УДК 517.51, 517.98

НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ВІД БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У σ-МЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРАХ

В.К. Маслюченко

Чернівец. ун-т,
Україна, 274012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
e-mail: osobchuk@math.chdu.cv.ua

It is proved theorems on joint continuity of separately continuous mappings $f\colon X_1 \times \cdots \times X_{n+1}$ where X_1 is topological space, $X_2, \ldots, X_n$ are first countable, X_{n+1} is first countable or metrizable compact and Z is completely regular space which is representable as a union of some increasing sequence of its closed metrizable subspaces Z_m and each convergent sequence in Z is contained in some subspace Z_m.

Встановлено теореми про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень, що задані на добутках $X_1 \times \cdots \times X_{n+1}$ топологічних просторів, з яких $X_2, \ldots, X_n$ задовольняють першу аксіому зліченності, а X_{n+1} — або такий самий, або метризовний компакт, і набувають значень у цілком регулярних просторах Z, які подаються у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів Z_m, причому кожна збіжна в Z послідовність лежить у деякому допграничному просторі Z_m.

1. Якщо не враховувати приклад Гофмана – Йоргенсена [1] нарізно неперервного і скрізь розривного відображення квадрата $[-1,1]^2$ у тихоновський куб $[-1,1]^{[-1,1]^2}$, то можна вважати, що вивчення множини $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень f зі значеннями в неметризовних хаусдорфових просторах було розпочате в роботах [2, 3]. Там встановлено, що для просторів берівського X і топологічного Y, який задовольняє першу аксіому зліченності, кожне нарізно неперервне відображення f: $X \times Y \to Z$ зі значеннями у просторі Z, що є строгою індуктивною границею зростаючої послідовності метризовних локально опуклих просторів Z_m, які замкнені в Z, на будь-якій горизонталі $X \times \{y\}$ буде мати скрізь щільну множину точок сукупної неперервності. В [4] показано, що коли до того ж Y є метризовним компактом, то існує така скрізь щільна в X множина A, що $A \times Y \subseteq C(f)$. Основним інструментом при цьому була теорема Дьєдонне – Шварца [5; 6, с. 78], яка гарантує, що кожна обмежена множина в індуктивній границі Z розглянутого типу обов'язково лежить у деякому допграничному просторі Z_m і обмежена в ньому. Насправді досить було слабшої властивості, яка полягає в тому, що множина точок кожної збіжної в Z послідовності міститься у деякому Z_m, і рівносильна умові, що будь-яка обмежена в Z множина лежить у деякому Z_m, але не обов'язково обмежена в ньому. Цю останню властивість будуть мати будь-які індуктивні границі Z зростаючих послідовностей локально опуклих просторів Z_m, які є замкненими в Z, а серед них є й такі, що не мають властивості Дьєдонне – Шварца [7]. Це створило ілюзію, що доведення сформульованих вище теорем про нарізно неперервні відображення справедливі і для довільних індуктивних границь Z зростаючих послідовностей метризовних локально опуклих і замкнених в Z просторів, і саме для таких індуктивних границь була сформульована відповідна теорема в [3]. Але оскільки при доведенні цієї теореми в [3] використовується те, що топологія простору Z_m збігається з топологією Z_m як підпростору Z, то воно справедливе лише для строгих індуктивних границь, і тому питання про справедливість наведених теорем у вказаній загальнішій ситуації залишається відкритим, адже в цьому випадку топологія в Z_m може бути строго сильнішою від індукованої топології. Зауважимо, що властивість Дьєдонне – Шварца і її послаблення вивчались і в подальших роботах [8 – 10].

У роботі [11] у зв'язку з дослідженням питання про берівську класифікацію нарізно неперервних функцій f: $X \times Y \to \mathbf{R}$ було введено клас *σ-метризовних просторів*, тобто таких топологічних просторів Z, які подаються у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів Z_m. В цей клас входять не лише строгі індуктивні границі зростаючих послідовностей метризовних локально опуклих просторів, а й хаусдорфові локально опуклі простори, наділені своєю слабкою топологією, якщо тільки спряжені з ними простори сепарабельні і метризовні відносно сильної топології. Після цього виникло природне бажання перенести згадані вище теореми з [3, 4] на відображення зі значеннями у σ-метризовних просторах. Застосований там метод спонукав до певного підсилення поняття σ-метризовності і воно невдовзі з'явилося в [12] під назвою *сильна σ-метризовність*, яка вимагає для топологічного простору Z наявності такого вичерпування зростаючою послідовністю замкнених метризовних підпрострів Z_m, що множина точок кожної збіжної в Z послідовності обов'язково міститься в деякому дограничному просторі Z_m. З'ясувалося, що вказані вище два основні класи σ-метризовних локально опуклих просторів входять і в цей вужчий клас і на відображення зі значеннями у сильно σ-метризовних просторах переносяться результати з [3, 4]. Тим самим було виконано побажання М. М. Зарічного і А. М. Плічка, висловлене ними після доповіді автора на семінарі В. Е. Лянце у Львові в 1990 р.

