Физика низких температур, 1998, т. 24, № 6, с. 522–532

Кинетика длинноволновых флуктуаций и квазилинейная релаксация на нулевом звуке в нормальной ферми-жидкости

Ю. В. Слюсаренко

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
Украина, 310108, г. Харьков, ул. Академическая, 1
E-mail: slusarenko@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 12 января 1998 г., после переработки 10 февраля 1998 г.

Предложен универсальный феноменологический подход к изучению эволюции макроскопических флуктуаций и получены общие уравнения кинетики длинноволновых флуктуаций в нормальной ферми-жидкости. Исходя из этих кинетических уравнений в приближении парных флуктуаций построена теория квазилинейной релаксации на нулевом звуке в нормальной ферми-жидкости. Рассмотрены условия существования квазилинейного приближения.

Запропоновано універсальний феноменологічний підхід до вивчення еволюції макроскопічних флуктуацій та одержано загальні рівняння кінетики довгохвильових флуктуацій в нормальній фермі-рідині. Виходячи з цих кинетичних рівнянь в наближенні парних флуктуацій побудовано теорію квазілінійної релаксації на нульовому звуку в нормальній фермі-рідині. Розглянуто умови існування квазілінійного наближення.

PACS: **05.20.**- y, 05.30. Fk

Введение

Макроскопические (длинноволновые) флуктуации играют заметную роль в широком круге физических явлений как в классических, так и в квантовых системах*. Известно определяющее влияние флуктуаций в теориях турбулентности [3,4], «длинных гидродинамических хвостов» [5–8] и взаимодействующих мод [9,10]. В [2] развит микроскопический подход (основанный на обобщении метода сокращенного описания Боголюбова) к построению кинетической и гидродинамической теорий длинноволновых флуктуаций (см. в этой связи также [11,12]) и отмечено, что в приближении парных флуктуаций при слабом кулоновском взаимодействии между частицами легко из общих флуктуационно-кинетических уравнений получить уравнения квазилинейной релаксации в плазме. Решающую роль при этом играют слагаемые в кинетических уравнениях, описывающие влияние на динамику системы самосогласованного поля. Из-за специфических свойств, связанных с зависимостью гамильтониана квазичастицы от функции распределения (см., например, [13–17]), явления, аналогичные бесстолкновительной релаксации в плазме, должны наблюдаться и в нормальных ферми-жидкостях, как заряженных, так и нейтральных. Естественно, это только одно из явлений (хотя и специфическое), вызывающих интерес к построению кинетической теории макроскопических флуктуаций в нормальной ферми-жидкости, чему и посвящена настоящая работа. В качестве приложения полученных нами общих уравнений кинетики длинноволновых флуктуаций в нормальной ферми-жидкости

* Под макроскопическими (длинноволновыми, крупномасштабными) флуктуациями понимается в традиционном смысле сглаживание параметров описания системы по пульсациям, пространственные масштабы локализации которых сравнимы с характерными пространственными масштабами сил взаимодействия между частицами или квазичастицами [1,2].

рассматривается вывод уравнений квазилинейной релаксации на «нулевом звуке».

1. Кинетические уравнения длинноволновых флуктуаций в нормальной ферми-жидкости

При построении кинетической теории макроскопических флуктуаций в нормальной ферми-жидкости удобнее и нагляднее использовать не микроскопический подход [2,11,12], конкретная реализация которого для сложных систем зачастую связана со значительными (хотя в принципиальном отношении и преодолимыми) математическими трудностями, а эквивалентный универсальный и простой феноменологический подход, разработанный в [18,19] и проверенный на соответствие микроскопическому на примере газообразных сред. Этот подход основан на использовании процедуры усреднения кинетических уравнений (без учета влияния флуктуаций) по случайным начальным условиям [18] либо по внешней случайной силе [19], порождающей флуктуации.

Прежде чем перейти непосредственно к выводу уравнений кинетической теории длинноволновых флуктуаций в нормальной ферми-жидкости, сделаем несколько замечаний относительно приближений, используемых в настоящей работе.

