припустимо, що

$$(K_1\varphi, \psi) = \delta_{h,1}(B\varphi', \psi) - (A_1\varphi, \psi) \neq 0 \quad \forall\, t \in [0; T]\,. \tag{25}$$

Тоді з рівняння (20) знайдемо функції $\lambda_1^{(j)}(t)$:

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[p]{(K_1\varphi, \psi)}\ \exp\left(i\,\frac{\arg(K_1\varphi, \psi) + 2\pi(j-1)}{p}\right), \qquad j = \overline{1, p}\,. \tag{26}$$

При $k = p + 1$ умову (20) записуємо у вигляді

$$C_0^{(i)} P_p^{p+1}\left(\lambda^{(i)}\right) + C_1^{(i)}\left(\lambda_1^{(i)}\right)^p + C_0^{(i)}\lambda_1^{(i)}\left((K_1HB + BHK_1)\varphi, \psi\right) +$$

$$+C_1^{(i)}(K_1\varphi, \psi) = 0\,,$$

або, враховуючи (21), маємо

$$p\lambda_2^{(i)}\left(\lambda_1^{(i)}\right)^{p-1} + \lambda_1^{(i)}\left((K_1HB + BHK_1)\varphi, \psi\right) = 0\,.$$

Звідси визначаються функції $\lambda_2^{(i)}(t)$:

$$\lambda_2^{(i)}(t) = -\frac{((K_1HB + BHK_1)\varphi, \psi)}{p(\lambda_1^{(i)})^{p-2}}\,, \quad i = \overline{1, p}\,.$$

Використовуючи умову (20), аналогічно можна знайти будь-яку функцію $\lambda_k^{(i)}(t),\ k = 3, 4, \ldots\ ; i = \overline{1,p}$.

Таким чином, використовуючи умову (20), можна знайти будь-які коефіцієнти розвинення для функцій $\lambda_i(t,\varepsilon)$, причому ці коефіцієнти не залежать від множників $C_k^{(i)}$, $k = 0, 1, \ldots\ ; i = \overline{1,p}$. Одночасно за формулами (23) визначаються й коефіцієнти відповідних розвинень для вектор-функцій $u_i(t,\varepsilon)$.

Розглянемо рівняння (14) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ν:

$$Bv_k^{(j)}(t) = a_k^{(j)}(t)\,, \quad j = \overline{1, q-1}\,, \tag{27}$$

де

$$a_k^{(j)}(t) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-1}{q-1}\right]} \sum_{m=0}^{k-s(q-1)-1} A_s(t) v_m^{(j)}(t) \xi_{k-m-s(q-1)}^{(j)}(t) - \\ - \sum_{s=1}^{k-h(q-1)} B(t)\xi_s^{(j)}(t) \left(v_{k-s-h(q-1)}(t)\right)'\,.$$

Рівняння (27) розв’язні відносно векторів $v_k^{(j)}(t),\ j = \overline{1, q-1}$, тоді і тільки тоді, коли вектори $a_k^{(j)}(t),\ j = \overline{1, q-1}$, ортогональні до вектора $\widetilde{\psi}$:

$$\left(a_k^{(j)}(t), \widetilde{\psi}\right) = 0\,, \qquad k = 0, 1, \ldots\ ; \quad i = \overline{1, q-1}\,. \tag{28}$$

При виконанні цієї умови вектори $v_k^{(j)}(t)$ знаходимо за формулою

$$v_k^{(j)}(t) = G(t) a_k^{(j)}(t) + \widetilde{C}_k^{(j)} \widetilde{\varphi}\,, \qquad j = \overline{1, q-1}\,, \tag{29}$$

