УДК 517.911

# СУЩЕСТВОВАНИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ $x(x') = f(t,x,x'),\ x(0) = 0$

**А. Е. Зернов, Ю. В. Кузина**

*Южноукр. пед. ун-т*
*Украина, 65020, Одесса, ул. Старопортофранковская, 26*
*e-mail: itim@inbox.ru*

*We consider a singular Cauchy problem and prove existence of continuously differentiable solutions satisfying necessary asymptotic properties.*

*Розглядається сингулярна задача Коші та доводиться існування неперервно диференційовних розв'язків з потрібними асимптотичними властивостями.*

Проблема разрешимости и числа решений сингулярной задачи Коши для дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных неизвестных, исследовалась во многих работах (см., например, [1 – 6]). Большое внимание уделялось и задаче Коши для дифференциальных уравнений неявного вида [3, 7 – 14]. Вместе с тем асимптотическое поведение решений задачи Коши для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных неизвестных, исследовано сравнительно мало. В настоящей работе предложены две схемы рассуждений, позволяющие изучить сингулярную задачу Коши неявного вида. Формулируются достаточные условия, при которых существует непустое множество непрерывно дифференцируемых решений с требуемыми асимптотическими свойствами. Одновременно изучается асимптотическое поведение первых производных решений. Выясняется вопрос о числе решений указанного вида. При этом используются методы качественной теории дифференциальных уравнений [2, 15 – 18].

Рассмотрим задачу Коши

$$x(x')^{\gamma} = a_{10}t + a_{01}x + \varphi(t,x,x'), \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $t \in (0,\tau)$ — действительная переменная, $x : (0,\tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная действительная функция, $\gamma$ — натуральное число, $\gamma \geqslant 2$, $a_{10}$, $a_{01}$ — постоянные, $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция,

$$\mathcal{D} = \{(t,x,y) : t \in (0,\tau),\ |x| < r_1 t,\ |y| < r_2\},\ \ |\varphi(t,x,y)| \leqslant t\xi(t),\ \ (t,x,y) \in \mathcal{D},$$

где $\xi : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция,

$$\lim_{t\to+0}\xi(t) = 0,\ \ \lim_{t\to+0} t\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} = \xi_0,\ \ 0 \leqslant \xi_0 < +\infty.$$

**Определение.** *Пусть $\rho$ — постоянная, $\rho \in (0, \tau)$. Будем называть $\rho$-решением задачи (1), (2) непрерывно дифференцируемую функцию $x\,:\,(0,\rho] \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:*

*1) $(t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D},\ t \in (0, \rho]$;*

*2) $x$ тождественно удовлетворяет уравнению (1) при $t \in (0, \rho]$.*

Пусть $c$ — действительный корень уравнения

$$c^{\gamma+1} = a_{10} + a_{01}c,$$

удовлетворяющий условиям

$$c \neq 0,\ \ |c| < \min\{r_1, r_2\},\ \ \frac{a_{01}}{\gamma c^{\gamma}} \neq \frac{1}{\gamma} + 1 + \xi_0.$$

Обозначим через $\mathcal{U}(\rho, M, q)$ множество непрерывно дифференцируемых функций $u\,:\,(0,\rho] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$|u(t) - ct| \leqslant Mt\xi(t),\ \ \left|u'(t) - c\right| \leqslant qM\xi(t),\ \ t \in (0, \rho]. \tag{3}$$

Здесь $\rho, M, q$ — положительные постоянные, $\rho < \tau$.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия:*

$$|\varphi(t_1, x, y) - \varphi(t_2, x, y)| \leqslant l_t(\mu)|t_1 - t_2|,\ \ (t_i, x, y) \in \mathcal{D},\ \ 0 < \mu \leqslant t_1, t_2 < \tau,$$

$$|\varphi(t, x_1, y) - \varphi(t, x_2, y)| \leqslant l_x(t)|x_1 - x_2|,\ \ (t, x_i, y) \in \mathcal{D},$$

$$|\varphi(t, x, y_1) - \varphi(t, x, y_2)| \leqslant l_y t|y_1 - y_2|,\ \ (t, x, y_i) \in \mathcal{D},\quad i \in \{1, 2\},$$

*где $l_t\,:\,(0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывная невозрастающая функция, $l_x\,:\,(0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $l'_x(t) \leqslant 0,\ t \in (0,\tau)$,*

$$\lim_{t\to+0} t\frac{l'_x(t)}{l_x(t)} = L_x,\ \ -\infty < L_x \leqslant 0;$$

*если $\dfrac{a_{01}}{\gamma c^{\gamma}} < 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0$, то $\dfrac{a_{01}}{\gamma c^{\gamma}} - 1 - \dfrac{1}{\gamma} - \xi_0 < L_x \leqslant 0$; $l_y$ — постоянная, $l_y < \gamma|c|^{\gamma}$.*

