

## Низкотемпературные свойства одноосных парамагнетиков в наклонном магнитном поле

О. Б. Заславский, В. В. Ульянов, Ю. В. Василевская

*Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*

E-mail: olegzasl@aptm.kharkov.ua

vladimir.v.ulyanov@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 12 февраля 1998 г., после переработки 11 марта 1998 г.

Рассмотрено поведение одноосных парамагнетиков в наклонном магнитном поле в зависимости от температуры. Найдены структура энергетического спектра, а также компоненты намагниченности и восприимчивости. Получены точные формулы для спина  $S = 1/2$ . Для произвольных значений  $S$  в легкоосном и легкоплоскостном случаях изучены термодинамические характеристики системы в различных приближениях (малые и большие магнитные поля, низкие и сверхнизкие температуры и т.п.). Показано, что в легкоплоскостном случае при низких температурах поперечная намагниченность и продольная восприимчивость как функции магнитного поля обладают особенностями в виде серии резких всплесков, тогда как в легкоосном случае продольные компоненты этих величин обладают одиночным всплеском.

Розглянуто поведінку одноосних парамагнетиків у похилому магнітному полі в залежності від температури. Знайдено структуру енергетичного спектра, а також компоненти намагніченості та сприйнятливості. Знайдено точні формули для спіну  $S = 1/2$ . Для довільних значень спіну  $S$  у легкоосному та легкоплощинному випадках вивчено термодинамічні характеристики при різних наближеннях (малі та великі магнітні поля, низькі та наднизькі температури і таке інше). Показано, що в легкоплощинному випадку при низьких температурах поперечна намагніченість і поздовжня сприйнятливість як функції магнітного поля мають особливості у вигляді серії різких сплесків, тоді як у легкоосному випадку поздовжні компоненти цих величин мають поодинокий сплеск.

PACS: 75.10.-b, 75.10.Dg, 75.30.Gw

### 1. Введение

В различных областях физики [1,2] появляются системы, гамильтониан которых построен из операторов спина, в связи чем они получили название «спиновых». Мы рассмотрим конкретный тип таких систем со спин-гамильтонианом вида

$$H = \alpha S_z^2 - B_x S_x - B_z S_z, \quad (1)$$

встречающимся в теории магнетизма и описывающим одноосный парамагнетик в произвольно направленном магнитном поле, где  $S_j$  — проекции спина;  $B_j$  — составляющие магнитного поля;  $\alpha$  — константа анизотропии. При изучении таких систем в обычно используемых безразмерных переменных [1,2] (в качестве безразмерной энергии вводится отношение энергии к абсолютной величине

константы анизотропии, что приводит и к соответствующей безразмерной характеристике магнитного поля  $B_j$ ) фактически существен лишь знак  $\alpha$ , так что будем в дальнейшем считать, что  $\alpha$  принимает только два значения:  $\alpha = -1$  отвечает анизотропии типа «легкая ось», а  $\alpha = +1$  — «легкая плоскость».

В цикле работ [1–3] уже изучены некоторые свойства систем с гамильтонианом вида (1). При этом особое внимание уделялось случаю, когда магнитное поле перпендикулярно оси анизотропии ( $B_z = 0$  и  $\alpha = -1$ ). Другой случай с продольным магнитным полем ( $B_x = 0$  и  $\alpha = +1$ ) частично рассматривался в работах [4,5]. Здесь обсудим общий случай наклонного магнитного поля для обоих типов анизотропии ( $\alpha = \pm 1$ ), а также сосредоточим внимание на термодинамических свойствах анизотропных парамагнетиков при низких температурах.

Обращаясь к истокам, начнем с упоминания работы [1], в которой впервые были детально проанализированы с позиций чисто квантовой теории физические свойства одноосных парамагнетиков, правда, только в поперечном магнитном поле и при сверхнизких температурах. В [1] был разработан важный метод эффективных потенциалов, давший в дальнейшем возможность исследовать различные физические свойства одно- и двухосных парамагнетиков, а также обнаружить новые классы точных решений уравнения Шредингера [2,3,6].

Дадим некоторые предварительные пояснения. Объектом нашего исследования будут пять основных характеристик системы: две составляющие вектора намагниченности  $M_x$  и  $M_z$  и три компоненты тензора магнитной восприимчивости  $\chi_{xx}$ ,  $\chi_{xz}$  и  $\chi_{zz}$ . В стационарных состояниях, обозначаемых индексом  $n = 0, 1, \dots, 2S$ , эти величины связаны с соответствующими производными энергетических уровней  $E_n$  по составляющим магнитного поля  $B_x$  и  $B_z$ :

$$M_k^{(n)} = \langle S_k \rangle_n = - \langle (\partial H) / \partial B_k \rangle_n = - \frac{\partial E_n}{\partial B_k}, \quad (2)$$

$$\chi_{kl}^{(n)} = 2 \frac{\partial M_k^{(n)}}{\partial B_l} = -2 \frac{\partial^2 E_n}{\partial B_k \partial B_l} \quad (k, l = x, z). \quad (3)$$

Здесь множитель 2, введенный для удобства в работе [1], мы сохраняем для преемственности результатов.