Натхненний своїми недавніми успіхами у розв'язанні задачі Діні для нарізно неперервних функцій багатьох змінних, які задані на добутках просторів, що задовольняють певні умови зліченності, і набувають значень у метризовних просторах [13], автор поставив собі за мету досягти хоча б деякої завершеності і для відображень зі значеннями у сильно σ-метризовних просторах, розглянувши замість двох випадок багатьох змінних. Виявилося, що це можливо зробити по суті тими ж методами, в яких основну роль відіграють поняття квазінеперервності і теорема Банаха про категорію, і саме така робота здійснюється в даному дослідженні. Зауважимо, що при цьому і теореми для двох змінних подаються тут у кращій, ніж в [12], редакції, яка зумовлена пильнішим аналізом їх доведення. В цьому є частка праці і В. В. Михайлюка, якому автор щиро вдячний за участь у обговореннях і корисні зауваження. Автор дякує також О. В. Собчукові за цікаві доповнення і велику допомогу в оформленні роботи.

2. Нагадаємо, що відображення $f: X \to Y$ називається *квазінеперервним*, якщо для кожної точки $x \in X$ і для будь-яких околів U і V точок x і $f(x)$ у просторах X і Y відповідно існує така відкрита непорожня множина G в X, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Нескладно перевірити [14], що відображення $f: X \to Y$ буде квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли $f(G) \subseteq \overline{f(A)}$ для кожної відкритої в X множини G і кожної щільної в G множини A. Наступне твердження дозволяє зводити дослідження відображень на квазінеперервність до дійснозначного випадку.

Теорема 1. *Якщо Y — цілком регулярний простір, то для довільного топологічного простору X відображення $f: X \to Y$ буде квазінеперервним тоді і лише тоді, коли для кожної неперервної функції φ: $Y \to \mathbf{R}$ функція $g = \varphi \circ f: X \to \mathbf{R}$ є квазінеперервною.*

Доведення. Оскільки композиція неперервного і квазінеперервного відображень є квазінеперервною, то *необхідність* вказаної умови зрозуміла. Для доведення *достатності* припустимо, що f не є квазінеперервним. Тоді існує точка $x_0 \in X$, окіл V точки $y_0 = f(x_0)$ у просторі Y і відкритий окіл U точки x_0 у просторі X такі, що множина $A = U \cap f^{-1}(Y \setminus V)$ щільна в U. Побудуємо неперервну функцію $\varphi : Y \to \mathbf{R}$, для якої $\varphi(y_0) = 1$ і $\varphi(y) = 0$ на $Y \setminus V$, і розглянемо функцію $g = \varphi \circ f$. Оскільки $g(x_0) = \varphi(y_0) = 1$, $g(x) = 0$ для кожного $x \in A$ і множина A щільна в U, то функція $g : X \to \mathbf{R}$ не є квазінеперервною.

3. Через $P(X, Y)$ позначимо сукупність всіх відображень $f : X \to Y$, що мають властивість P. Для відображення $f : X \times Y \to Z$, точки $(x, y) \in X \times Y$ і деяких властивостей P і Q відображень ми покладаємо