*Тогда:*

*1) если $\dfrac{a_{01}}{\gamma c^{\gamma}} > 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0$, то существуют $\rho$, $M$, $q$ такие, что задача (1), (2) имеет бесконечное множество $\rho$-решений, принадлежащих множеству $\mathcal{U}(\rho, M, q)$. При этом если постоянная $\alpha$ удовлетворяет условию*

$$|\alpha - c\rho| < M\rho\xi(\rho), \tag{4}$$

*то существует хотя бы одно $\rho$-решение $x_\alpha \in \mathcal{U}(\rho, M, q)$ задачи (1), (2) такое, что $x_\alpha(\rho) = \alpha$;*

*2) если* $\frac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} < 1 + \frac{1}{\gamma} + \xi_0$, *то существуют* $\rho,\ M,\ q$ *такие, что задача (1), (2) имеет хотя бы одно* $\rho$*-решение, принадлежащее множеству* $\mathcal{U}(\rho, M, q)$.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия:*

*1) если* $\frac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} < 1 + \frac{1}{\gamma}$, *или* $\frac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} > 1 + \frac{1}{\gamma} + \xi_0$, *то*

$$|\varphi(t, x_1, y) - \varphi(t, x_2, y)| \leqslant l_x t |x_1 - x_2|,\ \ (t, x_i, y) \in \mathcal{D},$$

$$|\varphi(t, x, y_1) - \varphi(t, x, y_2)| \leqslant l_y t |y_1 - y_2|,\ \ (t, x, y_i) \in \mathcal{D}, \quad i \in \{1, 2\},$$

*где* $l_x,\ l_y$ *— постоянные,*

$$l_x + l_y < \frac{\gamma |c|^\gamma \left| a_{01} - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \gamma c^\gamma \right|}{\left| a_{01} - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \gamma c^\gamma \right| + |a_{01} - c^\gamma|};$$

*2) если* $1 + \frac{1}{\gamma} \leqslant \frac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} < 1 + \frac{1}{\gamma} + \xi_0$, *то*

$$|\varphi(t, x_1, y) - \varphi(t, x_2, y)| \leqslant l_x t (\xi(t))^\sigma |x_1 - x_2|,\ \ (t, x_i, y) \in \mathcal{D},$$

$$|\varphi(t, x, y_1) - \varphi(t, x, y_2)| \leqslant l_y t (\xi(t))^\sigma |y_1 - y_2|,\ \ (t, x, y_i) \in \mathcal{D}, \quad i \in \{1, 2\},$$

*где* $l_x,\ l_y,\ \sigma$ *— постоянные,*

$$\frac{1}{\xi_0} \left( \frac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} - 1 - \frac{1}{\gamma} \right) < \sigma < 1.$$

*Тогда:*

*1) если* $\frac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} > 1 + \frac{1}{\gamma} + \xi_0$, *то существуют* $\rho,\ M,\ q$ *такие, что задача (1), (2) имеет бесконечное множество* $\rho$*-решений, принадлежащих множеству* $\mathcal{U}(\rho, M, q)$. *При этом если постоянная* $\alpha$ *удовлетворяет условию (4), то существует единственное* $\rho$*-решение* $x_\alpha \in \mathcal{U}(\rho, M, q)$ *задачи (1), (2) такое, что* $x_\alpha(\rho) = \alpha$*;*

*2) если* $\frac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} < 1 + \frac{1}{\gamma} + \xi_0$, *то существуют* $\rho,\ M,\ q$ *такие, что задача (1), (2) имеет единственное* $\rho$*-решение, принадлежащее множеству* $\mathcal{U}(\rho, M, q)$.

***Доказательство теоремы 1.*** Вначале выберем постоянные $\rho, M, q$. Пусть

$$\begin{gathered} M > \left| a_{01} - \left(1 + \frac{1}{\gamma} + \xi_0\right) \gamma c^\gamma \right|^{-1}, \\ q > \left( |a_{01} - c^\gamma| + \left| a_{01} - \left(1 + \frac{1}{\gamma} + \xi_0\right) \gamma c^\gamma \right| \right) (\gamma |c|^\gamma)^{-1}. \end{gathered} \tag{5}$$

Неравенства, определяющие выбор $\rho$, не приводим ввиду ограниченности объема статьи; отметим лишь, что $\rho$ достаточно мало. Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \max_{t\in[0,\rho]}\Big(|x(t)| + |x'(t)|\Big). \tag{6}$$