Термодинамические величины, как нетрудно показать, выражаются через соответствующие средние значения

$$M_k^T = \overline{M_k}; \quad \chi_{kl}^T = \overline{\chi_{kl}} + \frac{1}{2T} (\overline{M_k M_l} - \overline{M_k} \overline{M_l}), \quad (4)$$

где черта сверху над некоторой величиной  $f$  означает усреднение вида

$$\overline{f} = \sum_{n=0}^{2S} f^{(n)} \exp(-E_n/T) / \sum_{n=0}^{2S} \exp(-E_n/T). \quad (5)$$

Если учесть, что имеются три внешних параметра ( $B_x$ ,  $B_z$ ,  $T$ ) и два внутренних ( $S$ ,  $\alpha$ ), то ясно, что необходимо основное внимание уделить каким-то избранным величинам, наиболее ярко и полно передающим особенности, присущие всем другим характеристикам.

## 2. Точные результаты в случае спина $S = 1/2$

Это уникальный случай, когда фактически совпадают два типа анизотропных парамагнетиков — легкоосный и легкоплоскостной (энергетический спектр отличается лишь на константу, не играющую роли в изучаемых характеристиках  $\mathbf{M}$  и  $\hat{\chi}$ ).

Если спин равен половине, то для двух имеющихся уровней энергии получаем явные формулы

$$E_{0,1} = \alpha/4 \mp B/2, \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2},$$

так что проекции намагниченности равны

$$M_k^{(0)} = -M_k^{(1)} = \frac{B_k}{2B}, \quad \text{т.е. } \mathbf{M}^{(0,1)} \parallel \mathbf{B},$$

а компоненты тензора магнитной восприимчивости имеют вид

$$\chi_{zz}^{(0)} = -\chi_{zz}^{(1)} = B_x^2/B^3, \quad \chi_{xz}^{(0)} = -\chi_{xz}^{(1)} = -B_x B_z/B^3,$$

$$\chi_{xx}^{(0)} = -\chi_{xx}^{(1)} = B_z^2/B^3.$$

Отсюда вытекают формулы для термодинамических величин

$$M_k^T = \frac{1}{2} \frac{B_k}{B} \operatorname{th} \frac{B}{2T}, \quad \chi_{zz}^T = \frac{B_x^2 \operatorname{sh}(B/T) + B_z^2(B/T)}{2B^3 \operatorname{ch}^2(B/2T)},$$

$$\chi_{xz}^T = -B_x B_z \frac{\operatorname{sh}(B/T) - (B/T)}{2B^3 \operatorname{ch}^2(B/2T)},$$

$$\chi_{xx}^T = \frac{B_z^2 \operatorname{sh}(B/T) + B_x^2(B/T)}{2B^3 \operatorname{ch}^2(B/2T)}.$$

В частности, при  $B_x = 0$

$$\chi_{zz}^T = \frac{1}{2T \operatorname{ch}^2(B_z/2T)},$$

при  $B_z = 0$

$$\chi_{zz}^T = \frac{1}{|B_x| \operatorname{th}(B_x/2T)}, \quad \chi_{xx}^T = \frac{1}{2T \operatorname{ch}^2(B_x/2T)}$$

(тогда как  $\chi_{xx}^{(0)} = 0$ ), а при  $B_x = B_z = 0$  отличные от нуля компоненты равны  $\chi_{zz}^T = \chi_{xx}^T = 1/2T$ .

Точные формулы для уровней энергии, намагниченности и восприимчивости получаются также и в случаях  $S = 1$  и  $S = 3/2$ , однако они оказываются более громоздкими, поэтому мы их здесь явно не приводим, но используем в графических иллюстрациях и в качестве тестовых примеров.

