

**РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ  
В ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЯХ  
С ПЕРЕГОРОДКАМИ\***

**В. А. Троценко**

*Ин-т математики НАН Украины*

*Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3*

*e-mail: trots@imath.kiev.ua*

*We propose methods for constructing approximate solutions of main boundary-value problems. These methods permit to determine frequencies and attached masses of a frictionless fluid in a moving horizontal cylinder that has an arbitrary symmetric cross-section and construction elements in the form of longitudinal edge partitions.*

*Запропоновано методи побудови наближених розв'язків основних крайових задач, які дозволяють визначити частоти та приєднані маси ідеальної рідини в рухомому горизонтальному циліндрі з довільним симетричним поперечним перерізом та конструктивними елементами у вигляді поздовжніх ребер-перегородок.*

**Введение.** В инженерной практике для ограничения подвижности жидкости в емкостях широко применяются конструктивные устройства в виде ребер-перегородок, расположенных на их стенках. Принцип действия таких демпферов колебаний жидкости основан на свойствах перегородок оказывать значительное сопротивление движению жидкости, что приводит к сильному демпфированию колебаний.

Наличие в емкости конструктивных элементов типа ребер-перегородок приводит к существенному изменению гидродинамических коэффициентов уравнений движения механической системы «тело-жидкость». Результаты сравнения теоретических и экспериментальных данных, полученных для различных форм полостей с перегородками, показали, что в рамках линейной теории волновых движений жидкости влияние вязкости на инерционные характеристики жидкости является незначительным [1].

Теоретическому исследованию частот и присоединенных масс идеальной жидкости в некоторых подвижных полостях, имеющих форму тела вращения с продольными и поперечными перегородками, посвящены работы [2–5]. Применение метода возмущений при определении инерционных характеристик жидкости для полостей с поперечными и продольными ребрами малой относительной ширины изложено в работах [6–8]. Обширные результаты экспериментального определения динамических характеристик жидкости для ряда полостей с перегородками получены в [1, 9]. Большой интерес представляют вопросы исследования колебаний вязкой жидкости в полостях с рассматриваемыми устройствами. Этим задачам посвящены работы [10–12].

Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в горизонтально расположенном круговом цилиндре с продольными перегородками представлено в монографии [13]. Методам расчета частот и присоединенных масс идеальной жидкости в по-

---

\* Выполнена при поддержке НТЦ Украины (проект № 0752).

движной полости в форме прямоугольного параллелепипеда с ребрами-перегородками посвящена работа [14].

Приведенный краткий обзор литературных источников показывает, что в настоящее время имеются обширные результаты изучения движения жидкого наполнения в полостях, имеющих форму тел вращения с конструктивными элементами в виде радиальных и кольцевых ребер-перегородок. Однако практически нет данных по исследованию поведения жидкости в полостях в форме произвольных горизонтально расположенных цилиндров с продольными перегородками. Такие контейнеры используются при перевозке больших масс жидкости в танкерах и на железнодорожном транспорте. Поэтому проблема расчета динамических характеристик жидкости в этих емкостях является актуальной задачей и представляет как теоретический, так и практический интерес.

В настоящей работе на основе разработанного в [5] подхода предлагается методика определения коэффициентов уравнений движения твердого тела с полостью в форме горизонтального цилиндра с произвольным симметричным поперечным сечением, которая частично заполнена идеальной несжимаемой жидкостью и содержит продольные ребра-перегородки. На конкретных примерах проведен анализ эффективности полученных решений краевых задач и выявлено влияние перегородок на динамические характеристики жидкости.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим абсолютно твердое тело, в котором имеется полость, частично заполненная идеальной и несжимаемой жидкостью плотности  $\rho$ . Пусть полость имеет форму горизонтально расположенного цилиндра длины  $l$  с произвольным симметричным поперечным сечением. Предполагается, что на стенках полости закреплены абсолютно жесткие перегородки в форме прямоугольных пластинок одинаковой ширины в плоскости, которая параллельна невозмущенной свободной поверхности жидкости  $\Sigma$ . Расстояние между кромками перегородок обозначим через  $2a$ . Считается, что рассматриваемая механическая система имеет две взаимно перпендикулярные плоскости геометрической симметрии. Систему координат  $Oxyz$ , неизменно связанную с телом, выберем так, чтобы ее координатные плоскости  $Oxz$  и  $Oyz$  совпадали с плоскостями симметрии плоскости. При этом ось  $Oz$  совместим с линией пересечения этих плоскостей, направив ее противоположно направлению вектора земного тяготения. Начало системы координат поместим в плоскости перегородок, а ось  $Oy$  направим вдоль полости.

Центральной проблемой при решении задач динамики твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью, является построение решений двух задач математической физики [1, 15]. Первая задача, описывающая свободные колебания жидкости в неподвижной полости, относится к классу спектральных задач с параметром в граничном условии и имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla\varphi_n(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in Q, \\ \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} - \chi_n\varphi_n\right)_\Sigma = 0, \quad \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu}\right)_S = 0, \quad \int_\Sigma \varphi_n dS = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $Q$  — область, занятая жидкостью,  $S$  — смачиваемая поверхность полости (включая и поверхности перегородок),  $\vec{\nu}$  — орт внешней нормали к границе области  $Q$ .

Вторая задача относится к классу неоднородных граничных задач Неймана для векторной гармонической функции  $\vec{\Omega}$  вида

$$\Delta \vec{\Omega}(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in Q, \quad (1.2)$$

$$\left( \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \nu} \right)_{S \cup \Sigma} = \vec{r} \times \vec{v}.$$

Здесь  $\vec{r}$  — радиус-вектор произвольной точки поверхности  $S \cup \Sigma$ .

Компоненты  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  векторной функции  $\vec{\Omega}$ , которые обычно называются потенциалами Стокса – Жуковского, описывают смещения жидкости при малых вращательных движениях полости относительно осей  $Ox, Oy, Oz$  соответственно.

В силу того, что область, занятая жидкостью, имеет две плоскости симметрии, система решений краевой задачи (1.1) распадается на три подсистемы функций  $\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \varphi_{n3}$ , взаимно ортогональных на поверхности  $\Sigma$ . Соответствующие им собственные числа обозначены через  $\chi_{n1}, \chi_{n2}, \chi_{n3}$ . При этом функции  $\varphi_{n1}, \Omega_2$  являются четными по  $y$  и нечетными по  $x$ , функции  $\varphi_{n2}, \Omega_1$  — нечетными по  $y$  и четными по  $x$ , функции  $\varphi_{n3}, \Omega_3$  — нечетными по  $x$  и  $y$ .

Движения твердого тела с рассматриваемой полостью под воздействием приложенных внешних сил и моментов описываются системами дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат механической системы, которые приведены в работах [14, 15]. При этом гидродинамические коэффициенты этих уравнений выражаются через некоторые интегральные характеристики решений краевых задач (1.1) и (1.2) следующим образом:

$$\lambda_{n1} = \rho \int_{\Sigma} x \frac{\partial \varphi_{n1}}{\partial z} ds, \quad \lambda_{n2} = \rho \int_{\Sigma} y \frac{\partial \varphi_{n2}}{\partial z} ds,$$

$$\lambda_{0n1} = \rho \int_{\Sigma} \Omega_1 \frac{\partial \varphi_{n2}}{\partial z} ds, \quad \lambda_{0n2} = \rho \int_{\Sigma} \Omega_2 \frac{\partial \varphi_{n1}}{\partial z} ds,$$

$$\lambda_{0n3} = \rho \int_{\Sigma} \Omega_3 \frac{\partial \varphi_{n3}}{\partial z} ds, \quad \mu_{ni} = \rho \int_{\Sigma} \varphi_{ni} \frac{\partial \varphi_{ni}}{\partial z} ds,$$

$$I_{ii} = \rho \int_{\Sigma \cup S} \Omega_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial \nu} ds, \quad \sigma_{ni}^2 = j \chi_{ni}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $j$  — проекция кажущегося ускорения на ось  $Oz$ .

Таким образом, перед определением возмущенного движения рассматриваемой механической системы под воздействием внешних сил и моментов необходимо найти параметры (1.3) ее математической модели.

Заметим, что коэффициенты  $\lambda_{ni}, \lambda_{0ni}$  и  $\mu_{ni}$  уравнений движения системы зависят от произвольных постоянных множителей, связанных с решением однородной краевой за-

дачи (1.1). Уравнения движения могут быть приведены к другим формам, в которых гидродинамические коэффициенты выражаются через параметры, инвариантные относительно нормировки функций  $\varphi_{ni}$  [15]:

$$\begin{aligned} c_{n1} &= -\frac{\lambda_{0n1}}{\lambda_{n2}}, & c_{n2} &= -\frac{\lambda_{0n2}}{\lambda_{n1}}, & I_{ii}, & \chi_{ni}, \\ m_{n1} &= \frac{\lambda_{n1}^2}{\mu_{n1}}, & m_{n2} &= \frac{\lambda_{n2}^2}{\mu_{n2}}, & m_{n3} &= \frac{\lambda_{0n3}^2}{\mu_{n3}}, & i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В дальнейшем при определении гидродинамических коэффициентов уравнений будем использовать инвариантные динамические параметры (1.4). При этом при проведении расчетов будем пользоваться безразмерными величинами. При выборе некоторого характерного линейного размера  $R$  связь размерных коэффициентов с безразмерными, обозначаемыми черточкой сверху, будет осуществляться по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{ni}^2 &= \frac{j}{R} \bar{\sigma}_{ni}^2, & R\chi_{ni} &= \bar{\chi}_{ni}, & \bar{\sigma}_{ni}^2 &= \bar{\chi}_{ni}, \\ \lambda_{ni} &= \rho R^3 \bar{\lambda}_{ni}, & \mu_{ni} &= \rho R^3 \bar{\mu}_{ni}, & \lambda_{0ni} &= \rho R^4 \bar{\lambda}_{0ni}, & I_{ii} &= \rho R^5 \bar{I}_{ii}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В дальнейшем черточку над безразмерными величинами будем опускать.