$$f_y(x) = f^x(y) = f(x, y) ,$$

$$X_Q(f) = \{x \in X : f^x \in Q(Y, Z)\}$$

і

$$Y_P(f) = \{y \in Y : f_y \in P(X, Z)\} .$$

Через $PQ(X \times Y, Z)$ позначається сукупність відображень $f : X \times Y \to Z$, для яких $X_Q(f) = X$ і $Y_P(f) = Y$. Для топологічного простору Y символом $\overline{P}Q(X \times Y, Z)$ позначається сукупність відображень $f : X \times Y \to Z$, для яких $X_Q(f) = X$ і $\overline{Y_P(f)} = Y$. Як звичайно, літерою C ми позначаємо властивість неперервності, а літерою K — властивість квазінеперервності. Для нас важливу роль буде відігравати сукупність $\overline{K}C(X \times Y, Z)$ відображень $f : X \times Y \to Z$, які квазінеперервні відносно першої змінної для всіх y з деякої скрізь щільної в Y множини $B = Y_K(f)$ і неперервні відносно другої змінної для всіх $x \in X$. Символом $C(f)$ ми позначаємо множину точок неперервності відображення, а через $D(f)$ — множину його точок розриву. Для відображення f, заданого на добутку топологічних просторів X і Y, яке набуває значень у топологічному просторі Z, неперервність завжди означатиме його сукупну неперервність, тобто неперервність відносно топології добутку на $X \times Y$. Те ж саме стосується і квазінеперервності. Крім того, для таких відображень f і точки $y \in Y$ ми покладаємо

$$C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\} ,$$

$$D_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in D(f)\} ,$$

$$C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$$

і

$$D_Y(f) = p_X(D(f)) ,$$

де p_X — проекція добутку $X \times Y$ на X. Зрозуміло, що

$$X = C_y(f) \cup D_y(f) = C_Y(f) \cup D_Y(f) .$$

Ми будемо використовувати такий результат [15, 16, 12].

Теорема 2. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — метризовний топологічний простір і $f \in \overline{K}C(X \times Y, Z)$. Тоді:*

1) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то множина $C_y(f)$ залишкова в X для кожного $y \in Y$;

2) якщо Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(f)$ залишкова в X.

4. Нагадаємо ще раз, що топологічний простір Z називається *сильно σ-метризовним* [12], якщо його можна подати у вигляді об'єднання зростаючої послідовності замкнених метризовних підпросторів Z_m так, що для кожної збіжної в Z послідовності $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ існує такий номер m, що $\{z_k : k \in \mathbf{N}\} \subseteq Z_m$. Таку послідовність підпросторів Z_m назвемо *вичерпуванням* простору Z. Наступне твердження нескладно виводиться з означення сильної σ-метризовності (див. [12]).

Теорема 3. *Якщо Y — топологічний простір, що задовольняє першу аксіому зліченності, Z — сильно σ-метризовний простір з вичерпуванням (Z_m) і $g : Y \to Z$ — неперервне відображення, то для кожної точки $y \in Y$ існують її окіл V в Y і номер m такі, що $g(V) \subseteq Z_m$. Якщо до того ж Y компактний, то існує таке m, що $g(Y) \subseteq Z_m$.*

5. Займемося тепер перенесенням теореми 2 на відображення зі значеннями у сильно σ-метризовних просторах.

Теорема 4. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — сильно σ-метризовний простір і $f \in \overline{K}C(X \times Y, Z)$. Тоді:*

1) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то множина $C_y(f)$ залишкова в X для кожного $y \in Y$;

2) якщо Y — метризовний компакт, то множина $C_Y(f)$ залишкова в X.

Доведення. На основі теореми Банаха про категорію [17, с. 87 – 90] візьмемо в просторі X залишкову і відкриту підмножину T, яка буде берівським простором в індукованій топології, і покладемо $g = f|_{T \times Y}$. Зрозуміло, що $g \in \overline{K}C(T \times Y, Z)$ і $C(g) = C(f) \cap (T \times Y)$. Досить довести відповідні твердження для g, звідки відразу буде випливати їх справедливість і для f. Тому ми можемо вважати, що простір X берівський.

1. Нехай $y_0 \in Y$ і $\{V_k : k \in \mathbf{N}\}$ — база відкритих околів точки y_0 в Y така, що $V_k \supseteq V_{k+1}$ для кожного $k \in \mathbf{N}$, і (Z_m) — деяке вичерпування сильно σ-метризовного простору Z. Покладемо

$$A_n = \{x \in X : f^x(V_n) \subseteq Z_n\}$$

і покажемо, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Справді, якщо $x \in X$, то на основі теореми 3 існує окіл V точки y_0 і число $m \in \mathbf{N}$ такі, що $f^x(V) \subseteq Z_m$. Візьмемо таке $k \in \mathbf{N}$, що $V_k \subseteq V$, і покладемо $n = \max\{k, m\}$. Тоді $V_n \subseteq V_k$ і $Z_m \subseteq Z_n$, отже, $f^x(V_n) \subseteq Z_n$, тобто $x \in A_n$.

Для замкнених множин $F_n = \overline{A_n}$ ми, звичайно, також будемо мати $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Оскільки X берівський, то відкрита множина $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, де $U_n = \operatorname{int} F_n$, буде скрізь щільною в X, а її доповнення $F = X \setminus G$ замкненим і ніде не щільним в X.