### 3. Термодинамические величины легкоосных парамагнетиков

В случае  $\alpha = -1$  главные характеристики в основном состоянии могут быть получены с помощью формулы для основного уровня энергии. Ход решения задачи разбивается на два этапа. Вначале рассматривается система в чисто поперечном слабом магнитном поле ( $B_z = 0, |B_x| < 1$ ). В этом случае структура энергетического спектра парамагнетика такова, что уровни энергии расположены парами (кроме одиночного наибольшего при целых  $S$ ) вследствие расщепления за счет  $B_x$  при двукратном вырождении в отсутствие магнитного поля. Для интересующей нас пары уровней — основного и первого возбужденного — имеют место следующие формулы, дающие общий для этой пары сдвиг и энергетическую щель:

$$E_{0,1}^0 = -S^2 - \frac{S}{2(2S-1)} B_x^2 + O(|B_x|^3), \quad S > 1; \quad (6)$$

$$E_{0,1}^0 = -1 - B_x^2 + O(B_x^4), \quad S = 1,$$

$$\Delta(0) = \Delta|_{B_z=0} = E_1^0 - E_0^0 =$$

$$= \frac{S^2}{2^{2S-3}(2S)!} |B_x|^{2S} + O(|B_x|^{2S+2}). \quad (7)$$

Если первый из этих результатов непосредственно вытекает из обычной теории возмущений, то второй оказывается более тонким эффектом и получен с помощью специальной модификации теории возмущений, учитывающей конкретный вид оператора возмущения  $V = -B_x S_x$  (см. [2]). Приведем также уточненное выражение для щели:

$$\Delta(0) = \frac{S^2}{2^{2S-3}(2S)!} |B_x|^{2S} \left[ 1 - \frac{S+1}{2(2S-1)^2} B_x^2 \right]. \quad (8)$$

Такая формула обеспечивает очень высокую точность вплоть до  $|B_x| \sim \sqrt{S}$ . Так, при  $|B_x| = \sqrt{S}/2$  относительная ошибка не превышает 1%.

Вторым шагом является учет продольной составляющей магнитного поля  $B_z$ , усиливающей расщепление уровней. Это достигается с помощью применения специального варианта теории возмущений для близких уровней энергии [7]. Если гамильтониан системы  $H = H^0 + V$ , то

$$E_{0,1} = \frac{1}{2} (E_0^0 + E_1^0) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(E_0^0 - E_1^0)^2 + 4|V_{01}|^2}, \quad (9)$$

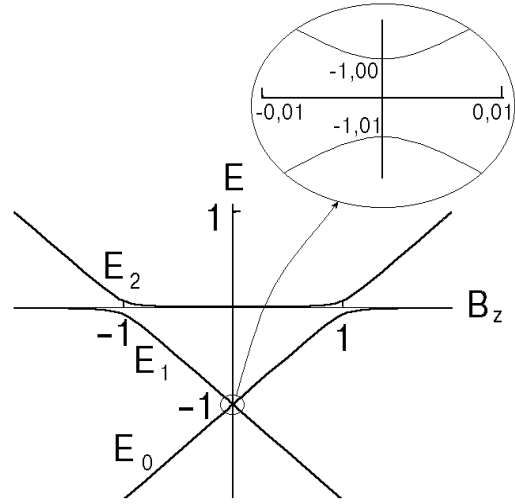


Рис. 1. Структура энергетического спектра легкоосного парамагнетика при  $B_x = 0,1$  в случае  $S = 1$  ( $E_j$  — уровни энергии).

где учтено, что в нашем случае возмущение  $V = -B_z S_z$  имеет строго равные нулю диагональные матричные элементы в представлении невозмущенного гамильтониана  $H^0 = -S_z^2 - B_x S_x$ , а недиагональные элементы  $V_{01} = -B_z \langle 0|S_z|1 \rangle$  могут быть найдены также с помощью теории возмущений:

$$|\langle 0|S_z|1 \rangle|^2 \approx S^2 \left[ 1 - \frac{1}{(2S-1)^2} B_x^2 \right], \quad S > 1/2. \quad (10)$$

Таким образом, для  $|B_x| \ll 1$  приходим на основе (8), (9) и (10) к важному для дальнейшего результату «симметричного отталкивания» (рис. 1) основного и первого возбужденного уровней:

$$E_{0,1} = -S^2 - \frac{S}{2(2S-1)} B_x^2 \mp \frac{\Delta}{2}, \quad S > 1, \quad (11)$$

где отброшены члены более высокого порядка малости по  $B_x$  и  $B_z$ , а энергетическая щель в первом приближении дается формулой

$$\Delta = \sqrt{\Delta(0)^2 + 4S^2 B_z^2} \quad (12)$$

с  $\Delta(0)$  из (7). Более точное выражение для  $\Delta$  получаем на основе (8) и с заменой в (12) множителя при  $4B_z^2$  на  $S^2 - S^2 B_x^2 / (2S-1)^2$  в соответствии с (10). Заметим, что в дальнейших расчетах для краткости формула (12) будет фигурировать явно, хотя нужно иметь в виду, что она может быть уточнена указанным выше образом. Переходя к магнитным характеристикам основного состояния, получаем из (11) и (12) намагниченность

