

# Нелинейные локализованные возбуждения магнетиков со слабым обменным взаимодействием как солитонная проблема

М. В. Гвоздикова

*Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*

А. С. Ковалев

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47  
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 26 июня 1998 г.

Исследована спиновая динамика локализованных возбуждений солитонного типа в дискретной ферромагнитной цепочке с легкоосной анизотропией и слабым обменным взаимодействием. Найдена связь этих возбуждений с динамическими магнитными солитонами в длинноволновом приближении и построена зависимость частоты локализованных возбуждений от параметра обменного взаимодействия при фиксированном значении полного числа спиновых отклонений. Показано, что эта зависимость существенно изменяется при значениях обменного взаимодействия порядка величины одноионной анизотропии.

Досліджено спінову динаміку локалізованих збуджень солітонного типу в дискретному ферромагнітному ланцюжку з легкою осною анізотропією та слабкою обмінною взаємодією. Знайдено зв'язок цих збуджень з динамічними магнітними солітонами в довгохвильовому наближенні і побудовано залежність частот локалізованих збуджень від параметра обмінної взаємодії при фіксованому значенні повного числа спинових відхилень. Показано, що ця залежність істотно змінюється при значеннях обмінної взаємодії близьких до величини одноіонної анізотропії.

PACS: 03.40.Kf

## Введение

Специфические нелинейные локализованные возбуждения магнитоупорядоченных сред — магнитные солитоны — всесторонне и детально теоретически исследовались на протяжении последних лет [1,2]. Однако исследования, как правило, проводились в рамках длинноволнового приближения, что предполагало малость одноионной анизотропии по сравнению с обменным взаимодействием и являлось оправданным для традиционных магнетиков. Позже появился ряд теоретических работ [3–6], указывающих на то, что в магнетиках со слабым обменным взаимодействием (когда величина обменного интеграла  $J$  становится порядка или меньше константы одноионной анизотропии  $\beta$ ) происходит качественное изменение структуры и

динамики локализованных возбуждений и результаты, полученные при длинноволновом описании, становятся непригодными.

Дополнительный интерес к этому вопросу возник в связи с синтезом в последнее время квазиодномерных и квазидвумерных магнетиков с  $J \sim \beta$  и даже  $J \ll \beta$ . Примером могут служить квазиодномерные магнетики  $[(\text{CH}_3)_3\text{NH}]\text{NiCl}_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ ,  $(\text{C}_9\text{H}_7\text{NH})\text{NiCl}_3 \cdot 1,5\text{H}_2\text{O}$  [7], слоистые антиферромагнетики с отношением  $J/\beta$  порядка  $10^{-2}$ , например  $(\text{CH}_2)_n(\text{NH}_3)_2\text{MnCl}_4$ ,  $(\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{NH}_3)_2\text{MnCl}_4$  [8–12], и большая часть высокотемпературных сверхпроводников и их изоструктурных аналогов. Важно, что в указанных слоистых антиферромагнетиках исследования проводились на серии образцов с различными индексами  $n$  органических молекул,

интеркалирующих магнитные слои, а значит и с различной величиной обменного взаимодействия магнитных слоев. Это дает возможность экспериментально изучить изменение структуры и динамических свойств локализованных возбуждений в зависимости от величины обменного интеграла  $J$ .

В длинноволновом приближении характерный размер неоднородности поля намагниченности (например, ширины доменной границы) имеет порядок величины «магнитной длины»  $l_0 = \sqrt{J/\beta}$  и эта величина убывает с уменьшением обменного взаимодействия. Однако, как было показано в [3], при сравнимых значениях констант  $J$  и  $\beta$  происходит «схлопывание» доменной стенки до межатомных размеров в коллинеарную структуру с параллельной и антипараллельной ориентацией спинов. В работе [4] была рассмотрена более сложная компактная коллинеарная структура с одним «перевернутым» спином, возникающая при малом обменном взаимодействии. (Заметим, что компактизация нелинейных локализованных возбуждений и возникновение специфических экзотических солитонов — компактонов — широко обсуждаются в последнее время [13]. Существование компактонов обусловлено аномально малой пространственной дисперсией элементарных возбуждений в системе. В случае магнитоупорядоченных сред малость дисперсии магнонов связана с большой анизотропией обменного взаимодействия. Таким образом, две указанные проблемы — образование коллинеарных структур в системах со слабым обменным взаимодействием и образование компактонов в системах с сильной анизотропией этого взаимодействия — связаны между собой.)

В работе [14] были приведены результаты экспериментов по изучению резонансных свойств слоистых антиферромагнетиков и показано наличие дополнительной полосы поглощения в щели магнетонного спектра. Авторы связали наличие такой полосы с появлением внутренней моды у доменных границ либо с существованием специфических структур с локальным переворотом спинов в одном из магнитных слоев. Трансформация внутренней моды доменных границ вблизи точки перехода стенки из коллинеарной в скошенную структуру была рассмотрена нами ранее [6].

Поскольку предложенная в [4] коллинеарная структура с перевернутым спином весьма напоминает магнитный динамический солитон, в настоящей работе в рамках теории солитонов

исследуется динамика локализованных нелинейных спиновых возбуждений разного типа и трансформация изученной в [4] коллинеарной спиновой конфигурации в длинноволновые магнитные солитоны.

