УДК 517.925.51

КРИТИЧНІ ВИПАДКИ π-СТІЙКОСТІ НЕАВТОНОМНОГО СУТТЄВО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ n-ГО ПОРЯДКУ

І. Є. Вітриченко

Нац. техн. ун-т України „КПІ”
Україна, 02057, Київ, пр. Перемоги, 37

We obtain sufficient conditions for π-stability of the trivial solution of an esentially nonlinear equation of order n.

Одержано достатні умови π-стійкості тривіального розв'язку суттєво нелійного рівняння n-го порядку.

1. Постановка задачі. Досліджується алгебраїчний критичний випадок π-стійкості, коли $t \uparrow \omega, \omega \leq +\infty$, положення рівноваги диференціального рівняння (д. р.) вигляду

$$y^{(n)} + \sum_{s=1}^{n-1} p_s(t) y^{(n-s)} + p_n(t) y = F\left[t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right], \tag{1}$$

де $t \in \Delta, \Delta \equiv [t_0, \omega[$ і виконуються умови:

1) $p_s : \Delta \mapsto \mathbf{R}, p_s \in \mathbf{C}^{\mathbf{h}}_{\Delta}, \mathbf{h} \in \mathbf{N}, s = \overline{1, n}$;

2) $F : \Delta \times \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}, F(t, Z) \equiv \sum\limits_{||Q||=2}^{m} F_Q(t) Z^Q + F^*(t, Z), Q = (q_1, \ldots, q_n), q_s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $s = \overline{1, n}, \|Q\| = \sum\limits_{s=1}^{n} q_s, F_Q : \Delta \mapsto \mathbf{R}, F_Q \in \mathbf{C}^{\mathbf{h}}_{\Delta}, \|Q\| = \overline{2, m}, Z = (z_1, \ldots, z_n), Z^Q \equiv \prod\limits_{s=1}^{n} z_s^{q_s}$, $|F^*(t, Z)| \leq L \|Z\|^{m+\alpha}, L : \Delta \mapsto \mathbf{R}_+ \cup \{0\}, L \in \mathbf{C}_{\Delta}, \|Z\| = \sum\limits_{s=1}^{n} |z_s|, m = 2, 3 \ldots, \alpha \in \mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+ \equiv]0, +\infty[$.

При дослідженні існування сім'ї зникаючих при $t \uparrow \omega$ розв'язків д. р. (1) застосування класичного означення стійкості за Ляпуновим [1] не завжди обґрунтоване. Оскільки при цьому д. р. вищого порядку зводиться до диференціальної системи (д. с.), яка потім досліджується на стійкість, то це призводить до накладання жорстких умов мализни на похідні розв'язків даного д. р., що не обов'язково.

Тому далі поведінка розв'язків д. р. (1) та їх похідних порівнюється з заданою системою функцій $\pi_s : \Delta \mapsto \mathbf{R}_+, s = \overline{1, n}$ [2]. Такі задачі виникають, наприклад, у теорії розповсюдження хвиль [3].

Введемо наступні означення та позначення.

Означення 1. *Д. р. (1) має властивість St_π, коли $t \uparrow \omega$, якщо для досить малого $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ існують $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$, $T_\varepsilon \in \Delta$ такі, що кожний його розв'язок $y = y(t)$ з початковою умовою $\pi_1^{-1}(T_\varepsilon)|y(T_\varepsilon)| \leq \delta_\varepsilon$, $\pi_s^{-1}(T_\varepsilon)|y^{(s-1)}(T_\varepsilon)| \leq \delta_\varepsilon$, $s = \overline{2, n}$, задовольняє нерівності $\pi_1^{-1}(t)|y(t)| < \varepsilon$, $\pi_s^{-1}(t)|y^{(s-1)}(t)| < \varepsilon$, $s = \overline{2, n}$, для усіх $t \in [T_\varepsilon, \omega[$ (локальна π-стійкість).*

Означення 2. *Д. р. (1) має властивість $AsSt_\pi$, коли $t \uparrow \omega$, якщо воно задовольняє означення 1 і $\pi_1^{-1}(t)y(t) = o(1)$, $\pi_s^{-1}(t)y^{(s-1)}(t) = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{2,n}$.*