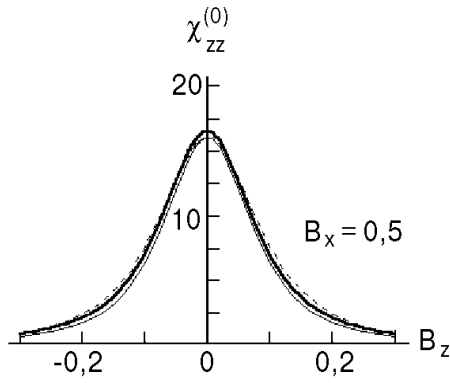


Рис. 2. Магнитная восприимчивость  $\chi_{zz}^{(0)}$  в зависимости от  $B_z$  в случае  $S = 1$  (см. текст).

$$M_z^{(0)}(B_z) = \frac{2S^2 B_z}{\sqrt{\Delta(0)^2 + 4S^2 B_z^2}} \quad (13)$$

и восприимчивость

$$\chi_{zz}^{(0)}(B_z) = \frac{4S^2 \Delta(0)^2}{[\Delta(0)^2 + 4S^2 B_z^2]^{3/2}} \quad (14)$$

(другие компоненты мы не выписываем). Отсюда вытекают следующие выводы. Во-первых, при  $S = 1/2$  эти результаты совпадают с точными. Во-вторых, компонента восприимчивости  $\chi_{zz}^{(0)}$  имеет как функция  $B_z$  при всех  $S$  форму так называемого двумерного распределения Стьюдента. В-третьих, при  $B_z \rightarrow 0$  с учетом поправок

$$\chi_{zz}^{(0)}(0) = \frac{2^{2S-1} (2S)!}{|B_x|^{2S}} \left[ 1 + \frac{S-1}{2(2S-1)^2} B_x^2 \right], \quad S > 1/2.$$

Типичный профиль этой компоненты восприимчивости приведен на рис. 2 при  $B_x = 0,5$  в случае  $S = 1$ , где нанесены практически сливающиеся точная кривая (жирная), приближенная по формуле (14) (пунктирная) и уточненное приближение (тонкая), иллюстрирующие эффективность используемых приближений.

Переходя к термодинамическим величинам, отметим, что полученные результаты для основного состояния отвечают сверхнизким температурам  $T \ll \Delta$ , при которых вклад возбужденных состояний во все термодинамические величины экспоненциально мал. Однако роль этих результатов не исчерпывается сказанным, поскольку при  $T \ll 2S - 1$  уже пара низколежащих уровней отделена от остальных, так что вклад во все термодинамические величины вносят только основное и первое возбужденное состояния, а уже

второе и последующие возбужденные состояния дают экспоненциально малые поправки. Такие температуры будем называть низкими, а соответствующее приближение — двухуровневым.

Воспользовавшись формулами «симметричного отталкивания» (11) для основного и первого возбужденного уровней, замечаем, что в первом возбужденном состоянии  $M_z^{(1)}$  и  $\chi_{zz}^{(1)}$  и  $\chi_{xz}^{(1)}$  отличаются только знаком от соответствующих величин основного состояния. Следовательно, из (2)–(4) вытекает, что

$$M_z^T = M_z^{(0)} \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T},$$

$$\chi_{zz}^T = \chi_{zz}^{(0)} \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} + \frac{(M_z^{(0)})^2}{2T \operatorname{ch}^2 (\Delta/2T)}. \quad (15)$$

Подобные формулы получаются и для  $M_x^T$ ,  $\chi_{xz}^T$  и  $\chi_{xx}^T$ , причем влияние температуры аналогично влиянию  $B_x$ . Как в первом, так и во втором случаях острые всплески  $\chi_{zz}$  сглаживаются, уширяясь и уменьшаясь в центре.

Чтобы представить себе полную картину изменения  $\chi_{zz}^{(0)}$  в зависимости от магнитного поля, необходимо рассматривать эту величину как функцию переменных  $B_x$  и  $B_z$ , т.е. как поверхность над плоскостью  $(B_x, B_z)$ . Нам будет удобнее, однако, рассматривать сечения этой поверхности  $\chi_{zz}^{(0)}(B_z)$  при некоторых фиксированных значениях  $B_x$ . Другими словами, при постоянной поперечной составляющей  $B_x$  брать изменения продольной составляющей  $B_z$ .