## Формулировка модели и длинноволновое описание магнитных солитонов

### Основные уравнения

Поскольку в обсуждавшихся выше слоистых магнетиках взаимодействие спинов внутри слоев существенно больше межслойного взаимодействия, будем моделировать каждый магнитный слой эффективным спином, сведя задачу к рассмотрению одномерной магнитной цепочки. Рассмотрение динамики намагниченности такой цепочки проводится в рамках классической дискретной модели Гейзенберга для легкоосного ферромагнетика. Выражение для полной энергии спиновой цепочки имеет вид

$$E = \sum_n \left\{ -J \mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n+1} - \frac{\beta}{2} (\mathbf{S}_n \mathbf{e}_z)^2 \right\}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{S}_n$  — узельный спин ( $|\mathbf{S}_n|^2 = 1$ );  $J$  — константа обменного взаимодействия ( $J > 0$  для ферромагнетика);  $\beta$  — константа одноионной анизотропии ( $\beta > 0$  для легкоосного ферромагнетика с легкой осью, направленной вдоль оси  $\mathbf{e}_z$ ) и постоянная решетки принята равной единице. Если измерять время в единицах  $1/\omega_0$ , где  $\omega_0 = 2\beta\mu_0/\hbar$  — частота однородного ферромагнитного резонанса, и ввести параметр  $\lambda = J/\beta = l_0^2$ , то динамические уравнения, соответствующие энергии (1) (дискретные уравнения Ландау—Лифшица без затухания), могут быть записаны в следующей форме [2]:

$$d \frac{\mathbf{S}_n}{dt} + \lambda [\mathbf{S}_n (\mathbf{S}_{n+1} + \mathbf{S}_{n-1})] + [\mathbf{S}_n \mathbf{e}_z] (\mathbf{S}_n \mathbf{e}_z) = 0. \quad (2)$$

Параметр  $\lambda$  характеризует степень дискретности цепочки: длинноволновому пределу соответствуют большие значения параметра ( $\lambda \gg 1$ ), а в существенно дискретном пределе  $\lambda \sim 1$ . Кроме очевидного интеграла движения — полной энергии (1) — система уравнений (2) для легкоосного ферромагнетика имеет дополнительный интеграл движения: полное число спиновых отклонений  $N$ . Мы выберем его в следующем виде:

$$N = \frac{1}{2} \sum_n (1 - S_n^z). \quad (3)$$

При таком выборе нормировки в конфигурации с несколькими полностью перевернутыми спинами полное число спиновых отклонений равно числу таких перевернутых спинов.

Удобно перейти к комплексной величине  $\Psi_n = S_n^x + iS_n^y$  (классическому аналогу оператора рождения магнонов) и проекции спина на ось  $z$ :  $S_n^z = m_n$  ( $m_n = \sqrt{1 - |\Psi_n|^2}$ ). В дальнейшем будем рассматривать лишь стационарные динамические состояния, в которых вся зависимость от времени сводится к однородной прецессии спинов вокруг легкой оси  $\Psi_n = \psi_n \exp(i\Omega t)$ , где  $\psi_n$  - вещественные величины. Тогда уравнения (2) запишем в виде

$$-\Omega \psi_n + \lambda [\psi_n (m_{n+1} + m_{n-1}) - m_n (\psi_{n+1} + \psi_{n-1})] + \psi_n m_n = 0. \quad (4)$$

В некоторых случаях будет использоваться несколько иная запись этой системы уравнений в терминах переменных  $\vartheta_n = \arccos m_n$ :

$$-\Omega \sin \vartheta_n + \lambda [\sin (\vartheta_n - \vartheta_{n+1}) + \sin (\vartheta_n - \vartheta_{n-1})] + \sin \vartheta_n \cos \vartheta_n = 0. \quad (5)$$

#### Длинноволновое описание магнитных солитонов

Длинноволновое описание динамики намагниченности в рамках дифференциальных уравнений справедливо в пределе  $\lambda \gg 1$ . При этом можно перейти от дискретного номера  $n$  к непрерывной координате  $x$  и переписать систему разностных уравнений (5) в виде

$$\lambda \vartheta_{xx} = \sin \vartheta \cos \vartheta - \Omega \sin \vartheta. \quad (6)$$

Солитонные решения этого уравнения хорошо известны [2]. Ниже для простоты ограничимся частным случаем симметричных («положительночастотных») магнитных солитонов, в которых  $\psi_n = \psi_{-n}$ . Распределение поля намагниченности в таких солитонах имеет следующую форму:

$$\vartheta(x) = 2 \arctg \left[ \frac{\sqrt{1 - \Omega}}{\sqrt{\Omega}} \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{1 - \Omega}}{\sqrt{\lambda}} x \right) \right]. \quad (7)$$

Обычно при исследовании солитонных решений все характеристики вещества (в данном случае параметр  $\lambda$ ) считаются заданными и изучается трансформация структуры солитона