Обозначим через $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям (3), причем $u(0) = 0,\ u'(0) = c$ и, кроме того,

$$\forall \mu \in (0,\rho]\ \ \forall t_i \in [\mu,\rho],\ \ i \in \{1,2\} : |u'(t_1) - u'(t_2)| \leqslant K(\mu)|t_1 - t_2|,$$

где

$$K(\mu) = 2\Big(\gamma|c|^{\gamma} - l_y\Big)^{-1}\mu^{-1}\Big(|a_{01} - c^{\gamma}|(2|c|+1) + l_t(\mu) + l_x(\mu)(|c|+1) + 1\Big).$$

Множество $\mathcal{U}$ замкнуто, ограничено, выпукло и (на основании теоремы Арцела) компактно. Преобразуем уравнение (1) к виду

$$\gamma c^{\gamma} t(x' - c) = (a_{01} - c^{\gamma})(x - ct) - ct\sum_{r=2}^{\gamma} C_{\gamma}^{r} c^{\gamma - r}(x' - c)^{r} +$$

$$+\ (c^{\gamma} - (x')^{\gamma})(x - ct) + \varphi(t, x, x') \tag{7}$$

и будем рассматривать далее дифференциальное уравнение

$$x' = c + (\gamma c^{\gamma} t)^{-1}\Big((a_{01} - c^{\gamma})(x - ct) - ct\sum_{r=2}^{\gamma} C_{\gamma}^{r} c^{\gamma - r}(u'(t) - c)^{r} +$$

$$+\ (c^{\gamma} - (u'(t))^{\gamma})(u(t) - ct) + \varphi(t, u(t), u'(t))\Big), \tag{8}$$

где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Обозначим

$$\mathcal{D}_0 = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Если $(t,x) \in \mathcal{D}_0$, то для дифференциального уравнения (8) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Пусть

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - ct| = Mt\xi(t)\},\\
\mathcal{D}_1 &= \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - ct| < Mt\xi(t)\},\\
H &= \{(t,x) : t = \rho,\ |x - c\rho| < M\rho\xi(\rho)\}.
\end{aligned}$$

Определим функцию $A_1 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ равенством $A_1(t,x) = (x-ct)^2(t\xi(t))^{-2}$ и обозначим через $a_1 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ производную функции $A_1$ в силу уравнения (8). Поскольку

$$a_1(t,x) = 2(t\xi(t))^{-2}(\gamma c^\gamma t)^{-1}\left(\left(a_{01} - c^\gamma - \gamma c^\gamma - \gamma c^\gamma t\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right)(x-ct)^2 + \right.$$

$$\left. + (x-ct)\left(-ct\sum_{r=2}^{\gamma} C_\gamma^r c^{\gamma-r}(u'(t)-c)^r + (c^\gamma - (u'(t))^\gamma)(u(t)-ct) + \varphi(t,u(t),u'(t))\right)\right),$$

нетрудно убедиться в том, что

$$\operatorname{sign} a_1(t,x) = \operatorname{sign}\left(\frac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} - 1 - \frac{1}{\gamma} - \xi_0\right) \text{ при } (t,x) \in \Phi_1.$$

1. Пусть вначале $\dfrac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} > 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0$. Тогда $a_1(t,x) > 0$ при $(t,x) \in \Phi_1$. Отсюда следует, что если рассмотреть любую точку $(t_0, x_0) \in \Phi_1$ и обозначить через $J_0 : (t, x_0(t))$ интегральную кривую уравнения (8), проходящую через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ $(t, x_0(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_1$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leqslant \rho$) и $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_1$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Действительно,

$$A_1(t_0, x_0(t_0)) = A_1(t_0, x_0) = M^2, \;\; a_1(t_0, x_0(t_0)) = a_1(t_0, x_0) > 0,$$

и поэтому если $t_0 \in (0, \rho)$, то существует такое $\delta > 0$, что

$$\operatorname{sign}\Big(A_1(t, x_0(t)) - A_1(t_0, x_0(t_0))\Big) = \operatorname{sign}(t - t_0), \;\; 0 < |t - t_0| < \delta,$$