де $\widetilde{C}_k^{(j)},\ k = 0, 1, \ldots;\ j = \overline{1, q-1}$, — сталі скалярні множники, які підлягають визначенню,

$$\begin{gathered} a_k^{(j)}(t) = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{k-s} \widetilde{C}_s^{(j)} P_i^{k-s}(\xi^{(j)}) A_0(t) (GA_0)^{i-1} \widetilde{\varphi} + \\ + \sum_{s=0}^{k-q} \sum_{i=0}^{k-s-q} P_i^{k-s-q}(\xi^{(j)}) (GA_0)^i g_{q+s}^{(j)}(t)\,, \\ g_k^{(j)}(t) = \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-1}{q-1}\right]} \sum_{m=0}^{k-s(q-1)-1} A_s(t) v_m^{(j)}(t) \xi_{k-m-s(q-1)}^{(j)}(t) - \\ - \sum_{s=1}^{k-h(q-1)} B(t) \xi_s^{(j)}(t) \left(v_{k-s-h(q-1)}(t)\right)'\,. \end{gathered} \tag{30}$$

Враховуючи формули (30), а також (10), (12), приходимо до висновку, що при $k < q-1$ умова (28) виконується. Припустимо, що

$$\left(K_1 \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\right) = \delta_{h,1} \left(B \widetilde{\varphi}', \widetilde{\psi}\right) - \left(A_1 \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\right) \neq 0 \quad \forall\ t \in [0; T]\,. \tag{31}$$

Тоді при $k = q-1$, згідно з (9), (10), (28) і (30), знайдемо функції $\xi_1^{(j)}(t)$:

$$\xi_1^{(j)}(t) = \sqrt[q-1]{\left|(K_1\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})\right|}\ \exp\left(i\,\frac{\arg(K_1\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) + 2\pi(j-1)}{q-1}\right), \quad j = \overline{1, q-1}\,. \tag{32}$$

При $k = q$ з умови (28) визначаються функції $\xi_2^{(j)}(t)$:

$$\xi_2^{(j)}(t) = \frac{\widetilde{g}_{q+1}^{(j)}(t)}{q(\xi_1^{(j)})^{q-1} + (A_1\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})}\,, \qquad j = \overline{1, q-1}\,,$$

де

$$\widetilde{g}_{q+1}^{(j)} = \left(\left(\xi_1^{(j)}\right)^2 GA_0K_1\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\right) + \left(\xi_1^{(j)} B\delta_{1,h}\,\frac{d}{dt}\,GA_0\xi_1^{(j)}\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\right) -$$
$$- \left(\left(\xi_1^{(j)}\right)^2 A_1GA_0\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\right)\,.$$

Використовуючи умову (28), аналогічно можна знайти будь-яку функцію $\xi_k^{(j)}(t)$, $k = 3, 4, \ldots\,;\ j = \overline{1, q-1}$.

Таким чином, використовуючи умову (28), можна знайти будь-які коефіцієнти розвинення для функцій $\xi_i(t, \varepsilon)$, причому ці коефіцієнти не залежать від множників $\widetilde{C}_k^{(j)}$, $k = 0, 1, \ldots\,;\ j = \overline{1, q-1}$. Одночасно за формулами (29) визначаються й коефіцієнти відповідних розвинень для вектор-функцій $v_i(t, \varepsilon)$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε в рівнянні (15), маємо

$$A_0(t)\, w_k(t) = d_k(t)\,, \quad k = 0, 1, \ldots\,,$$

де

$$d_k(t) = B(t)\,(w_{k-h}(t))' - \sum_{s=1}^{k} A_s(t) w_{k-s}(t) - f_k(t)\,. \tag{33}$$

Оскільки за припущенням $\det A_0(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in [0; T]$, то звідси знаходимо

$$w_k(t) = A_0^{-1}(t)\, d_k(t)\,, \quad k = 0, 1, \ldots\,. \tag{34}$$

Розглянемо тепер рівняння (16). Покладемо $p = q-1$. Тоді, прирівнюючи в (16) коефіцієнти при однакових степенях μ, дістаємо

$$\sum_{i=1}^{p} u_k^{(i)}(0) + \sum_{j=1}^{q-1} v_k^{(j)}(0) + w_{\frac{k-(p-1)}{p}}(0) = \delta_{k,p-1}x_0\,, \quad k = 0, 1, \ldots\,, \tag{35}$$