при изменении его динамических параметров (в частности, частоты  $\Omega$ ). Из (7) видно, что в пределе  $1 - \Omega \ll \ll \Omega$  это решение превращается в решение для малоамплитудного солитона. В противоположном предельном случае  $\Omega \ll 1$  магнитный солитон представляет связанное состояние двух доменных границ шириной  $l_0 = \sqrt{\lambda}$  и с расстоянием между стенками  $L \propto \ln \Omega$ . При изменении частоты прецессии изменяется число спиновых отклонений, связанных в солитоне. В длинноволновом пределе этот интеграл движения определяется формулой

$$N = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (1 - \cos \vartheta(x)). \quad (8)$$

Подставляя решение (7) в формулу (8), находим зависимость  $N(\Omega)$  при  $\lambda = \text{const}$ :

$$N = 2\sqrt{\lambda} \operatorname{Arth} \sqrt{1 - \Omega}. \quad (9)$$

Однако, как было сказано во введении, в настоящее время имеются возможности изучения динамики магнетиков на сериях однотипных образцов, отличающихся значением обменного взаимодействия (т.е. значением параметра  $\lambda$ ). При этом формулу (9) можно представить как зависимость частоты прецессии в солитоне от параметра дискретности  $\lambda$  и числа спиновых отклонений  $N$ . Чтобы сравнивать характеристики однотипных возбуждений, зафиксируем интеграл движения  $N$  и проанализируем зависимость  $\Omega(\lambda)$  при  $N = \text{const}$ :

$$\Omega = \operatorname{sech}^2 \frac{N}{2\sqrt{\lambda}}. \quad (10)$$

Поскольку мы хотим сопоставить длинноволновые магнитные солитоны и рассмотренную в [4] коллинеарную конфигурацию с одним перевернутым спином, которой соответствует значение  $N = 1$ , зафиксируем в формуле (10) значение  $N = 1$ :

$$\Omega = \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}. \quad (11)$$

График этой зависимости приведен на рис. 1 в виде кривой 1. В длинноволновом пределе асимптотика зависимости имеет вид  $\Omega \approx 1 - 1/4\lambda$ . Хотя использованное нами длинноволновое приближение выполняется лишь при  $\lambda \gg 1$ , мы изобразили на рис. 1 эту зависимость при всех значениях  $\lambda$ . (Ниже мы покажем, что формулы длинноволнового приближения хорошо выполняются и при  $\lambda \sim 1$ .)

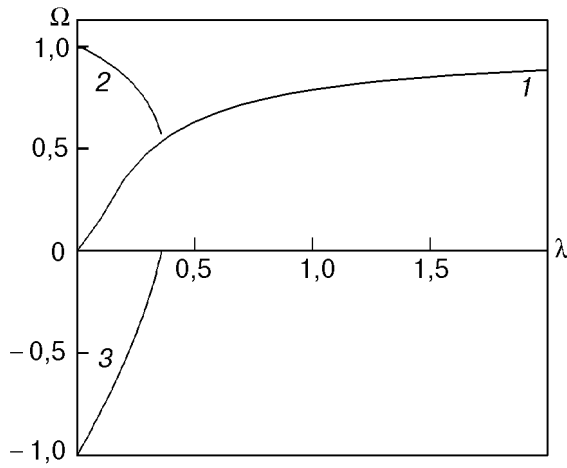


Рис. 1. Зависимости частоты  $\Omega$  от параметра дискретности  $\lambda = J/V$  для магнитного солитона с полным числом спиновых отклонений  $N = 1$  в длинноволновом приближении (кривая 1) и для коллинеарной локализованной структуры с одним перевернутым спином из [4] (кривые 2, 3).

Если формально рассмотреть предел  $\lambda \ll 1$ , в котором  $\Omega \rightarrow 0$  ( $\Omega \approx \exp(-1/\sqrt{\lambda})$ ), то решение будет существенно отличаться от солитонного решения в пределе  $\Omega \rightarrow 0$  при фиксированном значении  $\lambda$ : область локализации стремится к нулю при  $N = 1$ , и солитон превращается в коллинеарную конфигурацию с одним перевернутым спином. Однако само длинноволновое рассмотрение в этом пределе теряет смысл, и необходимо решать задачу в рамках дискретных уравнений.

### Коллинеарная структура магнитных солитонов

Вернемся к рассмотрению дискретных уравнений (4), описывающих стационарные динамические состояния с частотой прецессии  $\Omega$ . Ограничимся решениями с симметрией положительно-частотных солитонов (7), т.е. предположим, что  $\Psi_{-n} = \Psi_n$ ,  $m_{-n} = m_n$  (предполагаем, что центр локализованного возбуждения соответствует спину с номером  $n = 0$ ). Коллинеарные состояния подобного типа были рассмотрены в работе [4] при значениях параметра дискретности  $\lambda < \lambda_0$ , где  $\lambda_0 = (7 - \sqrt{17})/8$ .