Найденные формулы и соответствующие иллюстрации дают полное представление о поведении изучаемых характеристик в малых магнитных полях. В больших же полях намагниченность достигает насыщения и восприимчивости быстро убывают. Приведем результаты расчетов и в этом случае, считая в гамильтониане  $H = -B_x S_x - B_z S_z - S_z^2$  первые два члена основными, а член магнитной анизотропии учитываем как поправку. При этом удобно выбрать оси координат таким образом, чтобы одна из них была направлена вдоль магнитного поля. В таком случае гамильтониан принимает вид  $H = -B S_z' - \cos^2 \varphi S_z'^2 + \cos \varphi \sin \varphi (S_x' S_z' + S_z' S_x') - \sin^2 \varphi S_x'^2$ , где  $\cos \varphi = B_z/B$ ;  $\sin \varphi = B_x/B$ ;  $B = (B_x^2 + B_z^2)^{1/2}$ . Первый член является основным, остальные служат возмущающими поправками. Применение теории возмущений дает с учетом квадратичных поправок для основного уровня энергии

$$E_0 = -BS - S^2 \cos^2 \varphi - \frac{S}{2} \sin^2 \varphi + O(B^{-1}) =$$

$$= -S \sqrt{B_x^2 + B_z^2} - S^2 + S \left( S - \frac{1}{2} \right) \frac{B_x^2}{B_x^2 + B_z^2} + O(B^{-1}).$$

Отсюда, вычисляя магнитный момент

$$M_z^{(0)} = \frac{SB_z}{(B_x^2 + B_z^2)^{1/2}} + S(2S - 1) \frac{B_x^2 B_z}{(B_x^2 + B_z^2)^2} + O\left(\frac{1}{B^2}\right),$$

$$M_x^{(0)} = \frac{SB_x}{(B_x^2 + B_z^2)^{1/2}} - S(2S - 1) \frac{B_z^2 B_x}{(B_x^2 + B_z^2)^2} + O\left(\frac{1}{B^2}\right),$$

получаем компоненту магнитной восприимчивости

$$\chi_{zz}^{(0)} = \frac{2SB_x^2}{(B_x^2 + B_z^2)^{3/2}} +$$

$$+ 2S(2S - 1) \frac{B_x^2(B_x^2 - 3B_z^2)}{(B_x^2 + B_z^2)^3} + O\left(\frac{1}{B^3}\right),$$

в частности,

$$\chi_{zz}^{(0)}|_{B_z=0} = \frac{2S}{|B_x|} + \frac{2S(2S - 1)}{B_x^2} + O\left(\frac{1}{|B_x|^3}\right).$$

Другая компонента тензора восприимчивости равна

$$\chi_{xx}^{(0)} = \frac{2SB_z^2}{(B_x^2 + B_z^2)^{3/2}} -$$

$$- 2S(2S - 1) \frac{B_z^2(B_z^2 - 3B_x^2)}{(B_x^2 + B_z^2)^3} + O\left(\frac{1}{B^3}\right),$$

так что

$$\chi_{xx}^{(0)}|_{B_z=0} = O\left(\frac{1}{|B_x|^3}\right).$$

Кроме того,

$$\chi_{xx}^{(0)}|_{B_x=0} = \frac{2S}{|B_z|} - \frac{2S(2S - 1)}{B_z^2} + O\left(\frac{1}{|B_z|^3}\right).$$

Наконец,

$$\chi_{xz}^{(0)} = -\frac{2SB_x B_z}{(B_x^2 + B_z^2)^{3/2}} -$$

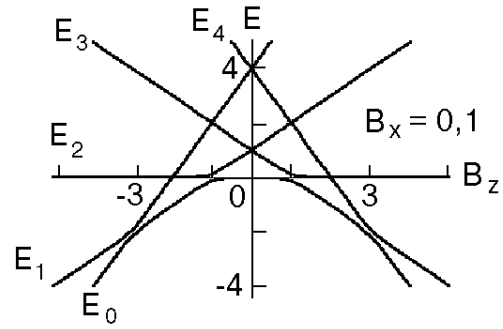


Рис. 3. Типичная структура энергетического спектра легкоплоскостного парамагнетика в наклонном магнитном поле ( $S = 2$ ).

$$- 4S(2S - 1)B_x B_z \frac{B_x^2 - B_z^2}{(B_x^2 + B_z^2)^3} + O\left(\frac{1}{B^3}\right).$$

Аналогичные результаты получаются в больших магнитных полях и в легкоплоскостном случае (см. далее), отличаясь только знаком попарков.

#### 4. Термодинамические величины легкоплоскостных парамагнетиков

Как и при рассмотрении легкоосного случая, в основе результатов для легкоплоскостных парамагнетиков ( $\alpha = +1$ ) также лежит формула для симметричного расщепления уровней энергии основного состояния, однако теперь имеется серия точек на оси  $B_z$ , для которых при  $B_x = 0$  образуются «стыки» в энергетическом спектре.

Собственные значения гамильтониана невозмущенной задачи в чисто продольном магнитном поле  $H_0 = S_z^2 - B_z S_z$  могут классифицироваться по представлению  $S_z$ , что приводит к изломному характеру энергетического спектра [4]. При небольших значениях поперечной составляющей магнитного поля  $|B_x| \ll 1$  сетка уровней слегка деформируется, так что в местах стыков с двукратным вырождением возникают просветы (это иллюстрирует график, приведенный на рис. 3 для случая  $S = 2$  и  $|B_x| = 0,1$ ), хорошо описываемые теорией возмущений для двукратного вырождения (в точках стыков) или для близких уровней энергии (в окрестностях этих точек).