Форма рассматриваемой области и краевые условия задачи позволяют представить функции  $\varphi_{ni}$ , характеризующие волновые движения жидкости, в виде

$$\varphi_{ni}(x, y, z) = \psi_{mk}(x, z) \cos \mu_k \left( y + \frac{l}{2} \right), \quad (1.6)$$

где

$$\mu_k = \begin{cases} \frac{k\pi}{l}, & k = 0, 2, 4, \dots, \text{ при } i = 1; \\ \frac{k\pi}{l}, & k = 1, 3, 5, \dots, \text{ при } i = 2, 3. \end{cases}$$

Функции  $\psi_{mk}(x, z)$  определяются из решения однородных краевых задач

$$\begin{aligned} \Delta \psi_{mk}(x, z) - \mu_k^2 \psi_{mk}(x, z) &= 0, & (x, z) &\in G, \\ \left( \frac{\partial \psi_{mk}}{\partial z} - \chi_{mk} \psi_{mk} \right)_{L_0} &= 0, & \left( \frac{\partial \psi_{mk}}{\partial \nu} \right)_L &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $G : Q \cap Oxz$ ,  $L_0 : \Sigma \cap Oxz$ ,  $L : S \cap Oxz$ .

Решая краевую задачу (1.7) при фиксированном значении числа  $k$ , для каждого из них получаем последовательность собственных чисел и собственных функций, для нумерации которых используем индекс  $m$ . Под индексом  $n$  функций  $\varphi_{ni}$  теперь будем понимать одну из возможных комбинаций индексов  $m$  и  $k$ .

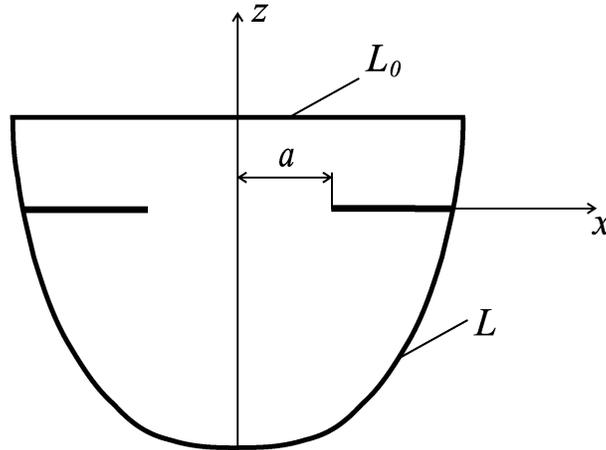


Рис. 1

Компоненты  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  гармонической векторной функции  $\vec{\Omega}$  из (1.2) должны удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \nu} \Big|_{S \cup \Sigma} &= y \cos(\nu, z) - z \cos(\nu, y), \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial \nu} \Big|_{S \cup \Sigma} &= z \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, z), \\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial \nu} \Big|_{S \cup \Sigma} &= x \cos(\nu, y) - y \cos(\nu, x). \end{aligned} \quad (1.8)$$

В дальнейшем займемся построением решений для функций  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

Как видно из граничных условий, функция  $\Omega_2$  не зависит от координаты  $y$ , и ее определение связано с решением двумерного уравнения Лапласа в области поперечного сечения полости.

Функцию  $\Omega_1$  можно представить в виде [14]

$$\Omega_1 = -yz - \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{8}{l\mu_k^2} \Psi_k(x, z) \cos \mu_k \left( y + \frac{l}{2} \right). \quad (1.9)$$

Здесь функции  $\Psi_k(x, z)$  определяются из решения неоднородных задач Неймана для уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_k(x, z) - \mu_k^2 \Psi_k(x, z) &= 0, \quad (x, z) \in G, \\ \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial \nu} \right)_{L \cup L_0} &= \cos(\nu, z), \quad k = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

Таким образом, определение гидродинамических коэффициентов (1.3) уравнений движения тела с рассматриваемой полостью свелось в основном к решению однородных граничных задач со спектральным параметром в граничном условии и неоднородных задач Неймана для уравнения Гельмгольца в области  $G$  поперечного сечения полости (рис. 1).

**2. Построение приближенных решений основных краевых задач.** Основные трудности построения приближенных решений рассматриваемых краевых задач обусловлены неканоничностью области  $G$  и наличием в ней разрезов вдоль линий, которые вызывают разрывы в искомым решениях при переходе через них. Одним из методов решения подобных краевых задач является модифицированный метод сопряжения решений, который позволяет свести эти задачи к решению алгебраических систем небольшой размерности [5, 14]. Изложим суть этого подхода на примере решения неоднородной краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца

$$\Delta \Psi_k(x, z) - \mu_k^2 \Psi_k(x, z) = 0, \quad (x, z) \in G, \quad \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial \nu} \right)_{\Gamma} = f, \quad (2.1)$$

где  $\Gamma$  — контур области  $G$ , включая и контуры разрезов,  $\mu_k = k\pi/l$  — заданный параметр.

Разобьем область  $G$  отрезком  $\gamma_0 : \{-a \leq x \leq a; z = 0\}$  на две подобласти  $G_1$  и  $G_2$  и будем полагать, что функция  $\Psi_k(x, z)$  принимает значения

$$\Psi_k(x, z) = \begin{cases} \Psi_k^{(1)}(x, z), & (x, z) \in G_1; \\ \Psi_k^{(2)}(x, z), & (x, z) \in G_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

В предположении существования решения граничной задачи (2.1) представим ее производную в направлении оси  $Oz$  на смежной линии  $\gamma_0$  областей  $G_1$  и  $G_2$  в виде

$$\left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial z} \right)_{\gamma_0} = f_0^{(k)}(x) + \sum_{p=1}^{P_0} z_p^{(k)} f_p^{(k)}(x), \quad (2.3)$$

где  $z_p^{(k)}$  — неопределенные постоянные;  $\{f_p^{(k)}(x)\}_{p=1}^{P_0}$  — пока произвольная полная система функций на отрезке  $\gamma_0$ ;  $f_0^{(k)}(x)$  — функция, которая в общем случае является некоторым аналитическим продолжением неоднородного граничного условия на разрезах на всю границу подобластей  $G_1$  и  $G_2$  при  $z = 0$ .

Выражение (2.3) рассматривается в дальнейшем как дополнительное граничное условие Неймана на участке  $\gamma_0$  для функций  $\Psi_k^{(1)}(x, z)$  и  $\Psi_k^{(2)}(x, z)$ , определенных в областях  $G_1$  и  $G_2$  соответственно. В силу линейности задачи решения для функций  $\Psi_k^{(s)}(x, z)$  могут быть представлены в виде

$$\Psi_k^{(s)}(x, z) = (-1)^s \Psi^{(k,s)}(x, z) + \sum_{p=1}^{P_0} z_p^{(k)} g_p^{(k,s)}(x, z). \quad (2.4)$$

Здесь и далее индекс  $s$  обозначает номер подобласти  $G$ .

Функции  $\Psi^{(k,s)}(x, z)$  и  $g_p^{(k,s)}(x, z)$  являются решениями уравнения Гельмгольца, которые подчинены граничным условиям

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Psi^{(k,s)}}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_s} &= f, & \left(\frac{\partial \Psi^{(k,s)}}{\partial \nu}\right)_{\gamma_0} &= f_0^{(k)}(x) = f, \\ \left(\frac{\partial g_p^{(k,s)}}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_s} &= 0, & \left(\frac{\partial g_p^{(k,s)}}{\partial z}\right)_{\gamma_0} &= f_p^{(k)}(x), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad p = 1, 2, \dots, P_0.$$

Из условия непрерывности функций  $\Psi^{(k,1)}$  и  $\Psi^{(k,2)}$  на отрезке  $\gamma_0$  следует соотношение

$$\sum_{p=1}^{P_0} z_p^{(k)} T_p^{(k)}(x) = \tau^{(k)}(x), \quad (2.6)$$

где

$$T_p^{(k)}(x) = g_p^{(k,2)}(x, 0) - g_p^{(k,1)}(x, 0), \quad \tau^{(k)}(x) = -\Psi_0^{(k,1)}(x, 0) - \Psi_0^{(k,2)}(x, 0).$$

Умножая обе части равенства (2.6) на  $f_q^{(k)}(x)$  и интегрируя его от  $-a$  до  $a$ , получаем систему алгебраических уравнений относительно постоянных  $z_p^{(k)}$ :

$$\sum_{p=1}^{P_0} z_p^{(k)} \alpha_{pq}^{(k)} = \gamma_q^{(k)}, \quad q = 1, 2, \dots, P_0, \quad (2.7)$$

где

$$\alpha_{pq}^{(k)} = \int_{-a}^a T_p^{(k)}(x) f_q^{(k)}(x) dx, \quad \gamma_q^{(k)} = \int_{-a}^a \tau^{(k)}(x) f_q^{(k)}(x) dx.$$

При построении решений указанным выше способом большое значение приобретает аппроксимация производной в направлении оси  $Oz$  от функции  $\Psi_k(x, z)$  на отрезке  $[-a, a]$ , поскольку от этого зависит размерность алгебраической системы (2.7). Для установления свойств координатных функций  $f_p^{(k)}(x)$  положим

$$\left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial z}\right)_{\gamma_0} = M_k(x), \quad (2.8)$$

где  $M_k(x)$  — неизвестная функция.

Формально записывая решения для подобластей  $G_1$  и  $G_2$  с помощью функций Грина, предварительно выделив их сингулярную часть, после выполнения условий непрерывности функций  $\Psi^{(k,1)}(x, z)$  и  $\Psi^{(k,2)}(x, z)$  на отрезке  $\gamma_0$  для определения функции  $M_k(x)$  получаем интегральное уравнение вида

$$\int_{-a}^a M_k(x) \left[ \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x - x_0|} + v(x, x_0) \right] dx_0 = \tau^{(k)}(x),$$

где  $v(x, x_0)$  — регулярная функция своих аргументов.

Это уравнение представляет собой интегральное уравнение первого рода с нерегулярным ядром, содержащим подвижную логарифмическую особенность. Такие уравнения достаточно хорошо изучены и возникают при исследовании широкого класса контактных задач теории упругости и задач обтекания тонких профилей в гидромеханике. При этом установлено [16], что решение этого уравнения существует и имеет вид

$$M_k(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Phi_k(x), \quad (2.9)$$

где  $\Phi_k(x)$  — достаточно гладкая функция.

Установленное свойство функций  $M_k(x)$  будет использовано в дальнейшем при построении систем координатных функций  $\{f_p^{(k)}(x)\}_{p=1}^{P_0}$ .

Аналогичный подход с небольшими изменениями может быть применен и при решении однородной задачи (1.7) для уравнения Гельмгольца с параметром в граничном условии.