Означення 3. *Д. р. (1) має властивість $G_\Delta St_\pi$, коли $t \uparrow \omega$, якщо в означенні 1 $T_\varepsilon = t_0$, тобто T_ε не залежить від ε (глобальна π-стійкість).*

Означення 4. *Д. р. (1) має властивість $G_\Delta AsSt_\pi$, коли $t \uparrow \omega$, якщо воно задовольняє означення 3 і $\pi_1^{-1}(t)y(t) = o(1)$, $\pi_s^{-1}(t)y^{(s-1)}(t) = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{2,n}$.*

Крім того,

$$\Lambda \equiv \mathrm{maxi}\{f_s : \Delta \mapsto \mathbf{C},\ s = \overline{1,n}],\quad \text{якщо}\quad \Lambda : \Delta \mapsto \mathbf{R}_+,$$

$$\Lambda^{-1} f_s = d_s + o(1), t \uparrow \omega, d_s \in \mathbf{C}, s = \overline{1,n}, |d_1| + \ldots + |d_n| > 0,$$

$$X = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n),\ \ Y = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_n),\ \ X_{n_s} = \mathrm{col}(x_{1,n_s}, \ldots, x_{n_s,n_s}),$$

$$X = \mathrm{col}(X_{n_1}, \ldots, X_{n_{k_0}}),\ \ XY \equiv \mathrm{col}(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n),\ \ X^{-1} \equiv \mathrm{col}(x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}),$$

$$\overline{0} = \mathrm{col}(0, \ldots, 0), \|X\|^2 = \sum_{s=1}^{n} |x_s|^2,\ \ \|P\|^2 \equiv \sum_{s,k=1}^{n} |p_{s,k}|^2,$$

$$P = \|p_{s,k}\|,\ s, k = \overline{1,n};\ \ \mathbf{S}(X, r_0) \equiv \{X :\ \|X\| \le r_0;\ r_0 \in \mathbf{R}_+\};\ \mathbf{R}_- \equiv]-\infty, 0[.$$

Означення 5. *Якщо $S_k(X) : \mathbf{S}(X, r_0) \mapsto \mathbf{R}_+$, $S_k(X) \in \mathbf{C}_{\mathbf{S}(X,r_0)}$, $S_k(\overline{0}) = 0$,$c_k \in \mathbf{R}_+$, $k = 1, 2$, то кільцеподібною областю, що охоплює початок координат, називається множина*

$$\mathbf{S}(X, c_1, c_2) \equiv \left\{X :\ X \in \mathbf{S}(X, r_0),\ \ \prod_{k=1}^{2} [S_k(X) - c_k] \le 0,\ \ S_1(X) - S_2(X) \ne c_1 - c_2\right\}.$$

Означення 6. *Наслідуючи Ляпунова [1], будемо вважати, що функція $V = V(t, X)$ має нескінченно малу вищу границю, якщо для кожного $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ існує $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$ таке, що для усіх $t \in \Delta$, $X \in \mathbf{S}(X, \delta_\varepsilon)$ виконується нерівність $|V(t, X)| \le \varepsilon$.*

Означення 7. *Функція $V = V(t, X)$ називається додатно визначеною, якщо існують $T \in \Delta$, $\rho_0 \in]0, r_0[$, $W(X) : \mathbf{S}(X, r_0) \mapsto \mathbf{R}_+$ такі, що для усіх $t \in [T, \omega]$, $X \in \mathbf{S}(X, \rho_0)$ виконується нерівність $V(t, X) \ge W(X)$.*

Позначимо

$$\mathrm{grad}\, V(t, X) \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right),\ \ < X, Y > \equiv \sum_{s=1}^{n} x_s y_s,$$

E_k і H_k — відповідно одинична і нільпотентна матриці розміру $k \times k$.