Для основного и первого возбужденного уровней энергии точкам стыка соответствуют значения  $B_z = B_m$ , где в случае  $S$  целых

$$B_m = 2m - 1, \quad c_m = (S + m)(S - m + 1),$$

$$m = -S + 1, -S + 2, \dots, S - 1, S,$$

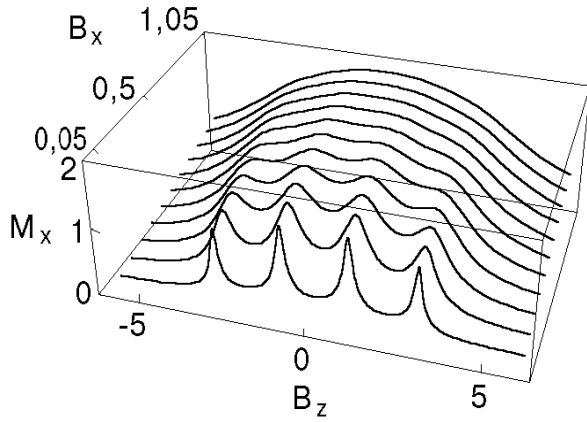


Рис. 4. Поведение намагниченности легкоплоскостного парамагнетика в зависимости от магнитного поля в случае  $S = 1$ .

а в случае  $S$  полуцелых

$$B_m = 2m, \quad c_m = (S + 1/2)^2 - m^2, \quad (17)$$

$$m = -S + 1/2, -S + 3/2, \dots, S - 3/2, S - 1/2.$$

Вблизи каждой точки  $B_m$ , пользуясь результатом теории возмущений в случае двукратного вырождения или близких уровней энергии, получаем локальные формулы: в случае  $S$  целых имеем

$$E_{0,1} = m^2 - m + 1/2 - (m - 1/2)B_z \mp \frac{1}{2} \sqrt{c_m B_x^2 + (B_z - B_m)^2}, \quad (18)$$

а в случае  $S$  полуцелых

$$E_{0,1} = m^2 - 1/4 - mB_z \mp \frac{1}{2} \sqrt{c_m B_x^2 + (B_z - B_m)^2}. \quad (19)$$

Важно подчеркнуть, что основную роль в дальнейшем применении полученных формул для низколежащих уровней энергии будет играть корневой член в (18) и (19), в связи с чем будем говорить о результатах (18) и (19) как о симметричном расщеплении. Добавим также, что результаты (18) и (19) представляют самостоятельный интерес в связи с проблемой спинового туннелирования [8, 9], где основным предметом исследования является именно расщепление уровней энергии.

Рассмотрим намагниченность в основном состоянии  $M_x^{(0)}$  как функцию продольного магнитного поля  $B_z$  при различных значениях поперечной составляющей  $B_x$ . В соответствии с формулами симметричного расщепления (18) и (19) для основного уровня энергии при малых

значениях  $|B_x| \ll 1$  в окрестности значений  $B_z = B_m$  со стыками этого уровня энергии с первым возбужденным искомым величина  $M_x^{(0)} = -\partial E_0 / \partial B_x$  равна

$$M_x^{(0)}(B_z) = \frac{1}{2} \frac{c_m B_x}{(c_m B_x^2 + (B_z - B_m)^2)^{1/2}}, \quad |B_z - B_m| < 1, \quad (20)$$

где  $B_m$  и  $c_m$  определяются выражениями (16) и (17).

Количество всплесков  $M_x^{(0)}$  на всей оси  $B_z$  равно  $2S$ . Каждый пик имеет характерную заостренную форму с максимумом  $\sqrt{c_m}/2$  в точках  $B_z = B_m$  и шириной  $\sim \sqrt{c_m} |B_x|$ , так что центральные всплески несколько выше и шире периферийных. В частности, в случае полуцелых  $S$  высота наибольшего (центрального) пика составляет  $1/2 (S + 1/2)$ , а наименьшего равна  $\sqrt{S/2}$  (в случае целых  $S$  соответственно  $1/2 \sqrt{S(S+1)}$  и  $\sqrt{S/2}$ ). Поскольку расстояние между максимумами на оси  $B_z$  равно 2, с увеличением  $|B_x|$  они предрасположены к наложению и слиянию с образованием вначале формы в виде «короны», которая при дальнейшем увеличении  $|B_x|$  приобретает колоколообразный профиль. Это хорошо видно на серии графиков, представленных на рис. 4 для спина  $S = 2$ .