Поскольку для волновых функций заранее неизвестный параметр  $\chi_n$  входит в граничные условия, решения для функций  $\psi_k^{(s)}(x, z)$ ,  $s = 1, 2$ , определенных в областях  $G_1$  и  $G_2$  соответственно, будем искать в виде (индекс  $m$  в дальнейшем опускаем)

$$\psi_k^{(1)} = \sum_{n=1}^{N_0} y_n^{(k)} s_n^{(k)}(x, z) + \sum_{p=1}^{P_0} x_p^{(k)} g_p^{(k,1)}(x, z), \quad (2.10)$$

$$\psi_k^{(2)} = \sum_{p=1}^{P_0} x_p^{(k)} g_p^{(k,2)}(x, z).$$

Здесь  $y_n^{(k)}$  и  $x_p^{(k)}$  — неопределенные постоянные,  $s_n^{(k)}(x, z)$  — собственные функции дополнительно введенной в рассмотрение краевой задачи для области  $G_1$  с параметром  $\beta_n^{(k)}$  в граничном условии:

$$\begin{aligned} \Delta s_n^{(k)} - \mu_k^2 s_n^{(k)} &= 0, \quad (x, z) \in G_1, \\ \left( \frac{\partial s_n^{(k)}}{\partial z} - \beta_n^{(k)} s_n^{(k)} \right)_{L_0} &= 0, \quad \left( \frac{\partial s_n^{(k)}}{\partial \nu} \right)_{\Gamma_1 \cup \gamma_0 \setminus L_0} = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Собственные функции  $s_n^{(k)}(x, z)$  имеют свойство полноты и ортогональности на линии  $L_0$  :

$$\int_{L_0} s_n^{(k)} s_m^{(k)} dS = 0, \quad \int_{L_0} \frac{\partial s_n^{(k)}}{\partial z} \frac{\partial s_m^{(k)}}{\partial z} dS, \quad \forall m \neq n. \quad (2.12)$$

Представленные решения в виде (2.10) заведомо удовлетворяют нулевым граничным условиям Неймана на контурах  $\Gamma_1 \setminus L_0$  и  $\Gamma_2$  соответственно и условию непрерывности производных в направлении оси  $Oz$  :

$$\left( \frac{\partial \psi_k^{(1)}}{\partial z} \right)_{\gamma_0} = \left( \frac{\partial \psi_k^{(2)}}{\partial z} \right)_{\gamma_0} = \sum_{p=1}^{P_0} x_p^{(k)} f_p^{(k)}(x).$$

Подчиним функцию  $\psi_k^{(1)}(x, z)$  граничному условию на контуре  $L_0$ . При этом получим

$$\left[ \sum_{n=1}^{N_0} y_n^{(k)} \frac{\partial s_n^{(k)}}{\partial z} - \chi_k \left( \sum_{n=1}^{N_0} y_n^{(k)} s_n^{(k)} + \sum_{p=1}^{P_0} x_p^{(k)} g_p^{(k,1)} \right) \right]_{L_0} = 0.$$

Умножим это соотношение на  $\partial s_n^{(k)} / \partial z$  и проинтегрируем полученное выражение по контуру  $L_0$ . С учетом условий ортогональности (2.12) будем иметь

$$y_n^{(k)} \beta_n^{(k)} N_n^{(k)} - \chi_k \left( y_n^{(k)} N_n^{(k)} - \sum_{p=1}^{P_0} x_p^{(k)} \beta_{np}^{(k)} \right) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N_0, \quad (2.13)$$

где

$$N_n^{(k)} = \int_{L_0} s_n^{(k)} \frac{\partial s_n^{(k)}}{\partial z} dS, \quad \beta_{np}^{(k)} = \int_{\gamma_0} s_n^{(k)} f_p^{(k)} dS = - \int_{L_0} g_p^{(k,1)} \frac{\partial s_n^{(k)}}{\partial z} dS.$$

При выводе выражений для коэффициентов  $\beta_{np}^{(k)}$  была использована формула Грина. Выполняя условие равенства функций  $\psi_k^{(1)}(x, z)$  и  $\psi_k^{(2)}(x, z)$  на отрезке  $\gamma_0$ , имеем

$$\sum_{n=1}^{N_0} y_n^{(k)} \beta_{nq}^{(k)} = \sum_{p=1}^{P_0} x_p^{(k)} \alpha_{pq}^{(k)}, \quad q = 1, 2, \dots, P_0. \quad (2.14)$$

Заметим, что элементы  $\alpha_{pq}^{(k)}$  образуют симметричную матрицу  $\mathfrak{L}^{(k)}$  размера  $(P_0 \times P_0)$ . Системы уравнений (2.13) и (2.14) служат для определения параметров  $\chi_k$ ,  $y_n^{(k)}$  и  $x_p^{(k)}$ . Запишем эти системы уравнений в матричной форме и приведем их к более удобному виду. Обозначим через  $\mathfrak{B}_2^{(k)}$  матрицу размера  $(N_0 \times P_0)$  с элементами  $\beta_{np}^{(k)}$ , а через  $(\mathfrak{B}_2^{(k)})^T$

транспонированную к ней матрицу. Введем в рассмотрение следующие векторы-столбцы и диагональные матрицы:

$$\vec{y}^{(k)} = \{y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_{N_0}^{(k)}\}, \quad \vec{x}^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{P_0}^{(k)}\},$$

$$\mathfrak{A}^{(k)} = \text{diag} \{ \beta_1^{(k)} N_1^{(k)}, \beta_2^{(k)} N_2^{(k)}, \dots, \beta_{N_0}^{(k)} N_{N_0}^{(k)} \}, \quad \mathfrak{B}_1^{(k)} = \text{diag} \{ N_1^{(k)}, N_2^{(k)}, \dots, N_{N_0}^{(k)} \}.$$

С учетом введенных обозначений уравнения (2.13) и (2.14) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{(k)} \vec{y}^{(k)} - \chi_k \left( \mathfrak{B}_1^{(k)} \vec{y}^{(k)} - \mathfrak{B}_2^{(k)} \vec{x}^{(k)} \right) &= 0, \\ \left( \mathfrak{B}_2^{(k)} \right)^T \vec{y}^{(k)} &= \mathfrak{L}^{(k)} \vec{x}^{(k)}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Из последнего уравнения имеем

$$\vec{x}^{(k)} = \left( \mathfrak{L}^{(k)} \right)^{-1} \left( \mathfrak{B}_2^{(k)} \right)^T \vec{y}^{(k)}. \tag{2.16}$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (2.15), получаем обобщенную алгебраическую задачу на собственные значения

$$\left( \mathfrak{A}^{(k)} - \chi_k \mathfrak{B}^{(k)} \right) \vec{y}^{(k)} = 0, \tag{2.17}$$

где  $\mathfrak{B}^{(k)} = \mathfrak{B}_1^{(k)} - \mathfrak{B}_2^{(k)} \left( \mathfrak{L}^{(k)} \right)^{-1} \left( \mathfrak{B}_2^{(k)} \right)^T$  — симметричная матрица размера  $(N_0 \times N_0)$ .

После решения системы (2.17) по формуле (2.16) находим значения векторов  $\vec{x}^{(k)}$ . Таким образом, в соответствии с изложенной методикой определение решений неоднородной краевой задачи (2.1) и спектральной задачи с параметром в граничном условии (1.7) для уравнения Гельмгольца в области поперечного сечения полости  $G$  свелось к построению решений вспомогательных краевых задач для функций  $\Psi^{(k,s)}(x, z)$ ,  $g_p^{(k,s)}(x, z)$  и  $s_n^{(k)}(x, z)$  в соответствующих подобластях  $G_s$  и последующему решению алгебраических задач (2.7) и (2.17).

**3. Построение приближенных решений вспомогательных краевых задач.** Для случая, когда границы подобластей  $G_1$  и  $G_2$  совпадают с координатными линиями одной из ортогональных систем координат, построение решений упомянутых краевых задач можно осуществлять с помощью функций Грина для задачи Неймана и параметрической функции Грина для подобласти  $G_1$ , которая точно удовлетворяет граничному условию для функции  $\psi^{(k,1)}(x, z)$  на границе  $L_0$  [14]. Ниже в силу неканоничности подобластей  $G_1$  и  $G_2$  приближенные решения соответствующих вспомогательных краевых задач будем строить на основе их эквивалентных вариационных формулировок.

Введем в рассмотрение следующие квадратичные функционалы:

$$\int_{G_s} \left[ \left( \frac{\partial \Psi^{(k,s)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi^{(k,s)}}{\partial z} \right)^2 + \mu_k^2 \left( \Psi^{(k,s)} \right)^2 \right] dG_s - 2 \int_{\Gamma_s \cup \gamma_0} \Psi^{(k,s)} f dS, \quad (3.1)$$

$$\int_{G_1} \left[ \left( \frac{\partial s_n^{(k)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial s_n^{(k)}}{\partial z} \right)^2 + \mu_k^2 \left( s_n^{(k)} \right)^2 \right] dG_1 - \beta_n^{(k)} \int_{L_0} \left( s_n^{(k)} \right)^2 dS.$$

Вычисляя вариации функционалов (3.1) на классе допустимых функций, которые непрерывны в областях  $G_s$  вместе с частными производными первого и второго порядка и не подчинены никаким граничным условиям, можно показать, что построение приближенных решений краевых задач (2.5) и (2.11) для функций  $\Psi^{(k,s)}(x, z)$  и  $s_n^{(k)}(x, z)$  эквивалентно нахождению стационарных значений этих функционалов. Предположим, что известны полные системы координатных функций  $W_i^{(k,s)}(x, z)$ , каждый элемент которых удовлетворяет уравнению Гельмгольца в подобластях  $G_s$ . Следуя методу Трефтца, решения для функций  $\Psi^{(k,s)}(x, z)$  и  $s_n^{(k)}(x, z)$  представим в виде отрезков обобщенных рядов:

$$\Psi^{(k,s)}(x, z) = \sum_{i=1}^{I_0} b_i^{(k,s)} W_i^{(k,s)}(x, z), \quad s_n^{(k)}(x, z) = \sum_{i=1}^{I_0} a_i^{(n,k)} W_i^{(k,1)}(x, z). \quad (3.2)$$