или

$$\operatorname{sign}\Big(|x_0(t) - ct|(t\xi(t))^{-1} - M\Big) = \operatorname{sign}(t - t_0), \;\; 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Если же $t_0 = \rho$, то существует такое $\delta > 0$, что

$$A_1(t, x_0(t)) < A_1(t_0, x_0(t_0)), \;\; t \in (\rho - \delta, \rho),$$

или

$$|x_0(t) - ct|(t\xi(t))^{-1} < M, \;\; t \in (\rho - \delta, \rho).$$

Отсюда следует, что каждая из интегральных кривых уравнения (8), пересекающих множество $H$, при убывании $t$ не может иметь общих точек с $\Phi_1$ и поэтому определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в $\mathcal{D}_1$ при всех $t \in (0, \rho]$. Пусть $G(\rho, x_G) \in H$ — произвольная фиксированная точка. Обозначим через $J_u : (t, x_u(t))$ интегральную кривую уравнения (8), проходящую через точку $G$. Ввиду изложенного $J_u : (t, x_u(t))$ лежит в $\mathcal{D}_1$ при $t \in (0, \rho]$. Поэтому

$$|x_u(t) - ct| \leqslant Mt\xi(t), \;\; t \in (0, \rho]. \tag{9}$$

Легко видеть, что

$$|x'_u(t) - c| \leqslant qM\xi(t), \;\; t \in (0, \rho], \tag{10}$$

и

$$\forall \mu \in (0, \rho] \;\; \forall t_i \in [\mu, \rho], \;\; i \in \{1, 2\} : |x'_u(t_1) - x'_u(t_2)| \leqslant K(\mu)|t_1 - t_2|. \tag{11}$$

Положим $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = c$. Тогда $x_u \in \mathcal{U}$. Определим оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, полагая $\mathrm{T}u = x_u$. Необходимо отметить, что точка $G(\rho, x_G)$ остается фиксированной при любом выборе функции $u \in \mathcal{U}$ в правой части уравнения (8), и поэтому $x_u(\rho) = x_G$ для всех $u \in \mathcal{U}$.

2. Пусть $\dfrac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} < 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0$. В этом случае $a_1(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_1$. Тогда [16, с. 758] среди интегральных кривых уравнения (8), пересекающих $H$, найдется хотя бы одна, которая определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в $\mathcal{D}_1$ при всех $t \in (0, \rho]$. Обозначим ее через $J_u : (t, x_u(t))$. Как и в случае 1, нетрудно убедиться в том, что выполнены условия (9)–(11). Положим $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = c$. Тогда $x_u \in \mathcal{U}$. Докажем, что уравнение (8) имеет единственную интегральную кривую с указанными свойствами, а именно — интегральную кривую $J_u : (t, x_u(t))$. Для этого рассмотрим однопараметрические семейства множеств

$$\Phi_2(\nu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \; |x - x_u(t)| = \nu t \xi(t)(-\ln t)\},$$

$$\mathcal{D}_2(\nu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \; |x - x_u(t)| < \nu t \xi(t)(-\ln t)\},$$

где $\nu$ — параметр, $\nu \in (0, 1]$. Определим функцию $A_2 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ равенством

$$A_2(t, x) = \Big(x - x_u(t)\Big)^2 \Big(t\xi(t)(-\ln t)\Big)^{-2}$$

и обозначим через $a_2 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ производную функции $A_2$ в силу уравнения (8). Поскольку

$$a_2(t, x) = 2\Big(t\xi(t)(-\ln t)\Big)^{-2} t^{-1} \Big(x - x_u(t)\Big)^2 \left(\frac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} - 1 - \frac{1}{\gamma} - t\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} - \frac{1}{\ln t}\right),$$

то $a_2(t, x) < 0$, если $(t, x) \in \mathcal{D}_0$, $x \neq x_u(t)$. При этом если $(t, x) \in \overline{\mathcal{D}}_1 \backslash \{0, 0\}$, то для любого фиксированного $\nu \in (0, 1]$

$$|x - x_u(t)| \leqslant |x - ct| + |x_u(t) - ct| \leqslant 2Mt\xi(t) < \nu t \xi(t)(-\ln t)$$

при $t \in (0, t(\nu)]$, где постоянная $t(\nu) \in (0, \rho)$ определяется из условия

$$\frac{1}{-\ln t} < \frac{\nu}{2M} \;\; \text{при} \;\; t \in (0, t(\nu)].$$

Отсюда [16, с. 758 – 759] следует справедливость доказываемого утверждения. Определим оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, полагая $\mathrm{T}u = x_u$.