Коллинеарной структуре с одним перевернутым спином соответствуют значения  $m_0 = -1$  и  $m_n = 1$  при  $n \neq 0$ . При этом можно линеаризовать дискретные уравнения (4) по величинам спиновых отклонений  $\psi_n$  и получить

следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$(2\lambda - 1 - \Omega)\psi_0 + 2\lambda\psi_1 = 0, \quad n = 0,$$

$$(1 - \Omega)\psi_1 - \lambda(\psi_0 + \psi_2) = 0, \quad n = 1, \quad (12)$$

$$(2\lambda + 1 - \Omega)\psi_n - \lambda(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) = 0, \quad n \geq 2.$$

Убывающее на бесконечности решение этой системы уравнений имеет следующий вид [4]:

$$\psi_0 = B, \quad \psi_n = A \exp[-G(|n| - 1)], \quad (13)$$

$$n \geq 1,$$

где

$$G = \text{Arccch} \left[ \frac{1 - \Omega}{2\lambda} + 1 \right]; \quad (14)$$

$$\frac{A}{B} = \left( \frac{1 + \Omega}{2\lambda} - 1 \right), \quad (15)$$

а связь параметра дискретности  $\lambda$  и частоты  $\Omega$  определяется соотношением

$$\lambda = \frac{(7 + 2\Omega - 5\Omega^2) - \sqrt{(7 + 2\Omega - 5\Omega^2)^2 - 32(1 - \Omega^2)^2}}{8(1 - \Omega)}. \quad (16)$$

Из формулы (16) следует, что при  $\lambda < \lambda_0$  при заданном значении параметра  $\lambda$  существуют два решения с разными знаками частоты  $\Omega$ . Они изображены на рис. 1 в виде кривых 2 и 3. При критическом значении  $\lambda_0$  частота нижней ветви обращается в нуль. Из этого факта авторы статьи [4] сделали неверный вывод о том, что рассмотренная коллинеарная структура с одним перевернутым спином неустойчива в области  $\lambda > \lambda_0$ .

В действительности это утверждение справедливо при учете диссипации в среде, когда отсутствует интеграл движения  $N$ . При этом в области  $\lambda > \lambda_0$  параллельное упорядочение спинов становится неустойчивым и локализованное неоднородное состояние переходит из коллинеарной структуры в статическую скошенную фазу с  $m_0 = -1$  и  $\Psi_n = -\Psi_{-n} \neq 0$ , в которой  $N \neq 1$ . При отсутствии диссипации и сохранении величины интеграла  $N$  возможны динамические коллинеарные структуры и при  $\lambda > \lambda_0$ . Их стабильность обеспечивается сохранением интеграла движения  $N$ .

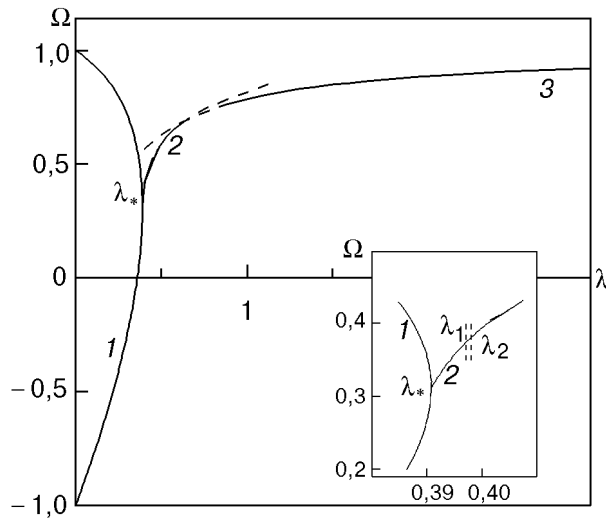


Рис. 2. Полная зависимость  $\Omega(\lambda)$  для динамической коллинеарной структуры с одним перевернутым спином (1) и соответствующая зависимость для скошенной фазы динамического магнитного солитона с  $N=1$  в дискретной магнитной цепочке (2). (Для сравнения приведена зависимость  $\Omega(\lambda)$ , получаемая при длинноволновом описании магнитного солитона – кривая 3). На вставке в большем масштабе изображена окрестность точки бифуркации.

Мы видим, что рассмотренные выше динамические положительно-частотные магнитные солитоны и коллинеарные спиновые конфигурации обладают одинаковой симметрией и структурой (одинаковое полное число спиновых отклонений, одинаковое убывание полей на бесконечности). Поэтому естественно предположить, что при убывании параметра дискретности  $\lambda$  происходит трансформация магнитных солитонов в коллинеарную структуру с перевернутым спином.

### Трансформация магнитных солитонов в коллинеарные спиновые структуры

Прежде всего рассмотрим решение (13)–(16) для коллинеарной спиновой конфигурации во всей области ее существования. Полная зависимость между параметрами  $\Omega$  и  $\lambda$  для состояния с одним перевернутым спином, следующая из формулы (16), изображена на рис. 2 в виде кривой 1. Видно, что критическим значением параметра дискретности является не величина  $\lambda_0$ , а величина  $\lambda_*$ , при которой производная  $d\Omega/d\lambda$  обращается в бесконечность. Легко показать, что в критической точке значение частоты удовлетворяет уравнению