Постоянные  $b_i^{(k,s)}$  и  $a_i^{(n,k)}$ , образующие собой векторы-столбцы  $\vec{b}^{(k,s)} = \{b_1^{(k,s)}, b_2^{(k,s)}, \dots, b_{I_0}^{(k,s)}\}$  и  $\vec{a}^{(n,k)} = \{a_1^{(n,k)}, a_2^{(n,k)}, \dots, a_{I_0}^{(n,k)}\}$ , найдем из необходимых условий минимума функционалов (3.1), которые должны доставлять им функции (3.2). В результате определение векторов  $\vec{b}^{(k,s)}$  и  $\vec{a}^{(n,k)}$  сведется к решению алгебраических систем

$$A^{(k,s)} \vec{b}^{(k,s)} = \vec{c}^{(k,s)} \quad \left( A^{(k,1)} - \beta_n^{(k)} B^{(k,1)} \right) \vec{a}^{(n,k)} = 0, \quad (3.3)$$

где элементы  $\alpha_{ij}^{(k,s)}$  и  $\beta_{ij}^{(k,1)}$  матриц  $A^{(k,1)}$  и  $B^{(k,1)}$ , а также компоненты  $c_j^{(k,s)}$  векторов  $\vec{c}^{(k,s)}$  вычисляются по формулам

$$\alpha_{ij}^{(k,s)} = \int_{\Gamma_s \cup \gamma_0} W_i^{(k,s)} \frac{\partial W_j^{(k,s)}}{\partial \nu} dS, \quad \beta_{ij}^{(k,1)} = \int_{L_0} W_i^{(k,1)} W_j^{(k,1)} dS, \quad c_j^{(k,s)} = \int_{\Gamma_s \cup \gamma_0} W_j^{(k,s)} f dS.$$

При выводе этих формул была использована формула Грина для функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца.

Непосредственное применение вариационного метода для построения приближенных решений для функций  $g_p^{(k,s)}(x, z)$  невозможно, поскольку для них имеем разрывные граничные условия на части границ областей  $G_s$  при  $z = 0$ . В связи с этим предварительно необходимо провести регуляризацию граничных условий для функций  $g_p^{(k,s)}(x, z)$  с помощью функций  $\Phi_p^{(k,s)}(x, z)$ , которые точно удовлетворяют уравнению Гельмгольца, имеют

замкнутый аналитический вид и подчиняются следующим условиям на части границы областей  $G_s$ :

$$\left(\frac{\partial \Phi_p^{(k,s)}}{\partial z}\right)_{\gamma_0} = f_p^{(k)}(x), \quad \left(\frac{\partial \Phi_p^{(k,s)}}{\partial z}\right)_{\gamma} = 0, \quad (3.4)$$

где  $\gamma$  — линия, связанная с разрезами области  $G$ .

Имея набор таких функций, можно ввести в рассмотрение функции

$$H_p^{(k,s)}(x, z) = g_p^{(k,s)}(x, z) - \Phi_p^{(k,s)}(x, z), \quad (3.5)$$

для которых неоднородные граничные условия в областях  $G_s$  будут регулярными:

$$\left(\frac{\partial H_p^{(k,s)}}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_s \setminus \gamma} = -\left(\frac{\partial \Phi_p^{(k,s)}}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_s \setminus \gamma}, \quad \left(\frac{\partial H_p^{(k,s)}}{\partial z}\right)_{\gamma_0 \cup \gamma} = 0. \quad (3.6)$$

Непосредственно подобрать такие функции с перечисленными свойствами не представляется возможным. Однако наборы функций  $\Phi_p^{(k,s)}(x, y)$  с одновременным выбором базисных функций  $f_p^{(k)}(x)$  можно построить на классе частных решений двумерного уравнения Гельмгольца в эллиптической системе координат. Такая возможность предоставляется за счет того, что отрезок  $[-a, a]$  и линия  $z = 0$ , за исключением этого отрезка, являются координатными линиями в предельном случае эллиптической системы координат.

Введем новые координаты  $u$  и  $v$ , связанные с декартовыми координатами  $x$  и  $z$  соотношениями

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad z = a \operatorname{sh} u \sin v, \quad (3.7)$$

где  $u$  и  $v$  в общем случае изменяются в таких пределах, чтобы можно было описать все точки плоскости  $Oxz$ .

Обозначим через  $r_1$  и  $r_2$  расстояния от произвольной точки  $M(x, z)$  до точек  $M_1(-a, 0)$  и  $M_2(a, 0)$  соответственно. Тогда с учетом (3.7) будем иметь

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+a)^2 + z^2} = a(\operatorname{ch} u + \cos v), \\ r_2 &= \sqrt{(x-a)^2 + z^2} = a(\operatorname{ch} u - \cos v). \end{aligned} \quad (3.8)$$

С использованием этих выражений можно показать, что кривые  $u = \operatorname{const}$  и  $v = \operatorname{const}$  представляют собой эллипсы и гиперболы с фокусами в точках  $x = \pm a$ . В предельном случае при  $u = 0$  получим отрезок  $[-a, a]$  на оси  $Ox$ . При  $v = 0$  и  $v = \pi$  на оси  $Ox$  имеем прямые  $[a, +\infty)$  и  $(-\infty, -a]$  соответственно. Если положить  $-\infty < u < \infty$  и  $0 \leq v \leq \pi$ , то будем иметь все точки плоскости  $Oxz$ . Отрицательным значениям  $u$  будут соответствовать отрицательные значения  $z$ . Используя формулы (3.8), выразим переменные  $u$  и  $v$  через переменные  $x$  и  $z$ . При этом будем иметь

$$u = \operatorname{arch} \frac{r_1 + r_2}{2a}, \quad v = \arccos \frac{r_1 - r_2}{2a}. \quad (3.9)$$

Заметим, что при  $0 \leq v \leq \pi$  функция  $v$  принимает главные значения, тогда как функция  $u$  является двужначной.

Пусть имеем произвольную дифференцируемую функцию  $f(x, y)$ , переменные которой связаны с переменными  $u$  и  $v$  соотношениями (3.7). Тогда для производных  $(\partial f^{(1)})/(\partial x)$ ,  $(\partial f^{(1)})/(\partial z)$  при  $z \geq 0$  и  $(\partial f^{(2)})/(\partial x)$ ,  $(\partial f^{(2)})/(\partial z)$  при  $z \leq 0$  можно установить следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(s)}}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} \left( \operatorname{sh} u \cos v \frac{\partial f^{(s)}}{\partial u} - \operatorname{ch} u \sin v \frac{\partial f^{(s)}}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial f^{(s)}}{\partial z} &= \frac{(-1)^{s+1}}{\Delta} \left( \operatorname{ch} u \sin v \frac{\partial f^{(s)}}{\partial u} + \operatorname{sh} u \cos v \frac{\partial f^{(s)}}{\partial v} \right), \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь  $\Delta = a(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)$  и  $u$  принимает только положительные значения в формуле (3.9).

Используя установленные зависимости, перейдем к построению функций  $\Phi_p^{(k,s)}(x, z)$  с учетом требуемых свойств их четности и нечетности по переменной  $x$ , необходимых для описания движений жидкости в двух плоскостях симметрии рассматриваемой полости.

Построим сначала регуляризирующие функции  $\Phi_p^{(k,s)}(x, z)$ , которые являются четными по координате  $x$ . Эти функции будут использованы в дальнейшем при исследовании движений жидкости в плоскости  $Oyz$ . Подчиним наборы таких функций условиям

$$\left( \frac{\partial \Phi_p^{(k,s)}}{\partial z} \right)_{v=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial \Phi_p^{(k,s)}}{\partial z} \right)_{u=0} \neq 0, \quad \left( \frac{\partial \Phi_p^{(k,s)}}{\partial x} \right)_{v=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (3.11)$$

где положительным значениям  $u$  соответствует верхняя полуплоскость  $z \geq 0$  ( $s = 1$ ), а отрицательным значениям  $u$  — нижняя полуплоскость  $z \leq 0$  ( $s = 2$ ). Последнее условие в (3.11) обусловлено симметричностью функций  $\Phi_p^{(k,s)}(x, z)$  по переменной  $x$ .

При переходе к эллиптическим координатам уравнение Гельмгольца сохраняет свой вид и допускает разделение переменных. Общее его решение можно представить в виде

$$(A \operatorname{sh} \alpha u + B \operatorname{ch} \alpha u)(C \sin \beta v + D \cos \beta v),$$

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 + \mu_2^2},$$

где  $A, B, C, D$  — произвольные постоянные, а  $\beta$  — пока произвольная постоянная разделения переменных. Подчинив это выражение условиям (3.11), получим

$$\begin{aligned} \Phi_p^{(k,s)} &= (-1)^{s+1} A_{pk} \operatorname{sh} \left[ \sqrt{4(p-1)^2 + \mu_k^2} u \right] \cos [2(p-1)v], \\ p &= 1, 2, \dots, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \quad u \geq 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Постоянные  $A_{pk}$  могут быть выбраны соответствующим образом для нормировки гиперболического синуса при больших значениях параметров  $p$  и  $k$ . Подставляя эти выражения в формулы (3.10), для производных от функций  $\Phi_p^{(k,s)}(x, z)$  по переменным  $x$  и  $z$  получаем выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_p^{(k,1)}}{\partial x} &= \frac{A_{pk}}{\Delta} [\beta_{pk} \operatorname{sh} u \cos v \operatorname{ch} \beta_{pk} u \cos 2(p-1)v + \\ &+ 2(p-1) \operatorname{ch} u \sin v \operatorname{sh} \beta_{pk} u \sin 2(p-1)v], \\ \frac{\partial \Phi_p^{(k,1)}}{\partial z} &= \frac{A_{pk}}{\Delta} [\beta_{pk} \operatorname{ch} u \sin v \operatorname{ch} \beta_{pk} u \cos 2(p-1)v - \\ &- 2(p-1) \operatorname{sh} u \cos v \operatorname{sh} \beta_{pk} u \sin 2(p-1)v], \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \Phi_p^{(k,2)}}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi_p^{(k,1)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi_p^{(k,2)}}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_p^{(k,1)}}{\partial z}, \quad \beta_{pk} = \sqrt{4(p-1)^2 + \mu_k^2}.$$

Эти производные необходимы в дальнейшем для вычисления производных по внешней нормали от функций  $\Phi_p^{(k,s)}$  на границах подобластей  $G_s$  при решении соответствующих вспомогательных краевых задач.