Докажем, что $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ — непрерывный оператор. Пусть $u_i \in \mathcal{U}, i \in \{1, 2\}$, — произвольные фиксированные функции и $\mathrm{T}u_i = x_i, i \in \{1, 2\}$. Если $u_1 = u_2$, то $x_1 = x_2$. Пусть, далее, $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h, h > 0$. Обозначим

$$\Phi_3 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_2(t)| = \eta l_x(t) h^{\nu} (t\xi(t))^{1-\nu}\},$$

$$\mathcal{D}_3 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_2(t)| < \eta l_x(t) h^{\nu} (t\xi(t))^{1-\nu}\},$$

где $\nu$, $\eta$ — постоянные, удовлетворяющие следующим условиям:

если $\dfrac{a_{01}}{\gamma c^{\gamma}} > 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0$, то $0 < \nu < 1,\ \ \eta > \dfrac{4(2M)^{1-\nu}}{\gamma |c|^{\gamma}} \left( \dfrac{a_{01}}{\gamma c^{\gamma}} - 1 - \dfrac{1}{\gamma} - \xi_0 \right)^{-1}$;

если $\dfrac{a_{01}}{\gamma c^{\gamma}} < 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0$, то $0 < \nu < \min \left\{ 1, (1 + \xi_0)^{-1} \left( 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0 - \dfrac{a_{01}}{\gamma c^{\gamma}} + L_x \right) \right\}$,

$$\eta > \frac{4(2M)^{1-\nu}}{\gamma |c|^{\gamma}} \left( 1 + \frac{1}{\gamma} + \xi_0 - \frac{a_{01}}{\gamma c^{\gamma}} + L_x - \nu(1 + \xi_0) \right)^{-1}.$$

Определим функцию $A_3 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ равенством

$$A_3(t, x) = \Big( x - x_2(t) \Big)^2 \Big( l_x(t) (t\xi(t))^{1-\nu} \Big)^{-2}.$$

Пусть $a_3 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ — производная функции $A_3$ в силу дифференциального уравнения

$$x' = c + (\gamma c^{\gamma} t)^{-1} \Big( (a_{01} - c^{\gamma})(x - ct) - ct \sum_{r=2}^{\gamma} C_{\gamma}^{r} c^{\gamma - r} (u'_1(t) - c)^r +$$

$$+\ (c^{\gamma} - (u'_1(t))^{\gamma})(u_1(t) - ct) + \varphi(t, u_1(t), u'_1(t)) \Big). \tag{12}$$

Поскольку

$$a_3(t, x) = 2 \Big( l_x(t) (t\xi(t))^{1-\nu} \Big)^{-2} (\gamma c^{\gamma} t)^{-1} \left( \left( a_{01} - c^{\gamma} - \gamma c^{\gamma} t \frac{l'_x(t)}{l_x(t)} - (1 - \nu) \left( \gamma c^{\gamma} + \gamma c^{\gamma} t \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} \right) \right) \times \right.$$

$$\times\ (x - x_2(t))^2 + (x - x_2(t)) \left( -ct \sum_{r=2}^{\gamma} C_{\gamma}^{r} c^{\gamma - r} \Big( (u'_1(t) - c)^r - (u'_2(t) - c)^r \Big) + \right.$$

$$+\ \Big( (c^{\gamma} - (u'_1(t))^{\gamma})(u_1(t) - ct) - (c^{\gamma} - (u'_2(t))^{\gamma})(u_2(t) - ct) \Big) +$$

$$\left. \left. +\ \Big( \varphi(t, u_1(t), u'_1(t)) - \varphi(t, u_2(t), u'_2(t)) \Big) \right) \right),$$

причем

$$|u_1(t) - u_2(t)| = |u_1(t) - u_2(t)|^{\nu}|u_1(t) - u_2(t)|^{1-\nu} \leqslant$$

$$\leq \|u_1 - u_2\|^{\nu}_{\mathcal{B}}\Big(|u_1(t) - ct| + |u_2(t) - ct|\Big)^{1-\nu} \leqslant h^{\nu}\Big(2Mt\xi(t)\Big)^{1-\nu}, \ \ t \in (0, \rho],$$

$$|u'_1(t) - u'_2(t)| = |u'_1(t) - u'_2(t)|^{\nu} \leq \ |u'_1(t) - u'_2(t)|^{1-\nu} \leqslant$$

$$\leq \|u_1 - u_2\|^{\nu}_{\mathcal{B}}\Big(|u'_1(t) - c| + |u'_2(t) - c|\Big)^{1-\nu} \leqslant h^{\nu}\Big(2qM\xi(t)\Big)^{1-\nu}, \ \ t \in (0, \rho],$$

нетрудно убедиться в том, что

$$\operatorname{sign} a_3(t, x) = \operatorname{sign}\left(\frac{a_{01}}{\gamma c^{\gamma}} - 1 - \frac{1}{\gamma} - \xi_0\right) \ \text{ при } \ (t, x) \in \Phi_3.$$