$$7\Omega^4 - 8\Omega^3 - 18\Omega^2 + 48\Omega - 13 = 0. \quad (17)$$

Приближенное решение этого уравнения дает следующие значения параметров в критической точке:  $\lambda_* \approx 0,3907$  и  $\Omega_* \approx 0,3107$ . При движении вдоль зависимости  $\Omega(\lambda)$  от точки ( $\Omega = 1, \lambda = 0$ ) до точки ( $\Omega = -1, \lambda = 0$ ) решение трансформируется следующим образом. Вблизи точки ( $\Omega = 1, \lambda = 0$ ) зависимость  $\Omega(\lambda)$  имеет асимптотику  $\Omega \approx 1 - \lambda/2$ . При этом величина  $A/B \rightarrow \infty$ , т.е. центральный спин не прецессирует, а убывание спиновых отклонений определяется выражением  $\psi_{n+1}/\psi_n \approx 0,5$ . В критической точке ( $\Omega_*, \lambda_*$ ) отношение спиновых отклонений в центре неоднородного состояния и степень убывания этих отклонений с номером  $n$  определяются формулами  $A/B \approx 0,677$  и  $\psi_{n+1}/\psi_n \approx 0,2876$ . Таким образом, вблизи этой точки прецессируют практически лишь центральный перевернутый спин и его ближайшие соседи. Наконец, в пределе  $\Omega \rightarrow -1, \lambda \rightarrow 0$ , когда  $\Omega \approx -1 + 2\lambda$ , имеем  $A/B \rightarrow 0$  и  $\psi_{n+1}/\psi_n \approx (\lambda/2) \rightarrow 0$ , т.е. прецессирует лишь один перевернутый спин.

Естественно предположить, что длинноволновые магнитные солитоны с фиксированным значением  $N=1$  трансформируются в коллинеарную структуру с одним перевернутым спином при  $\lambda \sim \lambda_*$ . Для проверки этого предположения прежде всего найдем возможные бифуркационные точки на зависимости  $\Omega(\lambda)$ , в которых от решений с коллинеарной конфигурацией могут отщепляться неколлинеарные решения с  $\psi_n \neq 0$  и  $N=1$ . Точка бифуркации находится из условия фиксированности полного числа спиновых отклонений. Поскольку при малых отклонениях спинов от основного состояния  $m_n \approx \text{sgn}(m_n)(1 - \psi_n^2/2)$ , из формулы (3) и вида решения в линейном приближении (13)–(15) следует соотношение

$$N = 1 - \frac{B^2}{4} + \frac{A^2}{2(1 - \exp(-2G))}. \quad (18)$$

Из условия сохранения полного числа спиновых отклонений  $N=1$  находим дополнительную связь амплитуд спиновых отклонений в линейном приближении  $A/B = \sqrt{1 - \exp(-2G)}/2$ . Комбинируя ее с соотношениями (14), (15), находим зависимость  $\Omega(\lambda)$ , которая должна выполняться в точке бифуркации:

$$3\Omega^3 + (1 - 14\lambda)\Omega^2 + (1 - 4\lambda + 20\lambda^2)\Omega + (3 - 6\lambda - 4\lambda^2 - 8\lambda^3) = 0. \quad (19)$$

Легко убедиться, что одновременное выполнение формул (16) и (19) задает точку бифуркации, совпадающую с точкой вертикальной касательной  $\Omega = \Omega_*$ ,  $\lambda = \lambda_*$ . Таким образом, в этой критической точке от коллинеарной структуры с одним перевернутым спином бифуркационным образом отщепляется динамическое симметричное решение с ненулевыми отклонениями вращающихся спинов, имеющее вид динамического солитона с  $N = 1$ . Несмотря на малость отклонений спинов от основного состояния вблизи точки бифуркации, нахождение решения для неколлинеарной структуры магнитного солитона требует учета нелинейности дискретных уравнений спиновой динамики, что существенно усложняет задачу.

Для упрощения вычислений воспользуемся тем обстоятельством, что вблизи точки бифуркации спиновые отклонения быстро убывают при удалении от центра локализованного возбуждения (спина с номером  $n = 0$ ) и фактически отличны от нуля лишь амплитуды прецессии спинов с номерами  $n = 0, \pm 1$ . Более того, ниже мы убедимся, что это свойство решения сохраняется до достаточно больших значений  $\lambda$ , при которых уже справедливо длинноволновое приближение.

Воспользуемся системой разностных уравнений для стационарных состояний в форме (5). При этом возьмем точные уравнения для спинов с номерами  $n = 0, \pm 1$ , в уравнениях для спинов с номерами  $n = \pm 2$  в полном объеме учтем нелинейность динамических слагаемых, энергии анизотропии и энергии обменного взаимодействия со спинами с номерами  $n = \pm 1$  соответственно, но энергию обменного взаимодействия с соседями с номерами  $n = \pm 3$  учтем в линейном приближении. Наконец, все остальные уравнения для частиц с номерами  $|n| \geq 3$  линеаризуем по спиновым отклонениям  $\vartheta_n$ . При этом с учетом симметрии решения  $\vartheta_n = \vartheta_{-n}$  система уравнений (5) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} -\Omega \sin \vartheta_0 + \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 + 2\lambda \sin (\vartheta_0 - \vartheta_1) &= 0, \\ -\Omega \sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 + \\ + \lambda \sin (\vartheta_1 - \vartheta_0) + \lambda \sin (\vartheta_1 - \vartheta_2) &= 0, \\ -\Omega \sin \vartheta_2 + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2 + \\ + \lambda \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \lambda (\vartheta_2 - \vartheta_3) &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$-\Omega \vartheta_n + \vartheta_n + \lambda(2\vartheta_n - \vartheta_{n-1} - \vartheta_{n+1}) = 0, \quad |n| \geq 3.$$

Линеаризация уравнений с большими номерами спинов позволяет легко выбрать решение, убывающее на бесконечности:

$$\vartheta_n = \vartheta_2 \exp[-G(|n| - 2)], \quad |n| \geq 2, \quad (21)$$

где зависимость  $G(\Omega, \lambda)$  по-прежнему определяется формулой (14).