де за означенням покладаємо $v_{m/p} = 0$, якщо m не ділиться на p. Підставляючи в (35) формули (23), (29) і беручи до уваги лінійну незалежність векторів $(HB)^i\varphi$, $i = \overline{0, p-1}$, $(GA_0)^j\widetilde{\varphi}$, $j = \overline{0, q-1}$, при $k < p-1$ маємо

$$\begin{gathered} \sum_{s=0}^{k-j}\sum_{i=1}^{p} C_s^{(i)} P_j^{k-s}(\lambda^{(i)})(HB)^j\varphi = 0\,, \\ \sum_{s=0}^{k-j}\sum_{i=1}^{p} \widetilde{C}_s^{(i)} P_j^{k-s}(\xi^{(i)})(GA_0)^j\widetilde{\varphi} = 0\,, \quad j = \overline{0, p-2}\,. \end{gathered} \tag{36}$$

При $k = p-1$ рівняння (35) запишеться у вигляді

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{p-1-s} C_s^{(i)} P_k^{p-1-s}(\lambda^{(i)})(HB)^k\varphi+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{p-1-s} \widetilde{C}_s^{(i)} P_k^{p-1-s}(\xi^{(i)})(GA_0)^k\widetilde{\varphi} = x_0 - w_0(0)\,. \tag{37}$$

Розкладемо за базисом $(HB)^i\varphi,\ i=\overline{0,p-1},\ (GA_0)^j\widetilde{\varphi},\ j=\overline{0,q-1}$, вектор $x_0 - w_0(0)$:

$$x_0 - w_0(0) = \sum_{i=1}^{p}\Big(B(0)\,(x_0 - w_0(0))\,,\psi_{p+1-i}\Big)\,\varphi_i+$$
$$+\sum_{i=1}^{q}\Big(A_0(0)\,(x_0 - w_0(0))\,,\widetilde{\psi}_{q+1-i}\Big)\,\widetilde{\varphi}_i\,.$$

Тоді рівність (37) набере вігляду

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{p-1-s} C_s^{(i)} P_k^{p-1-s}(\lambda^{(i)})(HB)^k\varphi+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{p-1-s} \widetilde{C}_s^{(i)} P_k^{p-1-s}(\xi^{(i)})(GA_0)^k\widetilde{\varphi} =$$
$$=\sum_{i=1}^{p}\Big(B(0)\,(x_0 - w_0(0))\,,\psi_{p+1-i}\Big)(HB)^{i-1}\varphi+$$
$$+\sum_{i=1}^{q}\Big(A_0(0)\,(x_0 - w_0(0))\,,\widetilde{\psi}_{q+1-i}\Big)(GA_0)^{i-1}\widetilde{\varphi}\,,$$

звідки завдяки лінійній незалежності базисних векторів матимемо

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{p-1-k} C_s^{(i)} P_k^{p-1-s}(\lambda^{(i)}) = \Big(B(0)\,(x_0 - w_0(0))\,,\psi_{p-k}\Big)\,,\quad k=\overline{0,p-1}\,,\\
&\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{p-1-k} \widetilde{C}_s^{(i)} P_k^{p-1-s}(\xi^{(i)}) = \Big(A_0(0)\,(x_0 - w_0(0))\,,\psi_{q-k}\Big)\,,\quad k=\overline{0,q-2}\,;\\
&\Big(A_0(0)\,(x_0 - w_0(0))\,,\widetilde{\psi}\Big) = 0\,.
\end{aligned} \tag{38}$$

Взявши останні з рівнянь (36), (38), дістанемо дві системи рівнянь:
перша — для визначення сталих $C_0^{(i)},\ \ i=\overline{1,p}$:

$$\sum_{i=1}^{p} C_0^{(i)}\left[\lambda_1^{(i)}\right]^k = 0\,,\qquad k=\overline{0,p-2}\,,$$

$$\sum_{i=1}^{p} C_0^{(i)}\left[\lambda_1^{(i)}\right]^{p-1} = \Big(B(0)\,(x_0 - w_0(0))\,,\psi_1\Big)\,;$$