1. Пусть $\dfrac{a_{01}}{\gamma c^{\gamma}} > 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0$. Тогда $a_3(t, x) > 0$ при $(t, x) \in \Phi_3$. Отсюда следует, что если рассмотреть любую точку $(t_0, x_0) \in \Phi_3$ и обозначить через $J_0 : (t, x_0(t))$ интегральную кривую уравнения (12), проходящую через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ $(t, x_0(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_3$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leqslant \rho$) и $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_3$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. (Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение относительно $\Phi_1$ в случае 1.) При этом $x_1(\rho) = x_2(\rho) = x_G$. Поэтому если $t$ уменьшается от $t = \rho$ до $t = 0$, то интегральная кривая $J_1 : (t, x_1(t))$ уравнения (12) не может иметь общих точек с $\Phi_3$. Значит, указанная интегральная кривая лежит в $\mathcal{D}_3$ при всех $t \in (0, \rho]$. Следовательно,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant \eta l_x(t) h^{\nu}(t\xi(t))^{1-\nu}, \ \ t \in (0, \rho]. \tag{13}$$

С помощью (13) получаем оценку

$$|x'_1(t) - x'_2(t)| \leqslant \frac{l_x(t)}{t} h^{\nu}\omega(t), \ \ t \in (0, \rho], \tag{14}$$

где $\omega : (0, \rho] \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0} \omega(t) = 0$. Поскольку $\rho$ достаточно мало, то из (13), (14) имеем

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \leqslant \frac{l_x(t)}{t} h^{\nu}, \ \ t \in (0, \rho]. \tag{15}$$

2. Пусть $\dfrac{a_{01}}{\gamma c^{\gamma}} < 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0$. Тогда $a_3(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_3$. Отсюда следует, что если $(t_0, x_0) \in \Phi_3$ — любая точка и $J_0 : (t, x_0(t))$ — интегральная кривая уравнения (12), проходящая через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_3$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leqslant \rho$) и $(t, x_0(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_3$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. (Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение относительно $\Phi_1$ в случае 2.) При этом

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant |x_1(t) - ct| + |x_2(t) - ct| \leqslant 2Mt\xi(t) < \eta l_x(t) h^{\nu}(t\xi(t))^{1-\nu},$$

если $t \in (0, t(h)]$, где постоянная $t(h) \in (0, \rho)$ определяется из условия

$$(t\xi(t))^{1-\nu} < \frac{\eta l_x(\rho)}{2M} h^\nu \ \text{ при } \ t \in (0, t(h)].$$

Это означает, что интегральная кривая $J_1 \ : \ (t, x_1(t))$ уравнения (12) лежит в $\mathcal{D}_3$ при $t \in (0, t(h)]$. Если $t$ увеличивается от $t = t(h)$ до $t = \rho$, то на основании изложенного указанная интегральная кривая не может иметь общих точек с $\Phi_3$. Поэтому она остается в $\mathcal{D}_3$ при всех $t \in (0, \rho]$. Далее, как и в случае 1, получаем оценки (13) – (15).

Перейдем непосредственно к доказательству непрерывности оператора $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Найдется такое $t_\varepsilon \in (0, \rho)$, что

$$2Mt\xi(t) + 2qM\xi(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ при } \ t \in (0, t_\varepsilon],$$

и поэтому

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant |x_1(t) - ct| + |x_2(t) - ct| + |x_1'(t) - c| +$$

$$+ \ |x_2'(t) - c| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ при } \ t \in (0, t_\varepsilon].$$

Пусть теперь $t \in [t_\varepsilon, \rho]$. Тогда из (15) получаем

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant \frac{l_x(t_\varepsilon)}{t_\varepsilon} h^\nu, \ \ t \in [t_\varepsilon, \rho]. \tag{16}$$

Положим

$$\delta(\varepsilon) = \left( \frac{\varepsilon t_\varepsilon}{2 l_x(t_\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Если $h < \delta(\varepsilon)$, то согласно (16)

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{17}$$

при $t \in [t_\varepsilon, \rho]$. Таким образом, если $h < \delta(\varepsilon)$, то неравенство (17) справедливо при всех $t \in (0, \rho]$, и поэтому

$$\max_{t \in [0,\rho]} \Big( |x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \Big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

или

$$\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

В итоге для любого $\varepsilon > 0$ указано $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h < < \delta(\varepsilon)$ следует

$$\|\mathrm{T}u_1 - \mathrm{T}u_2\|_{\mathcal{B}} = \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Проведенные рассуждения не зависят от выбора функций $u_i \in \mathcal{U},\ i \in \{1,2\}$. Непрерывность оператора $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно применить к оператору $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ теорему Шаудера о неподвижной точке.