Под «нормальной ферми-жидкостью» традиционно понимается вырожденная ферми-жидкость, сохраняющая существенные свойства систем невзаимодействующих фермионов. Мы будем интересоваться в основном нейтральной ферми-жидкостью. Однако вполне вероятно, что полученные в настоящей работе результаты в принципе останутся справедливыми и для заряженных ферми-жидкостей, поскольку в последних также существуют слабо затухающие нуль-звуковые колебания [30]. По этой причине будем выделять характерные свойства, общие для заряженных и нейтральных ферми-жидкостей, главным из которых является зависимость гамильтониана возбуждений ε от функции распределения квазичастиц $n(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$; $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n)$ [13–17,20–28]. Отвлечемся также от наличия у частиц спина, что допустимо при решении достаточно широкого круга задач, т.е. будем считать, что состояние системы описывается одночастичной функцией распределения $n(x, t)$, $(x \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{p}))$, зависящей в момент времени t от координаты $\mathbf{x}$ и импульса $\mathbf{p}$ и не зависящей от спиновых переменных. Как будет видно из дальнейшего изложения, в рамках предложенного подхода можно было бы отказаться от многих сделанных упрощений, что привело бы к неоправданному в данном случае усложнению выкладок, в принципиальном отношении мало изменяя основные результаты работы.

Естественно, что подразумевается выполнимым главное условие применимости теории нормальной ферми-жидкости

$$\varepsilon_F >> T \,, \tag{1}$$

где T — температура, измеряемая в энергетических единицах.

В рамках сделанных предположений кинетическое уравнение, описывающее неравновесное состояние нормальной ферми-жидкости без учета флуктуаций, можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) + \frac{\partial \varepsilon(x; n)}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial n(x, t)}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \varepsilon(x; n)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial n(x, t)}{\partial \mathbf{p}} = L(x, n) \,, \tag{2}$$

где $L(x, n) = L(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n(\mathbf{x}', \mathbf{p}'))$ — интеграл столкновений, явный вид которого в настоящей работе не понадобится (см., например, [13–17,20–24]). Вид энергии квазичастицы $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n)$ как функционала функции распределения $n(x, t)$ будет конкретизирован в разд. 2 при рассмотрении бесстолкновительной релаксации на нулевом звуке в нормальной ферми-жидкости (напомним, что явный вид энергии взаимодействия квазичастиц в феноменологической теории неизвестен и ее параметры подлежат определению из эксперимента).

Уравнение (2) в рамках оговоренных приближений полностью описывает кинетические явления в нормальной ферми-жидкости, строго говоря, только при четко определенных начальных значениях функции распределения $n(x, t)$. Однако такая ситуация представляется достаточно частной (см. [2]). Более общей является ситуация, когда начальные условия в кинетическом уравнении (2) являются случайными и возникает задача об усреднении этого уравнения по такому распределению начальных условий [2]. В этом подходе одночастичная функция распределения, удовлетворяющая уравнению (2), является случайной в силу заданных начальных условий $\hat{n}(x, t) = n(x, t; \hat{n}(x', 0))$, значок "^" над n подчеркивает случайный характер этой величины. Попытка усреднения кинетического уравнения (2) по начальным условиям приводит к необходимости введения в рассмотрение величин $n_s(x_1, \ldots x_s; t)$:

$$n_s(x_1, \ldots x_s; t) \equiv \langle \hat{n}(x_1, t) \ldots \hat{n}(x_s, t) \rangle , \quad (3)$$

где

$$\langle \ldots \rangle = \int D\hat{n}(x, 0)\ W[\hat{n}(x, 0)] \ldots \quad (4)$$

означает усреднение в пространстве функций $\hat{n}(x, 0)$ ($W[\hat{n}(x, 0)]$ — соответсвующая плотность вероятности). Величины $n_s(x_1, \ldots x_s; t)$, представляющие собой аналог многочастичных функций распределения, могут быть получены s-кратным дифференцированием по функциональному аргументу $u(x) \equiv u(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ производящего функционала

$$F(u; n_a(t)) = \left\langle \exp \left(\sum_{\mathbf{p}} \int d\mathbf{x} u(x)\ \hat{n}(x, t) \right) \right\rangle , \quad (5)$$

где $n_a(t)$ обозначает весь набор величин n_s. Введем далее производящий функционал $\mathcal{G}(u; g)$ корреляционных функций $g_s(x_1, \ldots x_s; t)$ $(s \geq 2)$

$$\mathcal{G}(u; g_a(t)) = \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{\mathbf{p}_1} \int d\mathbf{x}_1 \ldots \times$$

$$\times \sum_{\mathbf{p}_s} \int d\mathbf{x}_s u(x_1) \ldots u(x_s) g_s(x_1, \ldots x_s; t) , \quad (6)$$

связанный с производящим функционалом $F(u; n_a(t))$ соотношением

$$F(u; n_a(t)) = \exp \left(G_0(u; n) + \mathcal{G}(u; g_a(t)) \right), \quad (7)$$