Існування властивостей St_π, $G_\Delta St_\pi$ у д. р. (1) досліджується при наявності кратного нульового кореня рівняння вигляду

$$\det(P_0 - \lambda \cdot E) = 0,$$

де

$$P_0 = \left\| \begin{array}{cccccccc} -a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} & b_{n-1} \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 & \dots & -c_{n-2} & -c_{n-1} & -c_n \end{array} \right\|,$$

$$a_k = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_k'}{\pi\pi_k}, \;\; b_k = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_{k+1}}{\pi\pi_k}, \;\; c_k = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_{n-k+1}\pi_k}{\pi}, \;\; c_n = \lim_{t\uparrow\omega} \pi^{-1} \left(p_1 + \frac{\pi_n'}{\pi_n} \right),$$

$$|a_k|, |b_k|, |c_k|, |c_n| \neq +\infty, k = \overline{1, n-1}, \;\; \sum_{k=1}^{n-1} (|a_k| + |b_k| + |c_k|) + |c_n| > 0,$$

$$\pi \equiv \mathrm{maxi} \left\{ p_1 + \frac{\pi_n'}{\pi_n}, \; \frac{p_{n-k+1}\pi_k}{\pi_n}, \; \frac{\pi_{k+1}}{\pi_k}, \; \frac{\pi_k'}{\pi_k}; \; k = \overline{1, n-1} \right\}. \tag{2}$$

2. Допоміжні результати. Наведемо перетворення, які зводять д. р. (1) до д. с. спеціального вигляду.

Лема 1. *Якщо для заданого набору функцій* $\pi_k : \Delta \mapsto \mathbf{R}_+$, $\pi_k \in \mathbf{C}^1_\Delta$, $s = \overline{1, n}$, *та коефіцієнтів* $p = p_k$, $k = \overline{1, n}$, *д. р. (1) існує функція* π *(2), то перетворення*

$$y = \pi_1 y_1, \;\; y^{(k)} = \pi_{k+1} y_{k+1}, \;\; k = \overline{1, n-1}, \tag{3}$$

зводить д. р. (1) до д. с. вигляду

$$Y' = \pi(P_0 + P_1)Y + G, \tag{4}$$

де $P_1 \equiv P - P_0$, $P = \|p_{sk}\|$, $s, k = \overline{1, n}$, $p_{ss} \equiv -\dfrac{\pi_s'}{\pi\pi_s}$, $s = \overline{1, n-1}$, $p_{sk} \equiv 0$, $s = \overline{2, n-1}$, $1 \leq k \leq s-1$, $p_{s,s+1} \equiv \dfrac{\pi_{s+1}}{\pi\pi_s}$, $s = \overline{1, n-1}$, $p_{sk} \equiv 0$, $s = \overline{1, n-2}$, $s+2 \leq k \leq$ $\leq n$, $p_{ns} \equiv -\dfrac{p_{n-s+1}\pi_s}{\pi}$, $s = \overline{1, n-1}$, $p_{nn} \equiv \pi^{-1}\left(p_1 + \dfrac{\pi_n'}{\pi_n} \right)$, $G \equiv \mathrm{col}\,(0, \dots, 0, G^*)$,

$$G^* \equiv \pi_n^{-1} F\left(t, \pi_1 y_1, \pi_2 y_2, \dots, \pi_n y_n\right), \quad G^* = \sum_{\|Q\|=2}^{m} \pi_n^{-1} F_Q \Pi^Q Y^Q + G^{**},$$

$$\Pi^Q \equiv \prod_{s=1}^{n} \pi_s^{q_s}, \|G^{**}\| \leq \pi_n^{-1} L \left(\sum_{s=1}^{n} \pi_s\right)^{m+\alpha} \|Y\|^{m+\alpha}.$$

Доведення очевидне.

Оскільки матриця P_0 має кратне нульове власне значення, то за певних умов методами узагальнених „зрізуючих” [4] та нелінійних „заморожених” [5] перетворень можна побудувати нелінійну неособливу заміну

$$Y = \sum_{\|Q\|=1}^{m} H_Q(t) X^Q \equiv H(t, X), \tag{5}$$

яка зводить д. с. (4) до д. с. вигляду

$$X'_{n_1} = \sigma_1 P_{n_1} X_{n_1} + \sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} h_{1,Q_{n_1}} X_{n_1}^{Q_{n_1}} + \Phi_{n_1}, \ \ n_1 \leq s_0,$$