Покажемо, що $f(U_n \times V_n) \subseteq Z_n$. Нехай $B = Y_K(f)$ і $B_n = B \cap V_n$. Оскільки за умовою множина B скрізь щільна в Y, а за побудовою множина V_n відкрита, то $V_n \subseteq \overline{B}_n$. Крім того, $U_n \subseteq F_n = \overline{A_n}$. Візьмемо y з B_n. Оскільки відображення $f_y : X \to Z$ квазінеперервне, $f_y(A_n) \subseteq Z_n$ і множина Z_n замкнена в Z, то

$$f_y\left(U_n\right) \subseteq \overline{f_y\left(A_n\right)} \subseteq \overline{Z}_n = Z_n \ ,$$

отже, $f_y\left(U_n\right) \subseteq Z_n$ і, таким чином, $f\left(U_n \times B_n\right) \subseteq Z_n$. Візьмемо тепер x з U_n. Оскільки відображення $f^x : Y \to Z$ неперервне і $f^x(B_n) \subseteq Z_n$, то

$$f^x(V_n) \subseteq f^x(\overline{B}_n) \subseteq \overline{f^x(B_n)} \subseteq \overline{Z}_n = Z_n \ ,$$

звідки $f^x(V_n) \subseteq Z_n$, отже, $f(U_n \times V_n) \subseteq Z_n$.

Покладемо $g_n = f\,|_{U_n \times V_n}$. На основі доведеного g_n можна розглядати як відображення з $U_n \times V_n$ в Z_n. Наділимо множини U_n, V_n і Z_n індукованими топологіями. Зрозуміло, що простір V_n задовольняє першу аксіому зліченності, Z_n метризовний і $g_n \in \overline{K}C(U_n \times \times V_n, Z_n)$. Тоді, згідно з теоремою 2, множина $C_{y_0}(g_n)$ буде залишковою в U_n, а множина $D_{y_0}(g_n) = U_n \setminus C_{y_0}(g_n)$ — першої категорії в U_n, а значить, і в X. Оскільки множини U_n і V_n відкриті, то

$$D_{y_0}(f) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{y_0}(g_n)\right) \cup \left(D_{y_0}(f) \cap F\right) ,$$

звідки випливає, що $D_{y_0}(f)$ першої категорії, а $C_{y_0}(f)$ залишкова в X.

2. Покладемо

$$A_n = \left\{x \in X : \ f^x(Y) \subseteq Z_n\right\} , \qquad F_n = \overline{A_n} ,$$

$$U_n = \operatorname{int} F_n \ , \quad G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \ , \quad F = X \setminus G \ .$$

Як і раніше, на основі теореми 3 і беровості X одержимо $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, G — відкрита скрізь щільна і F — замкнена ніде не щільна множини в X. Покажемо, що $f(U_n \times \times Y) \subseteq Z_n$. Для $y \in B = Y_K(f)$ відображення f_y квазінеперервне, $U_n \subseteq \overline{A_n}$ і $f_y(A_n) \subseteq Z_n$, отже,

$$f_y(U_n) \subseteq \overline{f_y(A_n)} \subseteq \overline{Z}_n = Z_n \ , \quad \text{тобто} \quad f\left(U_n \times B\right) \subseteq Z_n \ .$$

Далі за умовою $\overline{B} = Y$ і відображення f^x неперервні для кожного x, тому при $x \in U_n$ будемо мати

$$f^x\left(Y\right) = f^x\left(\overline{B}\right) \subseteq \overline{f^x(B)} \subseteq \overline{Z}_n = Z_n \ ,$$

звідки одержуємо $f(U_n \times Y) \subseteq Z_n$.

Нехай $g_n = f\,|_{U_n \times Y}$. Тоді g_n можна розглядати як відображення зі значеннями в Z_n, і якщо U_n і Z_n наділити індукованими топологіями, то $g_n \in \overline{K}C(U_n \times Y, Z_n)$. Оскільки метризовний компакт задовольняє другу аксіому зліченності, то, згідно з теоремою 2, множина $C_Y(g_n)$ буде залишковою в U_n, а множина $D_Y(g_n) = U_n \setminus C_Y(g_n)$ — першої категорії в U_n, а значить, і в X. Оскільки

$$D_Y(f) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_Y(g_n)\right) \cup \left(D_Y(f) \cap F\right) ,$$

то і множина $D_Y(f)$ буде першої категорії в X, а множина $C_Y(f)$ — залишковою в X.