В свою очередь, производные от функций  $\Phi_p^{(k,s)}(x, z)$  в направлении оси  $Oz$  на отрезке  $[0, a]$  принимают значения

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Phi_p^{(k,s)}}{\partial z} \right)_{u=0} &= f_p^{(k)}(x) = \frac{A_{pk} \beta_{pk} \cos 2(p-1)v}{a \sin v}, \\ x &= a \cos v, \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}, \quad p = 1, 2, \dots, P_0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Запишем первые две функции  $f_p^{(k)}(x)$  в декартовой системе координат:

$$f_1(x) = \frac{A_{1k} \mu_k}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad f_2(x) = \frac{A_{2k} \beta_{2k} \cos 2v}{a \sin v} = \frac{A_{2k} \beta_{2k}}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 - a^2). \quad (3.15)$$

Эти выражения показывают, что система функций  $\left\{ f_p^{(k)}(x) \right\}_{p=1}^{P_0}$  имеет необходимую четность и ранее установленную сингулярность при  $x \rightarrow a$ .

Перейдем теперь к построению набора регуляризирующих функций, необходимых для решения краевых задач, связанных с исследованием движения жидкости в плоскости  $Oxz$ . Определение нечетных функций  $\varphi_{n1}$  и  $\Omega_2$  по переменной  $x$  сводится к решению соответствующих краевых задач для уравнения Лапласа в области поперечного сечения полости.

В связи с этим найдем частные решения  $\Phi_p^{(0,s)}(x, z)$  двумерного уравнения Лапласа, которые подчинены условиям

$$\left(\frac{\partial \Phi_p^{(0,s)}}{\partial z}\right)_{v=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi_p^{(0,s)}}{\partial z}\right)_{\mu=0} \neq 0, \quad \left(\Phi_p^{(0,s)}\right)_{v=\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (3.16)$$

Последнее условие в (3.16) обусловлено нечетностью функции  $\Phi_p^{(0,s)}(x, z)$  по переменной  $x$ . Действуя аналогично изложенному выше, получаем следующие наборы функций  $\Phi_p^{(0,s)}(x, z)$ :

$$\Phi_p^{(0,s)}(x, z) = (-1)^{s+1} \operatorname{sh}(2p-1)u \cos(2p-1)v, \quad p = 1, 2, \dots, P_0, \quad s = 1, 2. \quad (3.17)$$

При переходе к декартовой системе координат  $Oxz$  значения  $u$  и  $v$  в формуле (3.17) вычисляются по формулам (3.9), причем для  $u$  берутся только положительные значения.

С учетом (3.10) и (3.17) найдем выражения для функций  $f_p^{(0)}(x)$ . При этом будем иметь

$$f_p^{(0)}(x) = \left(\frac{\partial \Phi_p^{(0,s)}}{\partial z}\right)_{u=0} = \frac{2p-1}{a \sin v} \cos(2p-1)v, \quad v = \arccos\left(\frac{x}{a}\right). \quad (3.18)$$

Соответствующие выражения для производных по координатам  $x$  и  $z$  от функций  $\Phi_p^{(0,s)}(x, z)$  примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_p^{(0,1)}}{\partial x} &= \frac{2p-1}{2\Delta} [\operatorname{sh} 2pu \cos 2(p-1)v - \operatorname{sh} 2(p-1)u \cos 2pv], \\ \frac{\partial \Phi_p^{(0,1)}}{\partial z} &= \frac{2p-1}{2\Delta} [\operatorname{ch} 2(p-1)u \sin 2pv - \operatorname{ch} 2pu \sin 2(p-1)v], \\ \frac{\partial \Phi_p^{(0,2)}}{\partial x} &= -\frac{\partial \Phi_p^{(0,1)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi_p^{(0,2)}}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_p^{(0,1)}}{\partial z}, \quad p = 1, 2, \dots, P_0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Успех реализации предложенных подходов к решению вспомогательных краевых задач в значительной мере зависит от выбора систем координатных функций  $W_i^{(k,s)}(x, z)$ , которые обеспечивали бы устойчивость вычислительного процесса и получение результатов с заранее заданной точностью. Построение систем базисных функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца, рассматривалось в работе [17], где в качестве таких функций выбирался набор частных решений исходного уравнения для окаймляющего данную область прямоугольника с выполнением нулевых граничных условий Неймана на нижней и вертикальных его сторонах. В результате применения указанных базисных функций для решения спектральной задачи получены завышенные значения частотного параметра. Использование таких координатных функций для решения неоднородных задач, связанных с определением потенциалов Стокса – Жуковского, является невозможным, поскольку построенные таким образом представления для решений сужают класс

допустимых функций за счет выбранных граничных условий для базисных функций на сторонах описанного прямоугольника.

В работе [18] предложена иная схема построения набора координатных функций для уравнения Гельмгольца при реализации вариационного метода решения задачи о собственных колебаниях жидкости в горизонтальной цилиндрической полости с плоскими боковыми стенками. При этом получено хорошее совпадение результатов расчета с соответствующими данными, основанными на решении пространственных спектральных задач с использованием в качестве базисных функций однородных гармонических полиномов [19]. Однако применение указанного подхода для определения всего комплекса гидродинамических коэффициентов математической модели движения системы «тело-жидкость» вызывает определенные трудности вычислительного характера.

В связи с этим ниже предлагаются базисные функции, которые обеспечивают высокую точность расчетов при одновременной простоте реализации алгоритма на ПЭВМ. Сущность построения таких базисных функций заключается в том, что для описанного для данной области прямоугольника строятся два набора частных решений уравнения Гельмгольца при нулевых граничных условиях Неймана на части его границ. Первый набор определяется нулевыми граничными условиями на горизонтальных его сторонах и свободными граничными условиями на вертикальных. Второй набор определяется нулевыми граничными условиями на вертикальных сторонах прямоугольника и свободными граничными условиями на горизонтальных. Объединяя оба построенных класса частных решений уравнения Гельмгольца в декартовой системе координат, получаем систему базисных функций, для которой класс допустимых функций при решении однородной и неоднородной краевых задач не подчинен каким-либо дополнительным ограничениям, связанным с выбором граничных условий для окаймляющего прямоугольника. При построении наборов частных решений исходного уравнения по указанной выше схеме следует учитывать также соответствующую четность искомых решений относительно координат  $x$  и  $y$  при описании движений жидкости в продольной и поперечной плоскостях симметрии полости.

В соответствии с изложенным, для определения функций  $\Omega_1$  и  $\varphi_{n2}$ , являющихся нечетными по координате  $y$  и четными по координате  $x$ , система координатных функций выбирается следующим образом:

$$\{W_i^{(k,s)}\}_{i=1}^N = \{v_1^{(k,1)}, v_1^{(k,2)}, v_1^{(k,3)}, \dots, v_N^{(k,1)}, v_N^{(k,2)}, v_N^{(k,3)}\}. \quad (3.20)$$

Здесь соответствующим образом нормированные частные решения уравнения Гельмгольца имеют вид

$$\begin{aligned} v_i^{(k,1)} &= A_{ik} \operatorname{sh} \gamma_{ik} z \cos \alpha_i x, & v_i^{(k,2)} &= A_{ik} \operatorname{ch} \gamma_{ik} z \cos \alpha_i x, \\ v_i^{(k,3)} &= B_{ik} \operatorname{ch} \tau_{ik} x \cos \beta_i z, & A_{ik} &= e^{-\gamma_{ik} h}, & B_{ik} &= e^{-\tau_{ik} x_0}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\gamma_{ik} = \sqrt{\alpha_i^2 + \mu_k^2}, \quad \tau_{ik} = \sqrt{\beta_i^2 + \mu_k^2}, \quad \alpha_i = \frac{(i-1)\pi}{x_0}, \quad \beta_i = \frac{(i-1)\pi}{h},$$

$$\mu_k = \frac{k\pi}{l}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 3, 5, \dots,$$

где  $h$  и  $x_0$  — высота и ширина описанного вокруг области  $G_s$  прямоугольника.

В свою очередь, определение составляющих для функций  $\Omega_2$  и  $\varphi_{n1}$ , являющихся четными по координате  $y$  и нечетными по координате  $x$ , проводится с помощью координатных функций (3.20), где в качестве частных решений  $v_i^{(k,j)}(x, z)$  выбираются следующие функции:

$$v_i^{(k,1)} = A_{ik} \operatorname{sh} \gamma_{ik} z \sin \alpha_i x, \quad v_i^{(k,2)} = A_{ik} \operatorname{ch} \gamma_{ik} z \sin \alpha_i x, \quad v_i^{(k,3)} = B_{ik} \cos \beta_i z \operatorname{sh} \tau_{ik} x. \quad (3.22)$$

Здесь  $A_{ik}, B_{ik}, \gamma_{ik}, \tau_{ik}$  определяются по формулам (3.21), в которых

$$\alpha_i = \frac{(2i-1)\pi}{2x_0}, \quad \mu_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \beta_i = \begin{cases} \frac{(i-1)\pi}{h} & \text{при } k \neq 0; \\ \frac{i\pi}{h} & \text{при } k = 0, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 2, 4, \dots$$

Следует заметить, что с учетом симметрии рассматриваемых функций криволинейные интегралы, входящие в элементы алгебраических систем, следует вычислять лишь по симметричной части областей  $G_s$ .

**4. Определение частот и присоединенных масс жидкости.** В соответствии с изложенным выше для построения функции  $g_p^{(k,s)}(x, z)$  нам необходимо при каждом фиксированном значении числа  $k$  располагать набором решений следующих неоднородных краевых задач в подобластях  $G_s$ ,  $s = 1, 2$ :

$$\Delta H_p^{(k,s)}(x, z) - \mu_k^2 H_p^{(k,s)}(x, z) = 0, \quad (x, z) \in G_s, \quad (4.1)$$

$$\left( \frac{\partial H_p^{(k,s)}}{\partial \nu} \right)_{\Gamma_s \setminus \gamma} = - \left( \frac{\partial \Phi_p^{(k,s)}}{\partial \nu} \right)_{\Gamma_s \setminus \gamma}, \quad \left( \frac{\partial H_p^{(k,s)}}{\partial z} \right)_{\gamma_0 \cup \gamma} = 0,$$

где  $\Phi_p^{(k,s)}$  — построенные ранее регуляризирующие функции.