$$X'_{n_s} = \sigma_s(\mu_s E_{n_s} + H_{n_s}) X_{n_s} + X_{n_s} \sum_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1} h_{s,Q_{n_1}} X_{n_1}^{Q_{n_1}} + \Phi_{n_s}, \tag{6}$$

$$s = \overline{2, k_0}, \ \ \sum_{s=1}^{k_0} n_s = n - n_1,$$

де $\sigma_s : \Delta \mapsto \mathbf{R}_+, h_{n_s,Q_{n_1}}, s = \overline{1, k_0}, \|Q_{n_1}\| = \overline{1, m}, \mu_s \in \mathbf{R} \backslash \{0\}, s = \overline{2, k_0},$ — відомі величини; $P_{n_1} \equiv \|0\|$ або $P_{n_1} \equiv \operatorname{diag}\{\mu_{n_1,1} E_{p_1} + H_{p_1}, \ldots, \mu_{n_1,l} E_{n_l} + H_{n_l}\}$, $\mu_{n_1,k} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $k = \overline{1, l}$, $\sum_{k=1}^{l} p_k = n_1$, а величини Φ_{n_s} малі у деякому розумінні, $\sigma_1 \sigma_s^{-1} = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{2, k_0}$, X_{n_1} — субвектор критичних змінних.

Основні результати. Вилучимо з д. с. (6) д. с. стосовно лише критичних змінних

$$X'_{n_1} = \sigma_1 P_{n_1} X_{n_1} + \sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} h_{1,Q_{n_1}} X_{n_1}^{Q_{n_1}}. \tag{7}$$

Припустимо, що д. с. (7) зводиться до еквівалентного їй д. р. n_1-го порядку стосовно однієї з компонент субвектора X_{n_1}. Скориставшись методами, викладеними в [6, 7], знайдемо асимптотичні зображення усіх правильних розв'язків утвореного д. р. Позначимо через $X_{n_1} = \Psi_{j,n_1}$, $j = \overline{1, p}$, асимптотичні зображення тих розв'язків д. с. (7), які відповідають правильним розв'язкам д. р. n_1-го порядку і компоненти яких зберігають знак для усіх $t \in \Delta$. Позначимо також через $\mathbf{R}_j^n$, $j = \overline{1, p}$, таке об'єднання координатних кутів простору $\mathbf{R}^n$, що $(\Psi_{j,n_1}, \overline{0}) \in \mathbf{R}_j^n$, $t \in \Delta$, $j = \overline{1, p}$, і $\bigcup_{j=1}^{p} \mathbf{R}_j^n \equiv \mathbf{R}^n$, $\operatorname{mes} \mathbf{R}_s^n \cap \mathbf{R}_k^n = 0$, $s \neq k$, $s, k = \overline{1, p}$.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 1. *Нехай д. с. (1) така, що:*

1) існують заміни (3), (5), які зводять її до д. с. (6), де $\mu_s \in \mathbf{R}_-$, $s = \overline{2, k_0}$*;*

2) для усіх $T^* \in \Delta$, $X^* \in \mathbf{S}(X, r_0)$ *існує розв'язок* $X = X(t; T^*, X^*)$ *задачі Коші д. с. (6);*

3) існує набір $X_{n_1} = \Psi_{j,n_1}$, $j = \overline{1,p}$, *вектор-стовпців асимптотичних зображень розв'язків д. с. (7) такий, що* $(\Psi_{j,n_1}, \overline{0}) \in \mathbf{R}^n_j$, $t \in \Delta$, $\|\Psi_{j,n_1}\| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $j = \overline{1,p}$*;*