Таким образом, уравнение для  $\vartheta_2$  в системе (20) принимает вид

$$\begin{aligned} -\Omega \sin \vartheta_2 + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2 + \\ + \lambda \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \lambda \vartheta_2 [1 - \exp(-G)] = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

и образует с первыми двумя уравнениями из (20) замкнутую систему трех нелинейных алгебраических уравнений для амплитуд  $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2$ .

Из первого уравнения в (20) легко выразить в громоздком, но явном виде зависимость  $\vartheta_1 = \vartheta_1(\vartheta_0, \Omega, \lambda)$ , а из второго — явную зависимость  $\vartheta_2 = \vartheta_2(\vartheta_0, \Omega, \lambda)$ , после чего уравнение (22) сводится к громоздкому нелинейному алгебраическому уравнению для амплитуды магнитного солитона  $\vartheta_0$ , содержащему параметры  $\Omega$  и  $\lambda$ . Это уравнение, которое мы не приводим из-за его громоздкости, решалось численно. При заданном значении параметра дискретности  $\lambda$  решение для  $\vartheta_0$ , а следовательно, и всех  $\vartheta_n$  находилось для различных значений частоты прецессии  $\Omega$  и полученное распределение намагниченности подставлялось в формулу (3) для полного числа спиновых отклонений в солитоне, которая с принятой нами точностью имеет вид

$$\begin{aligned} N = \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta_0) + 2 - \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2 + \\ + \frac{\vartheta_2^2}{2[\exp(2G) - 1]}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из всех корней уравнения выбирался корень, для которого величина  $N$  была близка к единице, и находилось значение частоты, при которой величина  $(N - 1)$  изменяла знак. Таким образом, наряду с зависимостью  $\Omega(\lambda, N = 1)$  находился и знак производной  $d\Omega/dN$ .

Результаты численного рассмотрения проблемы сводятся к следующему.

Прежде всего, мы убедились, что решение для скошенной (неколлинеарной) фазы магнитного солитона действительно отщепляется бифуркационным образом от решения для

коллинеарной структуры с перевернутым спином в критической точке  $\Omega = \Omega_*$ ,  $\lambda = \lambda_*$ , причем кривые  $\Omega(\lambda)$  для коллинеарной и скошенной структур в критической точке не перпендикулярны друг другу, как обычно в теории бифуркаций.

В узкой области вблизи критической точки происходит резкое изменение структуры магнитного солитона, и уже при превышении параметром дискретности  $\lambda$  критического значения на величину 0,06 спиновые отклонения пяти центральных частиц из их положения равновесия в коллинеарной фазе достигают величины  $\sim 0,5$ . Однако при этом спиновые отклонения в остальных узлах цепочки остаются малыми ( $\vartheta_n < 0,1$ ), что оправдывает сделанные нами при поиске решений приближения. Полученная зависимость приведена на рис. 2 в виде кривой 2, кривая 3 соответствует зависимости  $\Omega(\lambda)$ , полученной ранее при длинноволновом описании магнитных солитонов с числом спиновых отклонений  $N = 1$ . Сплошными линиями на рис. 2 изображены участки кривых 2 и 3 для значений параметра  $\lambda$ , при которых выполняются условия применимости соответственно дискретной модели в нашем приближении и длинноволнового подхода. Хотя с ростом параметра  $\lambda$  величина спиновых отклонений в узлах с номерами  $n \geq 3$  нарастает, зависимость  $\Omega(\lambda)$ , следующая из дискретных уравнений, достаточно хорошо согласуется с данными длинноволнового рассмотрения. Мы видим, что в широком интервале значений параметра дискретности результаты длинноволнового описания хорошо аппроксимируют структуру динамического магнитного солитона в дискретной спиновой цепочке. Однако в узкой области значений  $\lambda$  вблизи критического значения результаты длинноволнового и дискретного описаний становятся существенно различными.

Когда параметр дискретности системы достигает критической величины, магнитный солитон «схлопывается» в коллинеарную структуру с параллельной и антипараллельной ориентацией спинов, при этом частотная зависимость претерпевает существенное изменение.