6. Щоб перейти до випадку багатьох змінних, нам буде потрібна ще одна теорема про квазінеперервність відображень з класу $\overline{K}C$. Будемо говорити, що відображення $f : X \times \times Y \to Z$ має *властивість Бера*, якщо для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f)$ скрізь щільна в X.

Теорема 5. *Нехай X, Y і Z — топологічні простори і $f \in \overline{K}C(X \times Y, Z)$. Тоді:*

1) якщо f має властивість Бера і Z цілком регулярний, то f квазінеперервне;

2) якщо X берівський, Y задовольняє першу аксіому зліченності і Z сильно σ-метризовний, то f має властивість Бера;

якщо до того ж Z цілком регулярний, то f квазінеперервне.

Доведення. 1. На основі теореми 1 твердження досить встановити при $Z = \mathbf{R}$. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, $W = U \times V$ — відкритий окіл точки p_0 в $X \times Y$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки f^{x_0} неперервне, то існує такий окіл V_0 точки y_0 в Y, що коливання $\omega_{f^{x_0}}(V_0) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ і $V_0 \subseteq V$. Візьмемо точку $y_1 \in Y_K(f) \cap V_0$, існування якої випливає з рівності $\overline{Y_K(f)} = Y$. На основі квазінеперервності f_{y_1} знайдемо відкриту непорожню множину G в X таку, що $G \subseteq U$ і коливання $\omega_{f_{y_1}, x_0}(G) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Але f має властивість Бера, отже, існує така точка $x_1 \in G$, що $p_1 = (x_1, y_1) \in C(f)$. Скориставшись неперервністю функції f в точці p_1, знайдемо такий її окіл в добутку $W_1 = U_1 \times V_1$, що $W_1 \subseteq W$ і $\omega_{f, p_1}(W_1) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. В такому разі для точок $p \in W_1$ будемо мати

$$|f(p) - f(p_0)| \leq |f(p) - f(p_1)| + |f(p_1) - f_{y_1}(x_0)| + |f^{x_0}(y_1) - f^{x_0}(y_0)| < \varepsilon \, ,$$

що і дає нам квазінеперервність f.

2. На основі теореми 4 множини $C_y(f)$ для кожного $y \in Y$ будуть залишковими в X, а значить, і скрізь щільними в X, оскільки X берівський.

3. Оскільки за доведеним вже твердженням 2 відображення f має властивість Бера, то за твердженням 1 воно буде квазінеперервним.

7. Перейдемо тепер до доведення основного результату.

Теорема 6. *Нехай X_k, $k = 1, \ldots, n+1$, і Z — топологічні простори, причому X_k при $2 \leq k \leq n$ задовольняють першу аксіому зліченності і Z — цілком регулярний і сильно σ-метризовний, E_k — скрізь щільні в X_k при $k = 2, \ldots, n+1$ множини і $f : X_1 \times \cdots \times X_{n+1} \to Z$ — відображення, яке квазінеперервне відносно першої змінної на множині $X_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{n+1}$ і неперервне відносно k-ї змінної на множині $X_1 \times \cdots \times X_k \times E_{k+1} \times \cdots \times E_{n+1}$, $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ — топологічний добуток перших n просторів X_k і $Y = X_{n+1}$. Тоді:*

1) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина

$$C_y(f) = \Big\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in X : (x_1, \ldots, x_n, y) \in C(f) \Big\}$$

є залишковою у просторі X;

2) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності і добуток X берівський, то f квазінеперервне;

3) якщо Y — метризовний компакт, то множина

$$C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$$

є залишковою в X.

Доведення. Твердження 1 та 2 доведемо індукцією відносно n. При $n = 1$ вони випливають з теорем 4 і 5. Припустимо, що $n \geq 2$ і твердження 1 та 2 вірні, коли число просторів дорівнює n. Коли ж число просторів дорівнює $n+1$ (як у формулюванні теореми), то ми розглянемо f як відображення з $X \times Y$ в Z, виберемо на основі теореми Банаха про категорію залишковий і відкритий в X берівський підпростір T і розглянемо звуження $g = f|_{T\times Y}$. Покажемо, що $g \in \overline{K}C(T \times Y, Z)$. Нехай

$$p_0 = (x_0, y_0) \in T \times Y \ ,$$

де

$$x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in T \ , \ \text{ а } \ y_0 \in B = E_{n+1}.$$