4) існують додатно визначені функції Ляпунова $V = V_{j1}(X_{n_1})$ *такі, що для усіх* $t \in \in \Delta$ *та* $(X_{n_1}, \overline{0}) \in \mathbf{R}^n_j \cap \mathbf{S}(X, r_0)$

$$\left\langle \operatorname{grad} V_{j1}(X_{n_1}), \left(\sigma_1 P_{n_1} - \Psi'_{j,n_1}\Psi^{-1}_{j,n_1}E_{n_1}\right)X_{n_1} + \Psi^{-1}_{j,n_1}\sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} h_{1,Q_{n_1}}\Psi^{Q_{n_1}}_{j,n_1}X^{Q_{n_1}}_{n_1}\right\rangle \equiv$$

$$\equiv \Lambda_j[W_{j,0}(X_{n_1}) + W_{j,1}(t, X_{n_1})],$$

$$\Lambda_j \equiv \operatorname{maxi}\left\{\left\|\sigma_1 P_{n_1} - \Psi'_{j,n_1}\Psi^{-1}_{j,n_1}E_{n_1}\right\|,\ \left\|\Psi^{-1}_{j,n_1}h_{1,Q_{n_1}}\Psi^{Q_{n_1}}_{j,n_1}\right\|;\ \|Q_{n_1}\| = \overline{2,m}\right\};$$

5) існують функції $\nu_{js} : \Delta \mapsto \mathbf{R}$ *такі, що* $\nu_{js} \in \mathbf{C}^{\mathbf{1}}_{\Delta}$, $|\nu_{js}| : \Delta \mapsto \mathbf{R}_+$, $\nu'_{js}(\sigma_s\nu_{js})^{-1} = = \nu^0_{js} + o_{js}(1)$, $t \uparrow \omega$, $\nu^0_{js} \in \mathbf{R}$, $\sigma_s - \nu^0_{js} \in \mathbf{R}_-$, $s = \overline{2, k_0}$, $(\Psi_{j,n_1}, \nu_{j2}E_{n_2}, \ldots, \nu_{jk_0}E_{n_{k_0}}) \in \mathbf{R}^n_j$, $t \in \Delta$, $j = \overline{1,p}$*;*

6) для кожної кільцеподібної області $\mathbf{S}(X, c_1, c_2) \subset \mathbf{S}(X, r_0)$*, що охоплює початок координат,* $|G(t,X)| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, *де*

$$G(t,X) \equiv \left[-\Lambda_j W_{j,0}(X_{n_1}) + \sum_{s=2}^{k_0}\sigma_s\|X_{n_s}\|^2\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\left|\left\langle \operatorname{grad} V_{j1}(X_{n_1}), \Lambda_j W_{j1}(t, X_{n_1}) + \Psi^{-1}_{j,n_1}\Phi_{n_1}(t, \Psi_{n_1}X_{n_1}, \nu_{j2}X_{n_2}, \ldots, \nu_{jk_0}X_{n_{k_0}})\right\rangle\right| + \right.$$

$$+ \sum_{s=2}^{k_0}\left|\left\langle \operatorname{grad} V_{js}(X_{n_s}), \nu^{-1}_{js}X_{n_s}\sum_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1} h_{s,Q_{n_1}}\Psi^{Q_{n_1}}_{n_1}X^{Q_{n_1}}_{n_1} + \left(\sigma_s\nu^0_{js} - \nu'_{js}\nu^{-1}_{js}\right)X_{n_s} + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\ \nu^{-1}_{js}\Phi_{n_s}(t, \Psi_{n_1}X_{n_1}, \nu_{j2}X_{n_2}, \ldots, \nu_{jk_0}X_{n_{k_0}})\right\rangle\right|\right],$$

$$\inf_{X \in S_2 = c_2} V_j(X) > \sup_{X \in S_1 = c_1} V_j(X),$$

$V_j(X) \equiv \sum\limits_{s=1}^{k_0} V_{js}(X_{n_s})$*, якщо* $X \in \mathbf{R}_j^n$*,* $j = \overline{1,p}$*, а* $V_{js}(X_{n_s})$*,* $s = \overline{2,k_0}$*,* $j = \overline{1,p}$*, — додатно визначені квадратичні форми-розв'язки д. р. вигляду*

$$\left\langle \operatorname{grad} V_{js}(X_{n_s}), \left[\left(\mu_s - \nu_{js}^0\right) E_{n_s} + H_{n_s}\right] X_{n_s} \right\rangle = -\left\|X_{n_s}\right\|^2, \ j = \overline{1,p}, \ s = \overline{2,k_0}$$