друга — для визначення сталих $\widetilde{C}_0^{(j)}, \quad j = \overline{1, q-1}$:

$$\sum_{j=1}^{p} \widetilde{C}_0^{(j)} \left[\xi_1^{(j)}\right]^k = 0 \,, \qquad k = \overline{0, p-2} \,, \tag{39}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \widetilde{C}_0^{(j)} \left[\xi_1^{(j)}\right]^{p-1} = \left(A_0(0)\,(x_0 - w_0(0))\,, \widetilde{\psi}_2\right) . \tag{40}$$

Позначивши

$$C_0 = \mathrm{col}\,\left(C_0^{(1)}, C_0^{(2)}, \ldots, C_0^{(p)}\right)\,,$$

$$\widetilde{C}_0 = \mathrm{col}\,\left(\widetilde{C}_0^{(1)}, \widetilde{C}_0^{(2)}, \ldots, \widetilde{C}_0^{(q-1)}\right)\,,$$

$$m_0 = \mathrm{col}\left(0, \ldots, 0, B(0)(x_0 - w_0(0)), \psi_1\right)\,,$$

$$\widetilde{m}_0 = \mathrm{col}\left(0, \ldots, 0, (A_0(x_0 - w_0(0)), \widetilde{\psi}_2\right)\,,$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \lambda_1^{(2)} & \ldots & \lambda_1^{(p)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \left[\lambda_1^{(1)}\right]^{p-1} & \left[\lambda_1^{(2)}\right]^{p-1} & \ldots & \left[\lambda_1^{(p)}\right]^{p-1} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \ldots & \xi_1^{(q-1)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \left[\xi_1^{(1)}\right]^{q-2} & \left[\xi_1^{(2)}\right]^{q-2} & \ldots & \left[\xi_1^{(q-1)}\right]^{q-2} \end{bmatrix},$$

запишемо ці системи у вигляді

$$W C_0 = m_0 \,, \qquad \widetilde{W} \widetilde{C}_0 = \widetilde{m}_0 \,.$$

Оскільки визначники цих систем є визначниками Вандермонда [7], то, згідно з (26), (32), при виконанні умов (25), (31) $\det W \neq 0, \ \det \widetilde{W} \neq 0$. Отже,

$$C_0 = W^{-1} m_0 \,, \qquad \widetilde{C}_0 = \widetilde{W}^{-1} \widetilde{m}_0 \,.$$

Що стосується рівності (40), то вона визначає умову, яку повинен задовольняти початковий вектор x_0 для існування розв'язку даної задачі Коші. З урахуванням (33), (34) цю умову можна записати у вигляді

$$\left(A_0(0)\, x_0 + f_0(0), \widetilde{\psi}\right) = 0 \,.$$

Прирівнюючи в формулі (35) вирази при μ^r, отримуємо в загальному вигляді формули для визначення коефіцієнтів $C^{(i)}_{r-p+1}$, $\widetilde{C}^{(j)}_{r-q+2}$:

$$C^{(i)}_{r-p+1} = W^{-1} m_{r-p+1}\ , \quad i = \overline{1,p}\ ,$$
$$\widetilde{C}^{(j)}_{r-q+2} = \widetilde{W}^{-1} \widetilde{m}_{r-q+2}\ , \quad j = \overline{1,q-1}\ ,$$