где

$$G_0(u; n) = \sum_{\mathbf{p}} \int d\mathbf{x} u(x)\ n(x, t) , \quad (8)$$

$g_1(x, t) \equiv n_1(x, t) = n(x, t)$, $g_a(t)$ обозначает весь набор корреляционных функций g_s. Легко видеть, что введенные формулами (6)–(8) корреляционные функции g_s представляют собой флуктуации одночастичной функции распределения, обусловленные распределением начальных условий (см. (4)). Таким образом, описание макроскопических флуктуаций в нормальной ферми-жидкости может производиться либо в терминах моментов, определяемых выражениями (3), (4), либо в терминах корреляционных функций $g_a(t)$. (Напомним, что в данном случае термин «макроскопические» или «длинноволновые» флуктуации обусловлен справедливостью вигнеровского приближения при описании системы только для временных и пространственых масштабов, намного больших соответствующих атомных характерных масштабов.) Уравнения движения для указанных параметров и будут уравнениями кинетики макроскопических флуктуаций в нормальной ферми-жидкости. Прежде чем перейти к выводу этих уравнений, покажем, что для любой величины $A(n; g_a(t))$, представляющей собой произвольный функционал от случайной функции распределения $\hat{n}(x, t)$, усредненный по случайным начальным условиям в соответствии с выражением (4),

$$A(n; g_a(t)) \equiv \langle A(\hat{n}) \rangle , \quad n = \langle \hat{n} \rangle , \quad (9)$$

справедлива формула

$$A(n; g_a(t)) = \exp \left\{ \mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta n} ; g_a(t) \right) \right\} A(n) , \quad (10)$$

где функциональный оператор $\mathcal{G}(\delta/\delta n; g_a(t))$ является производящим функционалом $\mathcal{G}(u; g_a(t))$, в котором функциональный аргумент $u(x)$ заменяется операцией функционального дифференцирования по $n(x, t)$. Для доказательства (10) заметим, что, согласно (5), величину $\langle A(\hat{n}) \rangle$ можно представить в виде

$$\langle A(\hat{n}) \rangle = \left\langle \exp \left\{ \sum_{\mathbf{p}'} \int d\mathbf{x}' \hat{n}(x') \frac{\delta}{\delta \underline{n}(x')} \right\} A(\underline{n}) \right\rangle \Bigg|_{\underline{n}=0} =$$

$$= F\left(\frac{\delta}{\partial \underline{n}} ; n_a(t) \right) A(\underline{n}) \Bigg|_{\underline{n}=0} . \quad (11)$$

Учитывая, что в соответствии с (8)

$$\exp \left\{ G_0 \left(\frac{\delta}{\delta \underline{n}} ; n \right) \right\} A(\underline{n}) = A(\underline{n} + n) , \quad (12)$$

и принимая во внимание (7), приходим к выражению (10).

Уравнения эволюции для величин $n_s(x_1, \ldots x_s; t)$ [или, что одно и то же, для производящего функционала $F(u; n_a(t))$] выводятся из уравнения (2), представленного в удобном для дальнейших выкладок виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{n}(x, t) = \mathcal{L}(x; \hat{n}) , \quad (13)$$

где введено обозначение

$$\mathcal{L}(x;\,\hat{n}) \equiv L(x;\,\hat{n}) + \frac{\partial\varepsilon(x,\,\hat{n})}{\partial\mathbf{x}}\,\frac{\partial\hat{n}(x,\,t)}{\partial\mathbf{p}} - \\ - \frac{\partial\varepsilon(x,\,\hat{n})}{\partial\mathbf{p}}\,\frac{\partial\hat{n}(x,\,t)}{\partial\mathbf{x}}\,. \qquad (14)$$

Дифференцируя определение (5) по времени и используя (12), (13), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\,F(u;\,n_a(l)) = \\ = \exp\left\{G_0(u,\,n)\right\}\,\exp\left\{\mathcal{G}\left(u + \frac{\delta}{\delta n}\,;\,g_a(l)\right)\right\} \times \\ \times \sum_{\mathbf{p}}\int d\mathbf{x}u(x)\,\mathcal{L}(x;\,n)\,. \qquad (15)$$

Уравнение (14) с учетом (7), (8) можно представить в виде уравнения движения для одночастичной функции распределения, усредненной по случайным начальным условиям $n(x,\,t) = \langle\hat{n}(x,\,t)\rangle$,

$$\frac{\partial n(x,\,t)}{\partial t} = \exp\left[\mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta n}\,;\,g_a(t)\right)\right]\mathcal{L}(x;\,n)\,, \quad (16)$$