($S_2 = c_2$ *і* $S_1 = c_1$ *— відповідно зовнішня та внутрішня границі області* $\mathbf{S}(X, c_1, c_2)$*), і для усіх* $X \in \mathbf{S}(X, r_0)$

$$\left\| H(\Psi_{jn_1} X_{n_1}, \nu_{j2} X_{n_2}, \ldots, \nu_{jk_0} X_{n_{k_0}}) \right\| = o(1), \ t \uparrow \omega, \ j = \overline{1,p}.$$

Тоді воно має властивість $AsSt_\pi$*, коли* $t \uparrow \omega$*.*

Доведення. Виконавши для д. р. (1) заміни (3), (5), одержимо д. с., до якої застосуємо результати теореми 1 [8].

Теорема 2. *Нехай для д. р. (1) виконано умови 1 – 5 теореми 1, існує кільцеподібна область* $\mathbf{S}(X, c_1, c_2) \subset \mathbf{S}(X, r_0)$*, що охоплює початок координат, така, що в позначеннях теореми 1*

$$\sup_{t \in \Delta, \ X \in \mathbf{S}(X, c_1, c_2) \cap \mathbf{R}_j^n} |G(tX)| < 1, \quad \inf_{X \in S_2 = c_2} V_j(X) > \sup_{X \in S_1 = c_1} V_j(X),$$

$V_j(X) \equiv \sum\limits_{s=1}^{k_0} V_{js}(X_{n_s})$*, якщо* $X \in \mathbf{R}_j^n$*,* $j = \overline{1,p}$*, а* $V_{js}(X_{n_s})$*,* $s = \overline{2,k_0}$*,* $j = \overline{1,p}$*, — додатно визначені квадратичні форми-розв'язки д. р. вигляду*

$$\left\langle \operatorname{grad} V_{js}(X_{n_s}), \left[\left(\mu_s - \nu_{js}^0\right) E_{n_s} + H_{n_s}\right] X_{n_s} \right\rangle = -\left\|X_{n_s}\right\|^2, \ j = \overline{1,p}, \ s = \overline{2,k_0}$$

($S_2 = c_2$ *і* $S_1 = c_1$ *— відповідно зовнішня та внутрішня границі області* $\mathbf{S}(X, c_1, c_2)$*), і для усіх* $X \in \mathbf{S}(X, r_0)$

$$\left\| H(\Psi_{jn_1} X_{n_1} \nu_{j2} X_{n_2} \ldots \nu_{jk_0} X_{n_{k_0}}) \right\| = o(1), \ t \uparrow \omega, \ j = \overline{1,p}.$$

Тоді воно має властивість $G_\Delta AsSt_\pi$*, коли* $t \uparrow \omega$*.*

Доведення. Виконавши для д. р. (1) заміни (3), (5), одержимо д. с., до якої застосуємо результати теореми 2 [8].

Зауваження. Частковий випадок π-стійкості для д. р. другого порядку досліджено у [9].

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 471 с.
2. *Вітриченко І.Є.* Про критичні випадки π-стійкості одного неавтономного нелінійного рівняння n-го порядку // Диференціальні рівняння та нелінійні коливання: Укр. мат. конгрес-2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. — С. 3 – 31.

3. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. — 352 с.

4. *Витриченко И.Е., Никоненко В.В.* О сведении к почти блок-треугольному (диагональному) виду линейной неавтономной системы в случае кратного нулевого собственного значения предельной матрицы коэффициентов // Proc. A. Razmadze Math. Ins. — 1994. — **110**. — P. 59 – 65.

5. *Витриченко И.Е., Костин А.В.* Обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости в случае одного нулевого характеристического показателя для неавтономных систем // Докл. АН СССР. — 1982. — **264**, № 4. — С. 819 – 822.

6. *Костин А.В.* Асимптотика правильных решений обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1991. — 284 с.

7. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1998. — 295 с.

8. *Вітриченко І.Є.* Критичний випадок глобальної стійкості неавтономної істотно нелінійної системи // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 4. — С. 44 – 457.

9. *Vitrichenko I.E.* On λ-stability of one essentially nonlinear nonautonomous second order equation // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, № 4. — С. 547 – 559.

Одержано 14.02.2003