де

$$m_{r-p+1} = \operatorname{col}\Bigg(\Big(B(0)p_{r-p+1}, \psi_p\Big), \Big(B(0)p_{r-p+2}, \psi_{p-1}\Big) - \\ - \sum_{s=0}^{r-p}\sum_{i=1}^{p} C^{(i)}_s P_1^{r-p+2-s}(\lambda^{(i)}), \ldots, \Big(B(0)p_r, \psi_1\Big) - \\ - \sum_{s=0}^{r-p}\sum_{i=1}^{p} C^{(i)}_s P_{p-1}^{r-s}(\lambda^{(i)})\Bigg)\ ,$$

$$\widetilde{m}_{r-q+2} = \operatorname{col}\Bigg(\Big(A_0(0)p_{r-q+2}, \widetilde{\psi}_q\Big), \Big(A_0(0)p_{r-q+3}, \widetilde{\psi}_{q-1}\Big) - \\ - \sum_{s=0}^{r-q+1}\sum_{j=1}^{q-1} \widetilde{C}^{(j)}_s P_1^{r-q-s+3}(\xi^{(j)}), \ldots, \Big(A_0(0)p_r, \widetilde{\psi}_2\Big) - \\ - \sum_{s=0}^{r-q+1}\sum_{j=1}^{q-1} \widetilde{C}^{(j)}_s P_{q-2}^{r-s}(\xi^{(j)})\Bigg)\ ,$$

$$p^{(i)}_r(t) = -\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{r-p}\sum_{s=0}^{r-p-j} P_s^{r-p-j}(\lambda^{(i)}) H (HB)^s g^{(i)}_{p+j} - \\ - \sum_{i=1}^{q-1}\sum_{j=0}^{r-q}\sum_{s=0}^{r-q-j} P_s^{r-q-j}(\xi^{(i)}) G (GA_0)^s g^{(i)}_{q+j}\ ,$$

$g^{(i)}_m(t)$ обчислюється за формулою (30). А з рівності

$$\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{s=0}^{r-q+1} \widetilde{C}^{(i)}_s P_{q-1}^{r-s}(\xi^{(i)}) = \Big(A_0(0)p^{(i)}_r, \widetilde{\psi}\Big)$$

одержимо умову, яку повинен задовольняти початковий вектор x_0:

$$\Big(A_k(0)\, x_0 + f_k(0), \widetilde{\psi}\Big) = 0\ , \quad k = 0, 1, \ldots\ . \tag{41}$$

Підсумовуючи наведені міркування, одержуємо таку теорему.

Теорема. *Нехай виконуються умови 1 – 3 і серед власних значень в'язки $L(t,\lambda)$ немає нульового. Тоді якщо виконуються умови (26), (32) і вектор x_0 задовольняє співвідношення (41), то задача Коші (1), (2) має на даному відрізку $[0;T]$ формальний розв'язок вигляду (11), де $u_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,p}$, $v_j(t,\varepsilon)$, $j = \overline{1,q-1}$, $w(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектор-функції, $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,p}$, $\xi_j(t,\varepsilon)$, $j = \overline{1,q-1}$, — скалярні функції, які зображаються формальними розвиненнями (12), в яких $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$, $\nu = \sqrt[q-1]{\varepsilon}$.*

Зазначимо, що умова (41), яку повинен задовольняти початковий вектор x_0, цілком узгоджується з теоремою про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для виродженої лінійної системи, доведеною в [4].

Методами робіт [1, 8] можна показати, що формальний розв'язок задачі (1), (2), який будується за розробленим алгоритмом, є асимптотичним розвиненням точного розв'язку даної задачі.

1. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Выща шк., 1991. — 207 с.

2. *Жукова Г.С.* Асимптотика решений одного класса линейных систем с вырожденной матрицей при производной. — Киев, 1990. — 24 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.36).

3. *Яковець В.П.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. — Київ, 1993. — 32 с.

4. *Самойленко А.М., Яковец В.П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Докл. НАН Украины. — 1993. — № 4. — С. 10 – 15.

5. *Яковець В.П.* Деякі властивості вироджених лінійних систем // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 9. — С. 1278 – 1296.

6. *Старун И.И.* Система с вырожденной матрицей при производной // Там же. — 1990. — **42**, № 11. — С. 1535 – 1537.

7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

8. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Выща шк., 1989. — 287 с.

Одержано 10.10.98