Вторым примером служит компонента магнитной восприимчивости  $\chi_{zz}^{(0)}$  в зависимости от  $B_z$  при различных значениях  $B_x$ . Аналогично  $M_x^{(0)}$  эта величина также получается на основе формулы симметричного расщепления и, будучи связанной с энергией соотношением  $\chi_{zz}^{(0)} = -2\partial^2 E_0 / \partial B_z^2$ , в окрестности изломов равна

$$\chi_{zz}^{(0)}(B_z) = \frac{c_m B_x^2}{[c_m B_x^2 + (B_z - B_m)^2]^{3/2}}, \quad |B_z - B_m| < 1, \quad (21)$$

где величины  $B_m$  и коэффициенты  $c_m$  те же, что и в формуле (20).

Во многих отношениях свойства магнитной восприимчивости подобны таковым для намагниченности, однако есть и существенные отличия. Так, в силу более быстрого убывания при удалении от точек излома  $B_m$  (по закону двумерного распределения Стюдента) всплески оказываются острее, а аппроксимация (21) хорошо перекрывает не только окрестности изломов  $B_m$ , но и промежутки между этими точками, где происходит наложение всплесков. При этом можно использовать «глобальное» представление для  $\chi_{zz}^{(0)}$  в виде формулы суммирования

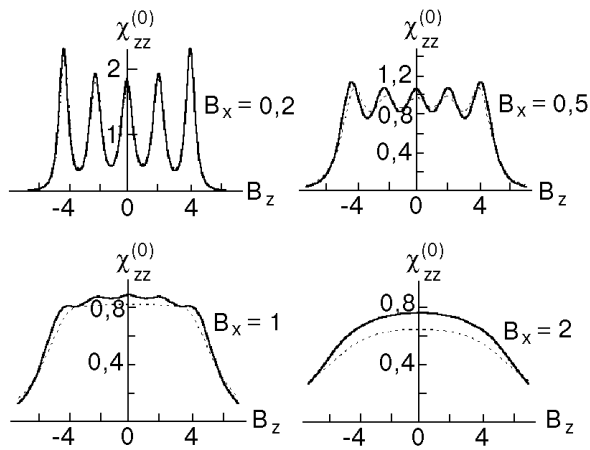


Рис. 5. Зависимость восприимчивости легкоплоскостного парамагнетика от поперечной составляющей магнитного поля  $B_x$  в случае  $S = 5/2$  (пунктирная линия – приближение симметричного расщепления).

$$\chi_{zz}^{(0)}(B_z) = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{c_m B_x^2}{[c_m B_x^2 + (B_z - B_m)^2]^{3/2}},$$

где в случае  $S$  целых  $m_1 = -S + 1$ ;  $m_2 = S$ , а в случае  $S$  полуцелых  $m_1 = -S + 1/2$ ;  $m_2 = S - 1/2$ . Для  $\chi_{zz}^{(0)}$  высота всплесков  $1/(\sqrt{c_m} |B_x|)$  уменьшается с ростом  $|B_x|$  (при той же ширине  $\sqrt{c_m} |B_x|$ ), и более высокие пики расположены в центре, а не на периферии. Соответствующие иллюстрации приведены на рис. 5. Влияние температуры в основном такое же, как и в легкоосном случае, описывается формулами типа (15) и иллюстрируется графиками, приведенными на рис. 6 и 7.

### 5. Заключение

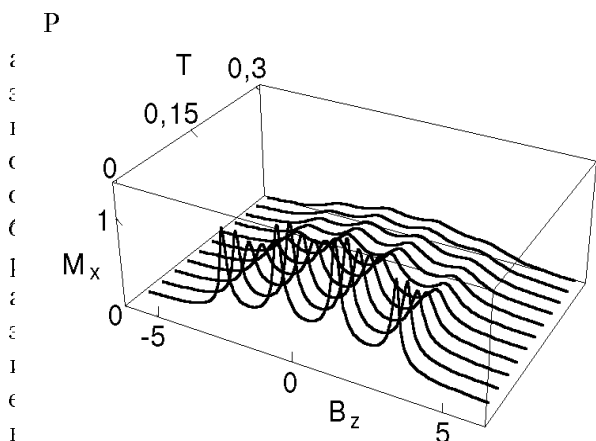


Рис. 6. Влияние температуры на поведение намагниченности легкоплоскостного парамагнетика при  $B_x = 0,1$  в случае  $S = 2$ .