***Доказательство теоремы 2.*** Вначале выберем постоянные $\rho, M, q$. Пусть $M, q$ удовлетворяют условиям (5). Условия, определяющие выбор $\rho$, здесь не приводим ввиду ограниченности объема статьи; отметим только, что $\rho$ достаточно мало. Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ с нормой (6). Обозначим через $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям (3), причем $u(0) = 0,\ u'(0) = c$. Множество $\mathcal{U}$ замкнуто и ограничено. Преобразовав уравнение (1) к виду (7), далее будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$x' = c + (\gamma c^\gamma t)^{-1}\Big((a_{01} - c^\gamma)(x - ct) - ct\sum_{r=2}^{\gamma} C_\gamma^r c^{\gamma-r}(u'(t) - c)^r +$$

$$+\ (c^\gamma - (u'(t))^\gamma)(x - ct) + \varphi(t, u(t), u'(t))\Big), \tag{18}$$

где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Пусть $\mathcal{D}_0 = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ x \in \mathbb{R}\}$. Если $(t,x) \in \mathcal{D}_0$, то для дифференциального уравнения (18) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Так же, как и при доказательстве теоремы 1, в каждом из случаев

$$1)\ \frac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} > 1 + \frac{1}{\gamma} + \xi_0 \ \text{ и } \ 2)\ \frac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} < 1 + \frac{1}{\gamma} + \xi_0$$

построим оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, положив $\mathrm{T}u = x_u$.

Докажем, что $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ — сжимающий оператор. Пусть $u_i \in \mathcal{U},\ i \in \{1,2\}$, — произвольные фиксированные функции и $\mathrm{T}u_i = x_i,\ i \in \{1,2\}$. Если $u_1 = u_2$, то $x_1 = x_2$. Пусть, далее, $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h,\ h > 0$. Обозначим

$$\Phi_4 = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| = \eta t(\xi(t))^\lambda h\},$$

$$\mathcal{D}_4 = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| < \eta t(\xi(t))^\lambda h\},$$

где $\eta,\ \lambda$ — постоянные, удовлетворяющие следующим условиям:

если $\dfrac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} > 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0$, или $\dfrac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} < 1 + \dfrac{1}{\gamma}$, то

$$\lambda = 0,\ \ \frac{l_x + l_y}{\left|a_{01} - \left(1 + \dfrac{1}{\gamma}\right)\gamma c^\gamma\right|} < \eta < \frac{\gamma|c|^\gamma - l_x - l_y}{|a_{01} - c^\gamma|};$$

если $1 + \dfrac{1}{\gamma} \leqslant \dfrac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} < 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0$, то

$$\lambda = \sigma,\ \ \eta > \frac{2(l_x + l_y)}{\gamma|c|^\gamma}\left(1 + \sigma\xi_0 - \frac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} + \frac{1}{\gamma}\right)^{-1}.$$

Определим функцию $A_4 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ равенством

$$A_4(t,x) = \Big(x - x_2(t)\Big)^2 \Big(t(\xi(t))^\lambda\Big)^{-2}$$

и обозначим через $a_4 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ производную функции $A_4$ в силу уравнения

$$x' = c + (\gamma c^\gamma t)^{-1} \Big((a_{01} - c^\gamma)(x - ct) - ct \sum_{r=2}^{\gamma} C_\gamma^r c^{\gamma - r}(u_1'(t) - c)^r +$$

$$+ \ (c^\gamma - (u_1'(t))^\gamma)(x - ct) + \varphi(t, u_1(t), u_1'(t))\Big). \qquad (19)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\operatorname{sign} a_4(t,x) = \operatorname{sign}\left(\frac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} - 1 - \frac{1}{\gamma} - \xi_0\right) \ \text{ при } \ (t,x) \in \Phi_4.$$

1. Пусть вначале $\dfrac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} > 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0$. Тогда $a_4(t,x) > 0$ при $(t,x) \in \Phi_4$. Отсюда следует, что если $(t_0, x_0) \in \Phi_4$ — любая точка и $J_0 : (t, x_0(t))$ — интегральная кривая уравнения (19), проходящая через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ $(t, x_0(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_4$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leqslant \rho$) и $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_4$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. (Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение относительно $\Phi_1$ при доказательстве теоремы 1.) При этом $x_1(\rho) = x_2(\rho) = x_G$. Поэтому если $t$ уменьшается от $t = \rho$ до $t = 0$, то интегральная кривая $J_1 : (t, x_1(t))$ уравнения (19) не может иметь общих точек с $\Phi_4$. Следовательно, указанная интегральная кривая лежит в $\mathcal{D}_4$ при всех $t \in (0, \rho]$. Значит,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant \eta t(\xi(t))^\lambda h, \ \ t \in (0, \rho]. \qquad (20)$$