Представим функции  $H_p^{(k,s)}(x, z)$  в виде отрезка обобщенного ряда

$$H_p^{(k,s)}(x, z) = \sum_{i=1}^{I_0} h_{i,p}^{(k,s)} W_i^{(k,s)}(x, z). \quad (4.2)$$

Здесь  $W_i^{(k,s)}(x, z)$  — координатные функции для подобластей  $G_s$ , построенные в соответствии с методикой, изложенной в предыдущем пункте.

Постоянные  $h_{i,p}^{(k,s)}$ , образующие собой вектор-столбцы  $\vec{h}_p^{(k,s)} = \{h_{1,p}^{(k,s)}, h_{2,p}^{(k,s)}, \dots, h_{I_0,p}^{(k,s)}\}$ , будем определять из условия минимума функционалов для краевых задач (4.1). При этом получим следующие алгебраические системы:

$$A^{(k,s)} \vec{h}_p^{(k,s)} = \vec{d}_p^{(k,s)}, \quad p = 1, 2, \dots, P_0, \quad (4.3)$$

где элементы  $a_{ij}^{(k,s)}$  симметричных матриц  $A^{(k,s)}$  вычисляются по формулам (3.3), а элементы  $d_{p,j}^{(k,s)}$  вектор-столбцов  $\vec{d}_p^{(k,s)}$  определяются выражениями

$$d_{p,j}^{(k,s)} = - \int_{\Gamma_s \setminus \gamma} W_j^{(k,s)} \frac{\partial \Phi_p^{(k,s)}}{\partial \nu} dS = - \int_{\Gamma_s \cup \gamma_0} \Phi_p^{(k,s)} \frac{\partial W_j^{(k,s)}}{\partial \nu} dS, \quad (4.4)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, I_0, \quad p = 1, 2, \dots, P_0.$$

При этом функции  $g_p^{(k,s)}(x, z)$  определяются формулами

$$g_p^{(k,s)}(x, z) = \Phi_p^{(k,s)}(x, z) + \sum_{i=1}^{I_0} h_{i,p}^{(k,s)} W_i^{(k,s)}(x, z). \quad (4.5)$$

После определения собственных значений  $\beta_n^{(k)}$  и собственных векторов  $\vec{a}^{(n,k)}$  обобщенной алгебраической задачи (3.3) волновые функции  $\varphi_{ni}^{(s)}(x, y, z)$  в подобластях  $G_s$ ,  $s = 1, 2$ , будут иметь вид

$$\varphi_{ni}^{(1)} = \left[ \sum_{p=1}^{P_0} x_p^{(k)} g_p^{(k,1)}(x, z) + \sum_{n=1}^{N_0} y_n^{(k)} s_n^{(k)}(x, z) \right] \cos \mu_k \left( y + \frac{l}{2} \right), \quad (4.6)$$

$$\varphi_{ni}^{(2)} = \sum_{p=1}^{P_0} x_p^{(k)} g_p^{(k,2)}(x, z) \cos \mu_k \left( y + \frac{l}{2} \right), \quad \mu_k = \frac{k\pi}{l},$$

где постоянные  $x_p^{(k)}$  и  $y_n^{(k)}$  находятся по формулам (2.16) и (2.17).

Значение индекса  $i = 1$  соответствует поперечным колебаниям жидкости, для которых  $k = 0$ , а значение индекса  $i = 2$  — продольным колебаниям жидкости, для которых  $k = 1, 3, 5, \dots$ . Таким образом, формульные схемы определения волновых движений жидкости в двух плоскостях симметрии полости отличаются одна от другой лишь значениями целых чисел  $k$ .

Построения решений неоднородных краевых задач, связанных с определением потенциалов Стокса – Жуковского  $\Omega_1(x, y, z)$  и  $\Omega_2(x, z)$ , несколько отличаются одно от другого.

Перейдем теперь к определению гидродинамических коэффициентов уравнений движения твердого тела с рассматриваемой полостью.

Пусть рассматриваемая механическая система совершает движение в плоскости  $Oxz$ . Определение потенциала  $\Omega_2(x, z)$  связано с решением двумерного уравнения Лапласа в области поперечного сечения полости  $G$  при неоднородном граничном условии

$$\left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial \nu} \right)_{L_0 \cup L} = z \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, z) = u. \quad (4.7)$$

В соответствии с общей методикой решения неоднородных краевых задач в рассматриваемой области представим функцию  $\Omega_2(x, z)$  в виде

$$\Omega_2 = \begin{cases} \Omega_2^{(1)}(x, z) + \sum_{p=1}^{P_0} z_p^{(0)} g_p^{(0,1)}(x, z), & (x, z) \in G_1; \\ \Omega_2^{(2)}(x, z) + \sum_{p=1}^{P_0} z_p^{(0)} g_p^{(0,2)}(x, z), & (x, z) \in G_2. \end{cases} \quad (4.8)$$

Здесь  $g_p^{(0,s)}(x, z)$  — ранее введенные вспомогательные функции, а  $\Omega_2^{(s)}(x, z)$   $s = 1, 2$ , — гармонические функции, которые принимают граничные условия

$$\left( \frac{\partial \Omega_2^{(s)}}{\partial \nu} \right)_{\Gamma_s \cup \gamma_0} = u. \quad (4.9)$$

Представим функции  $\Omega_2^{(s)}(x, z)$  в виде разложения

$$\Omega_2^{(s)}(x, z) = \sum_{i=1}^{I_0} b_i^{(s)} W_i^{(0,s)}(x, z). \quad (4.10)$$

Тогда в соответствии с вариационным методом определение постоянных  $b_i^{(s)}$  сводится к решению неоднородных алгебраических систем

$$A^{(0,s)} \vec{b}^{(s)} = \vec{c}^{(s)}, \quad (4.11)$$

где компоненты векторов-столбцов  $\vec{c}^{(s)}$  вычисляются по формулам

$$c_j^{(s)} = \int_{\Gamma_s \cup \gamma_0} u W_j^{(0,s)}(x, z) dS, \quad j = 1, 2, \dots, I_0. \quad (4.12)$$

Постоянные  $z_p^{(0)}$  находятся из решения алгебраической системы (2.7), где

$$\gamma_q^{(0)} = \int_0^a \left[ \Omega_2^{(1)}(x, 0) - \Omega_2^{(2)}(x, 0) \right] f_q^{(0)}(x) dx, \quad (4.13)$$

$$\alpha_{pq}^{(0)} = \int_0^a \left[ g_p^{(0,2)}(x, 0) - g_p^{(0,1)}(x, 0) \right] f_q^{(0)}(x) dx.$$

Заметим, что все встречающиеся контурные интегралы в дальнейшем вычисляются лишь по симметричной части контуров областей  $G_s$ .

С учетом полученных результатов гидродинамические коэффициенты уравнений движения рассматриваемой механической системы в плоскости  $O^*x^*z^*$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}\lambda_{n1} &= \int_{\Sigma} x \frac{\partial \varphi_{n1}}{\partial z} d\Sigma = 2l \sum_{m=1}^{N_0} \beta_m^{(0)} y_m^{(0)} \left\{ \sum_{i=1}^{I_0} a_i^{(m,0)} \int_0^{x_0} \left( W_i^{(0,1)} \right)_{z=h_1} x dx \right\}, \\ \mu_n &= \int_{\Sigma} \varphi_{n1} \frac{\partial \varphi_{n1}}{\partial z} d\Sigma = 2l \left\{ \sum_{m=1}^{N_0} (y_m^{(0)})^2 N_m^{(0)} - \sum_{m=1}^{N_0} \sum_{p=1}^{P_0} x_p^{(0)} y_m^{(0)} \beta_{mp}^{(0)} \right\}, \\ \lambda_{0n2} &= \int_{\Sigma} \Omega_2 \frac{\partial \varphi_{n1}}{\partial z} d\Sigma = 2l \left\{ \sum_{m=1}^{N_0} y_m^{(0)} \lambda_{0m}^{(1)} - \sum_{m=1}^{N_0} \sum_{p=1}^{P_0} z_p^{(0)} y_m^{(0)} \beta_{mp}^{(0)} \right\},\end{aligned}\tag{4.14}$$

$$\lambda_{0m}^{(1)} = \beta_m^{(0)} \sum_{i=1}^{I_0} \sum_{j=1}^{I_0} b_i^{(1)} a_j^{(m,0)} b_{i,j}^{(0)},$$

$$\begin{aligned}I_{22} &= \int_{\Sigma \cup S} \Omega_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial \nu} dS = 2l \left\{ \int_{\Gamma_1} \Omega_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial \nu} dS + \int_{\Gamma_2} \Omega_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial \nu} dS \right\} = \\ &= 2l \left\{ I_{22}^{(1)} + I_{22}^{(2)} - 2 \sum_{p=1}^{P_0} z_p^{(0)} \gamma_p^{(0)} + \sum_{p=1}^{P_0} \sum_{q=1}^{P_0} z_p^{(0)} z_q^{(0)} \alpha_{pq}^{(0)} \right\},\end{aligned}$$

$$I_{22}^{(s)} = \sum_{i=1}^{I_0} b_i^{(s)} c_i^{(s)}, \quad s = 1, 2,$$

где  $h_1$  — высота жидкости над перегородками,  $x_0$  — координата пересечения контура области  $G_1$  с прямой  $z = h_1$ .