К сожалению, в случае бесконечной спиновой цепочки дискретное описание структуры и динамики магнитного солитона в неколлинеарной фазе требует численных расчетов и аналитическое изучение затруднительно. Однако в области резкой перестройки солитонного решения из

коллинеарной формы в скошенную вблизи точки бифуркации в спиновой динамике фактически участвуют лишь три центральных спина. Поэтому можно предположить, что исследование спиновых цепочек конечной длины может дать дополнительную информацию о трансформации солитонов в компактную структуру, особенно в случае, когда рассмотрение может быть проведено аналитически. В этом мы убедились при рассмотрении внутренних мод доменных границ в дискретных ферромагнитных цепочках (см. [6]). В Приложении рассмотрена цепочка из трех спинов в конфигурации с перевернутым центральным спином и аналитически продемонстрировано, что переход солитона из скошенной формы в коллинеарную имеет качественно тот же вид, что и в бесконечной цепочке, хотя и обладает некоторыми отличительными чертами.

В заключение рассмотрим вопрос о знаке производной  $d\Omega/dN$  для найденных магнитных солитонов в дискретных спиновых цепочках. Этот вопрос является принципиальным в теории солитонов, поскольку со знаком такой производной связана проблема устойчивости солитонных решений. При длинноволновом описании из соотношения (10) следует, что  $d\Omega/dN < 0$ . Проведенный нами численный анализ показал, что этот результат сохраняется и при малых значениях параметра дискретности  $\lambda$  вплоть до узкой окрестности критической точки. Однако в этой окрестности происходит изменение знака производной  $d\Omega/dN$ . С точностью наших вычислений  $d\Omega/dN$  обращается в нуль при  $\lambda = \lambda_2 = 0,398$ , остается нулевой в интервале  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$  и становится положительной при  $\lambda_* < \lambda < \lambda_1 = 0,397$ . Возможно, что существование конечного интервала нулевых значений этой производной связано с недостаточной точностью численных расчетов, и при повышении точности указанный интервал стянется в одну точку изменения знака  $d\Omega/dN$ . Интересно, что для солитонов в коллинеарной фазе во всем интервале значений частот выполняется неравенство  $d\Omega/dN < 0$ .

Обычно в теории солитонов в средах с распределенными параметрами отрицательный знак производной  $d\Omega/dN$  для динамических солитонов говорит об их устойчивости, а положительный знак — об их модуляционной неустойчивости. Однако в системах, не обладающих трансляционной инвариантностью, такая простая связь устойчивости со знаком  $d\Omega/dN$  может отсутствовать (см. [15]). В случае

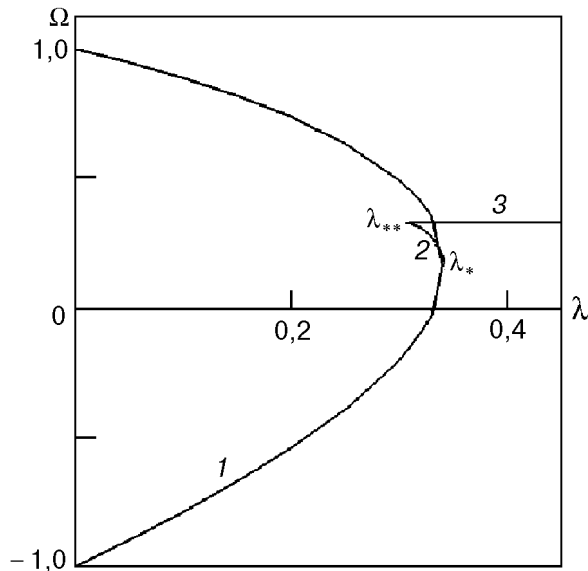


Рис. 3. Зависимость  $\Omega(\lambda)$  для цепочки трех взаимодействующих спинов. Кривая 1 соответствует коллинеарной конфигурации с перевернутым центральным спином, кривая 2 – локализованному возбуждению солитонного типа в скошенной фазе и прямая 3 – однородной прецессии намагниченности.

дискретной спиновой цепочки система не обладает трансляционной инвариантностью и вопрос об устойчивости дискретных солитонов требует дополнительного рассмотрения.

Авторы благодарны М. М. Богдану за дискуссии и ценные замечания.

Данная работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Украинского государственного комитета по науке и технологиям (Проект «Солитон 3»).

### Приложение

Рассмотрим цепочку из трех спинов со свободными концами в симметричной конфигурации, изучаемой в настоящей статье. При этом система уравнений (4) сводится к следующей системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} -\Omega\psi_0 + 2\lambda(\psi_0 m_1 - \psi_1 m_0) + \psi_0 m_0 &= 0, \\ -\Omega\psi_1 + \lambda(\psi_1 m_0 - \psi_0 m_1) + \psi_1 m_1 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Эта система должна быть дополнена условием равенства единице полного числа спиновых отклонений:  $m_0 + 2m_1 = 1$ . Воспользовавшись связью  $m_i$  и  $\psi_i$  ( $m_i^2 + \psi_i^2 = 1$ ), можно все величины выразить только через  $m_1 = m$ :

$$(1 - m)[3m^3 + (6\Omega - 5)m^2 + m - \Omega^2] = 0,$$

$$(1 - 3m)[(3 - 8\lambda)m^3 + (2 - 6\lambda)m^2 + (2\lambda - 1)m + \lambda^2]\sqrt{1 - m} = 0. \quad (\text{П.2})$$

Полученные уравнения имеют три различные решения. Наиболее простое решение с  $m = 1$  ( $m_1 = m_{-1} = 1$ ,  $m_0 = -1$ ) соответствует коллинеарной структуре с одним перевернутым спином. Линеаризация (П.1) вблизи этого состояния с  $\psi_i \ll 1$  приводит к следующей зависимости  $\Omega(\lambda)$ :

$$\Omega = \frac{1}{2}(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 12\lambda + 4}), \quad (\text{П.3})$$

которая качественно близка к зависимости (16) для бесконечной спиновой цепочки. Критическое значение параметра  $\lambda$  теперь равно  $\lambda_* = 2(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0,343$ , а  $\Omega_* = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,1716$ . Эта зависимость приведена на рис. 3 в виде кривой 1.