2. Пусть теперь $\dfrac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} < 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0$. Тогда $a_4(t,x) < 0$ при $(t,x) \in \Phi_4$. Отсюда следует, что если $(t_0, x_0) \in \Phi_4$ — любая точка и $J_0 : (t, x_0(t))$ — интегральная кривая уравнения (19), проходящая через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_4$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leqslant \rho$) и $(t, x_0(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_4$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. (Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение относительно $\Phi_1$ при доказательстве теоремы 1.) При этом

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant |x_1(t) - ct| + |x_2(t) - ct| \leqslant 2Mt\xi(t) < \eta t(\xi(t))^\lambda h$$

при $t \in (0, t(h)]$, где $t(h) \in (0, \rho)$ достаточно мало. Это означает, что интегральная кривая $J_1 : (t, x_1(t))$ уравнения (19) лежит в $\mathcal{D}_4$ при $t \in (0, \rho]$. Если $t$ возрастает от $t = t(h)$ до $t = \rho$, то на основании изложенного выше указанная интегральная кривая не может иметь общих точек с $\Phi_4$ и поэтому она лежит в $\mathcal{D}_4$ при всех $t \in (0, \rho]$. Следовательно, выполнено условие (20). Полагая

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{|a_{01} - c^\gamma|\eta + l_x + l_y}{\gamma |c|^\gamma} + 1\right), \ \text{ если } \dfrac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} > 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0, \text{ или } \dfrac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} < 1 + \dfrac{1}{\gamma}; \\ \dfrac{1}{2}, \ \text{ если } 1 + \dfrac{1}{\gamma} \leqslant \dfrac{a_{01}}{\gamma c^\gamma} < 1 + \dfrac{1}{\gamma} + \xi_0, \end{cases}$$

с помощью (20), используя достаточную малость $\rho$, получаем

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant \theta h, \ \ t \in (0, \rho], \tag{21}$$

где, очевидно, $0 < \theta < 1$. Из (21) следует

$$\max_{t\in[0,\rho]} \big(|x_1(t) - x_2(t)| + |x'{}_1(t) - x'{}_2(t)|\big) \leqslant \theta h,$$

или

$$\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \theta h,$$

или, окончательно,

$$\|\mathrm{T}u_1 - \mathrm{T}u_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \theta \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}}, \ \text{ где } \ 0 < \theta < 1.$$

Проведенные рассуждения не зависят от выбора функций $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$. Следовательно, $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ — сжимающий оператор.

Для завершения доказательства теоремы 2 остается применить к оператору $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \to \mathcal{U}$ принцип Банаха сжатых отображений.


1. *Андреев А. Ф.* Усиление теоремы единственности $O$-кривой в $N_2$ // Докл. АН СССР. — 1962. — **146**, № 1. — С. 9 – 10.
2. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1972. — 664 с.
3. *Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Выща шк., 1974. — 472 с.
4. *Кигурадзе И. Т.* О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1965. — **1**, № 10. — С. 1271 – 1291.
5. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. — Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. — 352 с.
6. *Чечик В. А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1959. — № 8. — С. 155 – 198.
7. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
8. *Витюк А. Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных // Дифференц. уравнения. — 1971. — **7**, № 9. — С. 1575 – 1580.
9. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. вузов. Математика. — 1971. — № 9. — С. 79 – 84.
10. *Anichini G., Conti G.* Boundary value problems for implicit ODE's in a singular case // Different. Equat. and Dynam. Systems. — 1999. — **7**, № 4. — P. 437 – 459.
11. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, dx/dt) = 0$ // Ann. mat. pura ed appl. — 1959. — № 48. — P. 97 – 102.
12. *Frigon M., Kaczynski T.* Boundary value problems for systems of implicit differential gathers // J. Math. Anal. and Appl. — 1993. — **179**, № 2. — P. 317 – 326.
13. *Kowalski Z.* The polygonal method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ // Ann. pol. math. — 1963. — **13**, № 2. — P. 173 – 204.

14. *Kowalski Z.* A difference method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ // Ibid. — 1965. — **15**, № 2. — P. 121 – 148.

15. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

16. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши // Дифференц. уравнения. — 1992. — **28**, № 5. — С. 756 – 760.

17. *Зернов А. Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 3. — С. 302 – 310.

18. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Асимптотическое поведение решений задачи Коши $x' = f(t, x, x'),\ x(0) = 0$ // Там же. — 2002. — **54**, № 12. — С. 1698 – 1703.


*Получено 22.05.2003*