Пусть тело с рассматриваемой полостью совершает поступательные и угловые движения в плоскости  $Oyz$ . Согласно изложенному выше гармоническую функцию  $\Omega_1(x, y, z)$  можно представить в виде

$$\Omega_1 = -yz - \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{8}{l\mu_k^2} \Psi_k(x, z) \cos \mu_k \left( y + \frac{l}{2} \right).\tag{4.15}$$

В свою очередь, функции  $\Psi_k(x, z)$  имеют следующее представление:

$$\Psi_k = \begin{cases} \Psi^{(k,1)}(x, z) + \sum_{p=1}^{P_0} z_p^{(k)} g_p^{(k,1)}(x, z), & (x, z) \in G_1; \\ \Psi^{(k,2)}(x, z) + \sum_{p=1}^{P_0} z_p^{(k)} g_p^{(k,2)}(x, z), & (x, z) \in G_2. \end{cases} \quad (4.16)$$

Здесь  $g_p^{(k,s)}(x, z)$  — ранее введенные функции, а  $\Psi^{(k,s)}(x, z)$  — функции, которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца и подчинены граничным условиям

$$\left( \frac{\partial \Psi^{(k,s)}}{\partial \nu} \right)_{\Gamma_s \cup \gamma_0} = \cos(\nu, z), \quad s = 1, 2. \quad (4.17)$$

Решение краевых задач для функций  $\Psi^{(k,s)}(x, z)$  будем искать вариационным методом, представив их в виде

$$\Psi^{(k,s)}(x, z) = \sum_{i=1}^{I_0} b_i^{(k,s)} W_i^{(k,s)}(x, z), \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (4.18)$$

В результате применения процедуры Ритца при отыскании стационарных значений соответствующих функционалов получим неоднородные алгебраические системы относительно постоянных  $b_i^{(k,s)}$ :

$$A^{(k,s)} \vec{b}^{(k,s)} = \vec{c}^{(k,s)}, \quad (4.19)$$

где компоненты  $c_j^{(k,s)}$  векторов  $\vec{c}^{(k,s)}$  вычисляются по формулам

$$c_j^{(k,s)} = \int_{\Gamma_s \cup \gamma_0} W_j^{(k,s)}(x, z) \cos(\nu, z) dS, \quad j = 1, 2, \dots, I_0.$$

Постоянные  $z_p^{(k)}$  определяются из решения алгебраических систем (2.7), элементы которых имеют вид

$$\alpha_{pq}^{(k)} = \int_0^a [g_p^{(k,2)}(x, 0) - g_p^{(k,1)}(x, 0)] f_q^{(k)} dx, \quad (4.20)$$

$$\gamma_q^{(k)} = \int_0^a [\Psi^{(k,1)}(x, 0) - \Psi^{(k,2)}(x, 0)] f_q^{(k)} dx,$$

$$q = 1, 2, \dots, P_0.$$

С учетом того, что элементы алгебраических систем, полученных на основе метода Ритца, вычисляются с помощью контурных интегралов лишь по симметричной части границ областей  $G_s$ , гидродинамические коэффициенты уравнений движения системы в плоскости  $Oyz$  будут иметь вид

$$\begin{aligned}\lambda_{n2} &= \int_{\Sigma} y \frac{\partial \varphi_{n2}}{\partial z} dS = -\frac{4}{\mu_k^2} \sum_{m=1}^{N_0} y_m^{(k)} \beta_m^{(k)} \left( \sum_{i=1}^{I_0} a_i^{(m,k)} \int_0^{x_0} W_i^{(k,1)}(x, h_1) dx \right), \\ \mu_{n2} &= \int_{\Sigma} \varphi_{n2} \frac{\partial \varphi_{n2}}{\partial z} dS = l \left[ \sum_{m=1}^{N_0} (y_m^{(k)})^2 N_m^{(k)} - \sum_{p=1}^{P_0} \sum_{m=1}^{N_0} x_p^{(k)} y_m^{(k)} \beta_{mp}^{(k)} \right], \\ \lambda_{0n1} &= \int_{\Sigma} \Omega_1 \frac{\partial \varphi_{n2}}{\partial z} dS = -h_1 \lambda_{n2} - \frac{8}{\mu_k^2} \sum_{m=1}^{N_0} y_m^{(k)} D_m^{(k)},\end{aligned}\tag{4.21}$$

$$D_m^{(k)} = \beta_m^{(k)} \sum_{i=1}^{I_0} \sum_{j=1}^{I_0} b_i^{(k,1)} a_j^{(m,k)} b_{ij}^{(k)} - \sum_{p=1}^{P_0} z_p^{(k)} \beta_{mp}^{(k)},$$

$$\begin{aligned}I_{11} &= \int_{S \cup \Sigma} \Omega_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial \nu} dS = \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{64}{l \mu_k^4} \left[ I_k^{(1)} + I_k^{(2)} - 2 \sum_{p=1}^{P_0} z_p^{(k)} \gamma_p^{(k)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=1}^{P_0} \sum_{q=1}^{P_0} z_p^{(k)} z_q^{(k)} \alpha_{pq}^{(k)} \right] + 2 \int_G \left[ lz^2 - \frac{1}{4} l^3 \right] dG,\end{aligned}$$

$$I_k^{(1)} = \sum_{i=1}^{I_0} b_i^{(k,1)} c_i^{(k,1)}, \quad I_k^{(2)} = \sum_{i=1}^{I_0} b_i^{(k,2)} c_i^{(k,2)}.$$

Таким образом, вычисление коэффициентов (4.21) сводится к решению однородных и неоднородных алгебраических систем, а также к вычислению контурных интегралов при формировании их элементов.

**5. Некоторые результаты расчетов.** Для оценки эффективности предложенных координатных функций (3.20) приведем результаты расчета безразмерных гидродинамических коэффициентов (1.4) для случая цилиндрической полости с круговой направляющей без перегородок. Выбирая в качестве характерного линейного размера радиус поперечного сечения полости, полагаем, что безразмерная длина полости равна 2. Начало системы координат  $Oxyz$  свяжем с нижней точкой пересечения оси  $Oz$  с образующей полости. Сходимость первых трех частот продольных колебаний жидкости и коэффициентов уравнений для основного тона колебаний ( $m = 1, k = 1$ ) в зависимости от числа троек  $N$  координатных функций в разложениях для искомых решений при двух уровнях

заполнения жидкостью полости  $h$  приведена в табл. 1. При этом в сумме по индексу  $k$  в разложениях (1.9) для функции  $\Omega_1(x, y, z)$  удерживалось шесть членов.

Таблица 1

$N$	$\chi_{11}$	$\chi_{21}$	$\chi_{31}$	$m_{12}$	$c_{11}$	$I_{11}$
$h = 0,5$						
1	0,76062	5,83773	—	0,86191	0,11076	0,46546
2	0,76033	3,22260	13,4802	0,86082	0,11089	0,46616
3	0,76032	3,21532	6,87639	0,86077	0,11089	0,46617
4	0,76032	3,21435	6,85763	0,86077	0,11089	0,46618
5	0,76032	3,21412	6,85344	0,86077	0,11089	0,46617
6	0,76032	3,21404	6,85206	0,86077	0,11089	0,46617
7	0,76032	3,21401	6,85150	0,86077	0,11089	0,46617
8	0,76032	3,21400	6,85112	0,86077	0,11089	0,46617
9	0,76032	3,21399	6,85111	0,86077	0,11089	0,46617
$h = 1,5$						
4	1,63564	4,17934	7,72961	1,85533	0,49988	4,12019
5	1,63548	4,17233	7,66774	1,85520	0,49986	4,12020
6	1,63541	4,16977	7,65010	1,85520	0,49986	4,12021
7	1,63538	4,16874	7,64388	1,85520	0,49985	4,12021
8	1,63537	4,16831	7,64152	1,85520	0,49985	4,12022
9	1,63537	4,16812	7,64061	1,85520	0,49985	4,12022

Как видно из результатов, приведенных в табл. 1, увеличение глубины жидкости сопровождается замедлением сходимости в частотах и коэффициентах  $m_{12}$  и  $c_{11}$ , тогда как скорость сходимости для коэффициента  $I_{11}$  при этом практически не меняется. В целом же можно сделать вывод, что предложенные системы координатных функций позволяют достаточно эффективно решать однородные и неоднородные краевые задачи для уравнения Гельмгольца на основе их эквивалентных вариационных формулировок. Аналогичная сходимость для коэффициентов уравнений наблюдается и при движении полости в поперечной плоскости ее симметрии.

Влияние количества членов  $m$  в сумме (1.9) по индексу  $k$  на точность вычисления момента инерции  $I_{11}$  для разных значений параметра  $h$  видно из табл. 2. При этом количество координатных функций  $N$  в разложениях Трефтца полагалось равным 7.

Таблица 2

$h$	$m$						
	1	2	3	4	5	6	7
0,5	0,44932	0,46432	0,46517	0,46606	0,46615	0,46618	0,46618
1,0	1,66456	1,68827	1,69019	1,69055	1,69065	1,69067	1,69067
1,5	4,09292	4,71789	4,11980	4,12012	4,12019	4,12021	4,12021

Результаты, приведенные в табл. 2, свидетельствуют о быстрой сходимости рядов по индексу  $k$  при вычислении коэффициента  $I_{11}$ .

В пределах принятой точности вычислений полученные результаты расчета динамических характеристик жидкости для ее основного тона колебаний полностью совпадают с результатами работы [15], где краевые задачи решались вариационным методом в их пространственной постановке с использованием шаровых гармонических координатных функций. Совпадение результатов расчета частотных параметров жидкости наблюдается и с данными работы [18], где приближенное решение спектральной задачи для двумерного уравнения Гельмгольца построено с помощью специальных координатных функций, удовлетворяющих исходному уравнению.

Приведем некоторые результаты расчетов гидродинамических коэффициентов для полости в форме прямоугольного параллелепипеда с перегородками при движении ее в поперечной плоскости  $Oxz$ . Обозначим через  $h_1$  высоту подобласти  $G_1$ , а через  $h_2$  высоту подобласти  $G_2$ . В качестве характерного линейного размера выберем половину ширины параллелепипеда. Пусть полость имеет следующие безразмерные геометрические параметры:  $h_2 = 0,5$ ;  $l = 2$ . Влияние параметра  $P_0$  в разложениях (2.3) и (2.10) на точность вычисления коэффициентов уравнений движения рассматриваемой механической системы (1.4) для первого тона колебаний жидкости отражено в табл. 3.

Таблица 3

$P_0$	$h_1 = 0,1$				$h_1 = 0,5$			
	$\chi_{10}$	$m_{11}$	$c_{12}$	$I_{22}$	$\chi_{10}$	$m_{11}$	$c_{12}$	$I_{22}$
1	0,85689	1,12851	0,38090	0,75635	1,35748	1,78847	0,26254	0,92230
2	0,85789	1,13328	0,38287	0,75535	1,36090	1,79421	0,26204	0,92223
3	0,85798	1,13343	0,38290	0,75534	1,36090	1,79421	0,26204	0,92222
4	0,85798	1,13344	0,38290	0,75534	1,36090	1,79421	0,26204	0,92222

Результаты приведены для  $a = 0,7$ . Быстрая сходимость динамических характеристик жидкости в зависимости от количества членов в разложениях для нормальной производной от искомым решений на линии сопряжения подобластей  $G_1$  и  $G_2$  объясняется, в первую очередь, тем обстоятельством, что при построении приближенных решений учитывались их особенности на кромках перегородок. Этот факт существенно повысил эффективность предлагаемого алгоритма решения рассматриваемых граничных задач.