Второе решение уравнений (П.2) соответствует однородному состоянию с  $N = 1$ , в котором  $m_i = 1/3$  и  $\Omega = 1/3$  (рис. 3, линия 3). В теории нелинейных возбуждений конечномерных систем такие однородные состояния играют особую роль. В то время как в неограниченных системах локализованные состояния солитонного типа существуют при сколь угодно малых уровнях возбуждения, в системах конечного размера пространственно неоднородные локализованные решения отщепляются от однородного состояния при конечном уровне возбуждения системы [16]. В нашем случае при фиксированном значении величины  $N$  решения для магнитных солитонов отщепляются от нелинейных пространственно однородных решений при конечном значении параметра дискретности  $\lambda$ . Это критическое значение убывает с уменьшением длины системы и для цепочки из трех спинов равно  $\lambda_{**} = 8/27 \approx 0,296 < \lambda_*$ .

Наконец, наиболее интересное решение для «неколлинерного» солитона и соответствующая зависимость  $\Omega(\lambda)$  в неявном виде задаются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \Omega &= 3m^2 - (3m - 1)\sqrt{m^2 + m}, \\ \lambda &= m(1 + m)(4m - 1) - \sqrt{m(1 + m)(4m^2 + m - 1)^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

График зависимости  $\Omega(\lambda)$  для этого решения приведен на рис. 3 в виде кривой 2. Видно, что она отщепляется от линии, соответствующей коллинеарной конфигурации, в точке с вертикальной производной и направлена под углом к ней. Таким образом, аналитический результат для спиновой цепочки конечной длины



качественно совпадает с результатом численного рассмотрения преобразования магнитного солитона в локальную коллинеарную структуру в бесконечной дискретной спиновой цепочке.

1. А. Хуберт, *Теория доменных стенок в упорядоченных средах*, Мир, Москва (1977).
2. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1988).
3. J. J. Van den Broek and H. Zijlstra, *IEEE Trans. Magn.*, **7**, 226 (1971); М. М. Богдан, А. М. Косевич, and V. P. Voronov, in *Solitons and Applications*, V. G. Makhankov, V. K. Fedyanin, and O. K. Pashaev (eds.), World Scientific, Singapore, (1990), p. 231.
4. А. Н. Гончарук, А. А. Степанов, Д. А. Яблонский, *ФТТ* **31**, 132 (1989).
5. И. Г. Гочев, *ЖЭТФ* **85**, 199 (1983); I. V. Barashenkov, М. М. Bogdan, and V. I. Korobov, *Europhys. Lett.* **15**, 113 (1991).
6. М. В. Гвоздикова, А. С. Ковалев, Ю. С. Кившарь, *ФНТ* **24**, 635 (1998).
7. А. Г. Андерс, В. Г. Борисенко, С. В. Волоцкий, *ФНТ* **15**, 39 (1989).
8. М. И. Кобец, А. А. Степанов, А. И. Звягин, *ФНТ* **7**, 1473 (1981).
9. А. И. Звягин, М. И. Кобец, В. Н. Криворучко, А. А. Степанов, Д. А. Яблонский, *ЖЭТФ* **89**, 2298 (1985).
10. А. И. Звягин, В. Н. Криворучко, В. А. Пашенко, А. А. Степанов, Д. А. Яблонский, *ЖЭТФ* **92**, 311 (1987).
11. А. А. Степанов, В. А. Пашенко, Н. М. Кобец, *ФНТ* **14**, 550 (1988).
12. А. А. Степанов, В. А. Пашенко, Н. М. Кобец, *ФНТ* **14**, 1114 (1988).
13. А. С. Ковалев, М. В. Гвоздикова, *ФНТ* **24**, 635 (1998).
14. А. А. Степанов, Д. А. Яблонский, *ФНТ* **15**, 215 (1989).
15. М. М. Богдан, И. В. Герасимчук, А. С. Ковалев, *ФНТ* **23**, 197 (1997).
16. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1990).

## Nonlinear localized excitations in magnets with a weak exchange interaction as a soliton problem

M. V. Gvozdikova and A. S. Kovalev

The spin dynamics of soliton-like localized excitations in a discrete ferromagnet chain with an easy-axis anisotropy and a weak exchange interaction is studied. The connection of these excitations with longwave magnetic solitons is discussed. The localized excitation frequency dependence on exchange interaction is found for a fixed number of spin deviation. It is shown that this dependence modifies essentially when the exchange interaction becomes comparable with an anisotropy value.