Існують такі відкриті околи U_i точок x_i^0 в X_i, що їх добуток U міститься в T. Оскільки T берівський, то і U буде берівським в індукованій топології, звідки випливає, що і добуток $U_1 \times \cdots \times U_{n-1}$ буде берівським. Використавши індуктивне припущення для просторів $U_1, \ldots, U_n, Z$ і відображення $h = g_{y_0}|_U$, для якого в ролі множин E_i виступають множини $E_i \cap U_i$, одержимо, що h квазінеперервне, звідки буде випливати квазінеперервність g_{y_0} в точці x_0. Оскільки за умовою $\overline{B} = Y$, то $g \in \overline{K}C(T \times Y, Z)$. Тепер за теоремою 4 множина $C_y(g)$ буде залишковою в T, а значить, і в X, для кожного $y \in Y$. Але $C_y(f) \supseteq C_y(g)$, отже, і $C_y(f)$ буде залишковою в X для кожного $y \in Y$. Крім того, за теоремою 5 відображення f буде квазінеперервним, якщо добуток X є берівським.

Щоб довести твердження 3, зауважимо, що в цьому випадку знову $g \in \overline{K}C(T \times Y, Z)$, але квазінеперервність відображень $g_y : T \to Z$ для кожного $y \in B$ випливає вже не з індуктивного припущення, а з щойно встановленої властивості 2, яку ми застосовуємо до відображення $h = g_{y|_U}$. В такому разі з теореми 4 випливає, що для метризовного компакта Y множина $C_Y(g)$ буде залишковою в T, а значить, і в X, звідки отримуємо, що і $C_Y(f)$ залишкова в X, бо $C_Y(f) \supseteq C_Y(g)$, і, таким чином, теорему повністю доведено.

1. *Christensen J.P.R.* Joint continuity of separately continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1981. — **82**, № 3. — P. 455 – 461.
2. *Маслюченко В.К.* Раздельно непрерывные отображения со значениями в строгих индуктивных пределах // XIV шк. по теории операторов в функцион. пространствах. — Новгород, 1989. — Ч. 2. — С. 70.
3. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення зі значеннями в індуктивних границях // Укр. мат. журн. — 1992. — **44**, № 3. — С. 380 – 384.
4. *Маслюченко В.К., Репало Б.Г.* Майже нарізно неперервні відображення. — Чернівці, 1993. — 15 с. — Деп. в ДНТБ України, № 956-Ук93.
5. *Dieudonné J., Schwartz L.* La dualité dans espaces (F) et (DF) // Ann. Inst. Fourier. — 1949. — **1**. — P. 61 – 101. (Рос. переклад: Математика. — 1958. — **2**, № 2. — С. 77 – 117.)
6. *Шефер X.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360 с.
7. *Kucera J., McKennon K.* Bounded sets in inductive limits // Proc. Amer. Math. Soc. — 1978. — **69**, № 1. — P. 62 – 64.
8. *Kucera J., McKennon K.* Dieudonné – Schwartz theorem on bounded sets in inductive limits // Ibid. — 1980. — **78**, № 3. — P. 366 – 368.

9. *Kucera J., Bosch C.* Dieudonné – Schwartz theorem on bounded sets in inductive limits. II // Ibid. — 1982. — **86**, № 3. — P. 392 – 394.

10. *Qiu Jing-Hui.* Dieudonné – Schwartz theorem in inductive limits of metrisable spaces // Ibid. — 1984. — **92**, № 2. — P. 255 – 257.

11. *Маслюченко В.К., Собчук О.В.* Берівська класифікація і σ-метризовні простори // Мат. студії. — 1994. — Вип. 3. — С. 95 – 101.

12. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Мат. Міжнар. мат. конф., присвяченої пам'яті Ганса Гана. — Чернівці: Рута, 1995. — С. 192 – 246.

13. *Маслюченко В.К.* Простори Гана і задача Діні // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 1998.

14. *Neubrunn T.* Quasi-continuity // Real Anal. Exch. — 1988, 1989. — **14**, № 3. — P. 259 – 306.

15. *Breckenridge J.C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Math. Acad. Sinica. — 1976. — **4**, № 2. — P. 191 – 203.

16. *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Горизонтальна квазінеперервність та її застосування. — Чернівці, 1996. — 15 с. — Деп. в УкрІНТЕІ; № 98-Ук96.

17. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. — М.: Мир, 1966. — Т. 1. — 594 с.

Одержано 21.01.99