Зависимость гидродинамических коэффициентов уравнений от высоты жидкости над перегородками показана на рис. 2–5, где каждая кривая соответствует определенной ширине перегородок ( $d = 1 - a$ ).

Как видно из приведенных графиков, влияние перегородок на динамику жидкости особенно существенно, когда они расположены вблизи ее свободной поверхности. Все динамические характеристики жидкости заключены между соответствующими характеристиками для полости без перегородок и для полости со сплошной перегородкой в месте расположения конструктивных устройств.

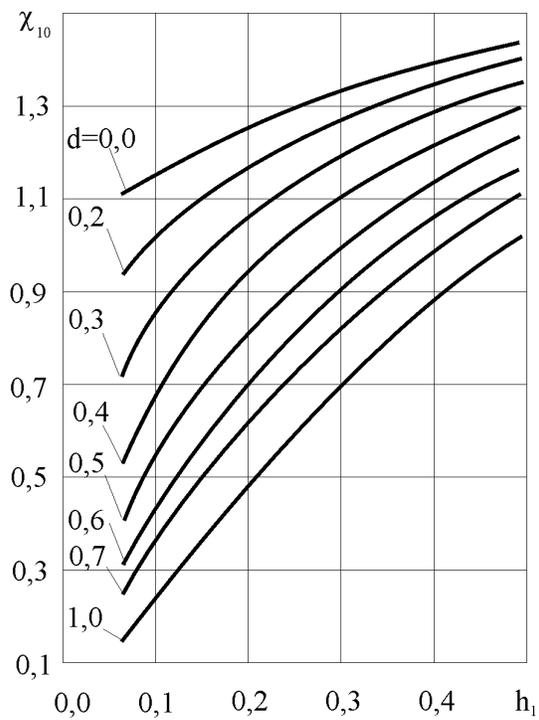


Рис. 2

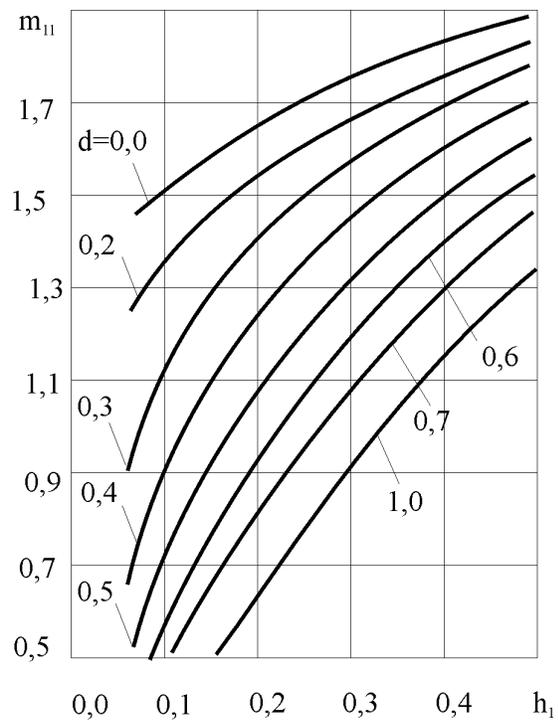


Рис. 3

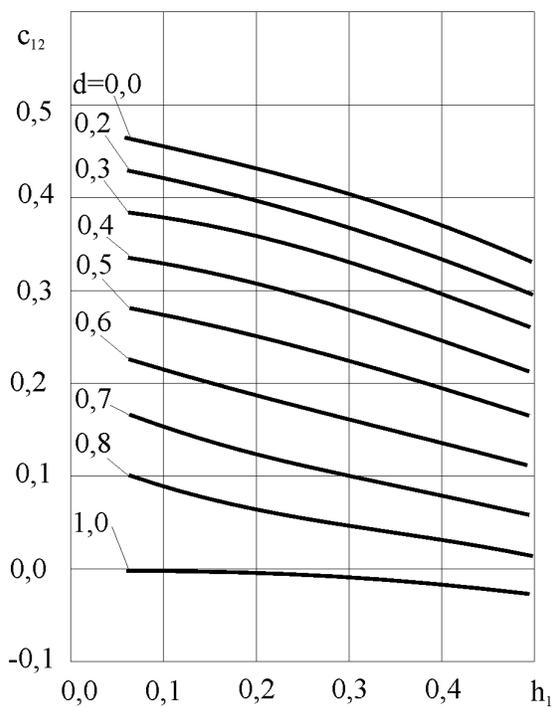


Рис. 4

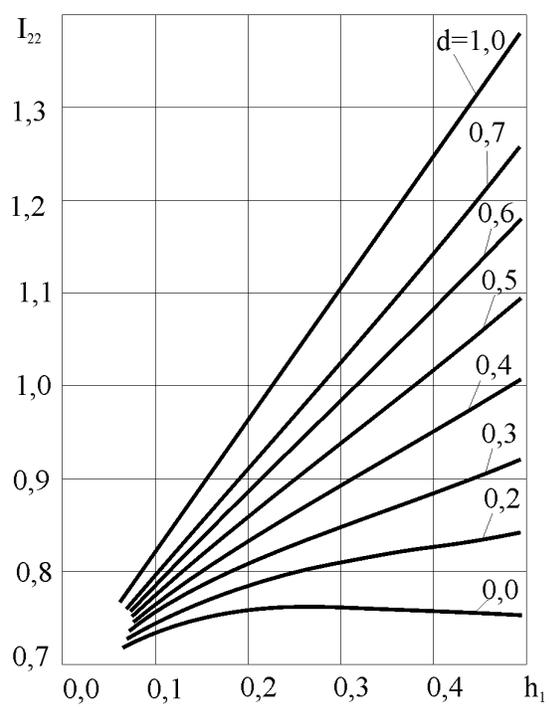


Рис. 5

**Заключение.** В работе построены приближенные решения однородных и неоднородных граничных задач теории возмущенного движения твердого тела с полостью в форме горизонтально расположенного цилиндра с произвольным симметричным относительно вертикальной оси сечением, которая частично заполнена идеальной и несжимаемой жидкостью и содержит продольные ребра-перегородки. Построение решений основано на сведении пространственных краевых задач для волновых функций и потенциалов Стокса – Жуковского к двумерным однородным и неоднородным краевым задачам для уравнения Гельмгольца в области поперечного сечения полости. На основе метода декомпозиции области, позволяющего учитывать сингулярности в искомых решениях на кромках перегородок, сформулированы вспомогательные краевые задачи в подобластях, для решения которых применяется вариационный метод.

Для вспомогательных краевых задач с разрывными граничными условиями построены регуляризирующие функции, которые точно удовлетворяют уравнению Гельмгольца, имеют замкнутый аналитический вид и подчиняются заданным разрывным граничным условиям на части границы области. Предложены новые системы координатных функций, позволяющие достаточно эффективно решать двумерные краевые задачи для уравнения Гельмгольца на основе метода Трэфтца. Разработана схема расчета гидродинамических коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с рассматриваемой полостью. На основе предложенных алгоритмов приведены некоторые результаты расчетов частот и присоединенных масс жидкости для конкретных полостей.

1. *Микишев Г.Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1978. — 248 с.
2. *Докучаев Л.В.* О присоединенном моменте инерции жидкости в цилиндре с перегородками, вращающемся около продольной оси // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. — 1964. — № 2. — С. 168–171.
3. *Ермаков В.И., Моисеев Г.А., Шершенев В.Г.* О возмущенном движении тела, содержащего цилиндрическую полость с ребрами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1970. — № 2. — С. 52–61.
4. *Морозов В.Н.* Применение разностного метода к решению краевых задач теории возмущенного движения твердого тела с жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью. — Новосибирск: Новосиб. электротехн. ин-т, 1974. — С. 161–165.
5. *Троценко В.А.* О возмущенном движении тела, содержащего полость с упругой кольцевой пластиной // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1975. — № 4. — С. 78–88.
6. *Vauer H.F.* Zur Belastung Trägheitsmoment Erhöhung und Schwappmassen Reduction durch Dämpfungsringe in Treibstofftank // Raumfahrtforschung. — 1967. — **11**, Н 4. — S. 163–171.
7. *Рабинович Б.И.* О влиянии внутренних ребер на динамические характеристики жидкости в подвижных контейнерах // Прикл. механика. — 1970. — **4**, вып. 8. — С. 103–111.
8. *Шетухин В.Л.* Колебания жидкости в осесимметричных сосудах с кольцевыми ребрами // Прикл. механика. — 1975. — **11**, вып. 8. — С. 89–95.
9. *Микишев Г.Н., Чурилов Г.А.* Некоторые результаты экспериментального определения гидродинамических коэффициентов для цилиндра с ребрами // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. — Томск: Том. ун-т, 1977. — С. 31–37.
10. *Богоряд И.Б.* Колебания вязкой жидкости в полости твердого тела. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. — 134 с.
11. *Бужинский В.А.* Вихревое сопротивление пластинки при колебаниях в маловязкой жидкости // Прикл. математика и механика. — 1990. — **54**, вып. 2. — С. 233–238.
12. *Бужинский В.А.* Колебания жидкости в резервуарах, содержащих конструктивные элементы с острыми кромками // Докл. РАН. — 1998. — **363**, № 1. — С. 53–55.

13. *Богомаз Г.И., Сирота С.А.* Колебания жидкости в баках. — Днепропетровск: Ин-т техн. механики НАН Украины, 2002. — 306 с.
14. *Галицын Д.А., Троценко В.А.* Определение частот и присоединенных масс жидкости в подвижной полости в форме прямоугольного параллелепипеда с перегородками // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2001. — № 2. — С. 175–191.
15. *Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. — Киев: Наук. думка, 1984. — 230 с.
16. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
17. *Петров А.А.* Колебания жидкости в цилиндрических сосудах с горизонтальной образующей // Вариационные методы в задачах о колебании жидкости и тела с жидкостью. — М.: ВЦ АН СССР, 1962. — С. 181–201.
18. *Барняк М.Я.* Приближенные методы решения задач динамики жидкости в горизонтальных и вертикальных цилиндрических полостях // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981. — С. 205–211.
19. *Комаренко А.Н.* Расчет динамических характеристик жидкости в горизонтально расположенном цилиндре // Аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. — С. 26–36.

Получено 02.01.2003