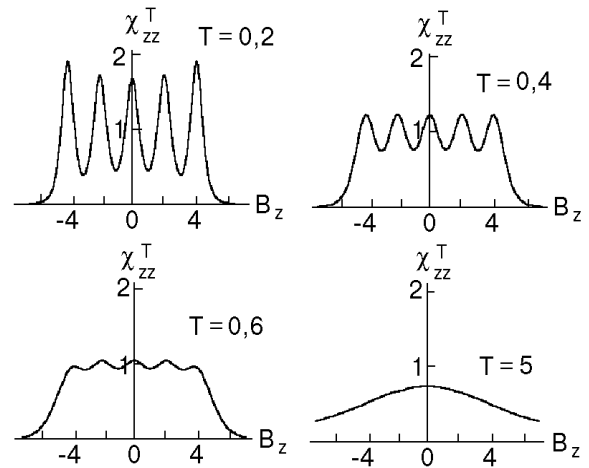


Рис. 7. Влияние температуры на всплески магнитной восприимчивости легкоплоскостного парамагнетика при  $B_x = 0,2$  в случае  $S = 5/2$ .

ин и частных случаев все же позволяет сделать некоторые общие выводы о поведении рассматриваемых систем в целом. Главное состоит в том, что все отмеченные особенности физических характеристик наблюдаются в области небольших значений поперечной составляющей магнитного поля, когда происходит существенная перестройка энергетического спектра. При больших же значениях магнитного поля намагниченность достигает насыщения, а восприимчивость становится ничтожно малой.

При этом существенную роль играет тип магнитной анизотропии, т.е. знак константы  $\alpha$ . На языке восприимчивости имеем в случае  $\alpha = -1$  одиночные всплески, а в случае  $\alpha = +1$  – систему  $2S$  всплесков. Все многообразие объединяется универсальностью форм, например в виде двумерного распределения Стьюдента для  $\chi_{zz}$ .

Влияние температуры сводится к некоторому сглаживанию или размыванию пиков. В случае чисто продольного поля точечные особенности восприимчивости в виде  $\delta$ -функций сменяются всплесками конечной высоты и ширины. Аналогичным образом в случае спина  $S = 1/2$  восприимчивость  $\chi_{xx}$  в поперечном магнитном поле при конечной температуре становится отличной от нуля. Заметим также, что наклон магнитного поля, т.е. появление поперечной составляющей  $B_x$ , влияет на форму  $\chi_{zz}$  подобно температуре.

Еще раз подчеркнем, что для описания низкотемпературных свойств рассмотренных анизотропных парамагнетиков в наиболее интересной области магнитных полей фактически

достаточно знать поведение основного уровня энергии.

Для краткости приводим лишь основные результаты и опускаем достаточно громоздкие формулы, стараясь компенсировать это графическими иллюстрациями.

Добавим несколько замечаний о методике расчетов. Изучение физических свойств одноосных парамагнетиков опиралось, во-первых, на аналитические точные и разного рода приближенные вычисления, во-вторых, на компьютерные аналитические и численные расчеты, а также графические построения. Эти подходы взаимно контролируют и дополняют друг друга. При этом часто именно графический метод служит стимулом аналитических расчетов, являясь аналогом физического эксперимента.

Авторы выражают глубокую благодарность В. М. Цукернику, вместе с которым были сделаны наши первые шаги в теории спиновых систем.

Данную работу мы посвящаем А. М. Косевичу, чье служение науке является для нас образцом.

1. О. Б. Заславский, В. В. Ульянов, В. М. Цукерник, *ФНТ* **9**, 511 (1983).
2. V. V. Ulyanov and O. B. Zaslavskii, *Phys. Rept.* **216**, 179 (1992).
3. В. В. Ульянов, О. Б. Заславский, Ю. В. Василевская, *ФНТ* **23**, 110 (1997).
4. Л. Д. Филатова, В. М. Цукерник, *ЖЭТФ* **56**, 1290 (1969).
5. Е. В. Розенфельд, *Письма в ЖЭТФ* **24**, 60 (1976).
6. О. Б. Заславский, В. В. Ульянов, *ЖЭТФ* **87**, 1724 (1984); *ТМФ* **71**, 260 (1987).
7. А. С. Давыдов, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1973).
8. A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1 (1987).
9. C. P. Bean and J. D. Livingston, *J. Appl. Phys.* **30**, 120S (1959).

## Low-temperature properties of uniaxial paramagnets in oblique magnetic field

O. B. Zaslavskii, V. V. Ulyanov,  
and Yu. V. Vasilevskaya

The behavior of uniaxial paramagnets in an oblique magnetic field is considered as a function of temperature. An energy spectrum structure and components of magnetization and susceptibility are obtained. Exact formulae for the spin  $S = 1/2$  are derived. For arbitrary values of  $S$  we study easy-axis and easy-plane cases and determine the thermodynamic characteristics in different limiting cases (small and large magnetic fields, low and superlow temperatures, etc.). It is shown that in the easy-plane case for low temperatures the transverse magnetization and longitudinal susceptibility as functions of magnetic field strength exhibit a series of sharp splashes whereas in the easy-axis case the longitudinal components of these quantities have only a single splash.