и уравнения движения для производящего функционала $\mathcal{G}(u;\,g_a(t))$ корреляционных функций $g_s(x_1\,,\,\ldots\,x_s\,;\,t)$ $(s \geq 2)$

$$\frac{\partial\mathcal{G}(u;\,g_a(t))}{\partial t} = \\ = \left\{\exp\left[\mathcal{G}\left(u + \frac{\delta}{\delta n}\,;\,g_a(t)\right) - \mathcal{G}(u;\,g_a(t))\right] - \right. \\ \left. - \exp\left[\mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta n}\,;\,g_a(t)\right)\right]\right\}\sum_{\mathbf{p}}\int d\mathbf{x}\,u(x)\,\mathcal{L}(x;\,n)\,. \qquad (17)$$

Уравнения (16), (17) полностью описывают динамику макроскопических флуктуаций в изучаемой системе. Следует сказать, что функционал $\mathcal{L}(x;\,\hat{n})$ в этих уравнениях (см. (14)) является, как и в случае обычной (бесфлуктуационной) кинетики, единственной величиной, определяющей эволюцию макроскопических флуктуаций на кинетическом ее этапе. Это соответствует принципу Онзагера [31], согласно которому макроскопические флуктуации эволюционируют в соответствии с законами макроскопической физики; таким законом в изучаемом случае является кинетическое уравнение (13). Отметим и то обстоятельство, что при выводе уравнений (16), (17) явный вид функционала $\mathcal{L}(x;\,\hat{n})$ не понадобился.

Заслуживает внимания то, что уравнение (17) допускает решение $\mathcal{G} = 0$. При этом уравнение (16) преобразуется в (13). Однако решение $\mathcal{G} = 0$ соответствует очень специальным начальным условиям $g_s(t = 0) = 0$, $s \geq 2$, вследствие чего возникает необходимость выяснения роли крупномасштабных флуктуаций в кинетике нормальной ферми-жидкости. Возможность существенного влияния макроскопических флуктуаций на эволюцию системы можно продемонстрировать на примере построения теории квазилинейной релаксации на нулевом звуке в нормальной ферми-жидкости, имея в виду некоторые отмечавшиеся в настоящей работе сходные свойства нормальной ферми-жидкости и плазмы, в которой такая квазилинейная релаксация на слабозатухающих колебаниях с характерными плазменными частотами известна достаточно давно (см., например, [31,32]).

2. Квазилинейная релаксация на нулевом звуке в нормальной ферми-жидкости

Одно из условий существования квазилинейной релаксации связано с возможностью распространения в системе долгоживущих колебаний с бесстолкновительным механизмом затухания. В заряженной ферми-жидкости должны существовать такого рода колебания с характерными плазменными частотами (например, ленгмюровскими), вследствие чего квазилинейная релаксация, основанная на обмене фермионов плазмонами, в принципиальном отношении не может значительно отличаться от аналогичного явления в невырожденной плазме. По этой причине отвлечемся от возможности существования характерных плазменных колебаний в заряженной ферми-жидкости, интересуясь построением квазилинейной теории, основанной на существовании нулевого звука — специфического явления, присущего только нормальным ферми-жидкостям вне зависимости от того, обладают ли фермионы зарядом или нет.

Остановимся на достаточно простой модели нормальной ферми-жидкости, считая, что зависимость функционала энергии возбуждений от функции распределения дается выражением (см., например, [23,24])

$$\varepsilon(x;\, n) = \varepsilon(p) + \sum_{\mathbf{p}'} \int d\mathbf{x}'\, f(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, n(x',\, t)\ , \quad (18)$$

т.е. ограничиваясь, по сути, пространственно-однородным и изотропным законом дисперсии квазичастиц $\varepsilon(p)$ и зависимостью $\varepsilon(x;\, n)$ от функции распределения $n(x,\, t) = n(\mathbf{x},\, \mathbf{p},\, t)$ только через плотность $\rho(\mathbf{x},\, t) = \sum_{p} n(x,\, t)$. Функция $f(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ в выражении (18) описывает взаимодействие квазичастиц.

Нас также интересуют кинетические явления в исследуемой системе в бесстолкновительном приближении, что сразу накладывает определенные ограничения на временной интервал изучаемого приближения:

$$\tau_0 << t << \tau_r\ , \quad (19)$$

где τ_r — время релаксации, определяемое интегралом столкновений. Время τ_0, ограничивающее этот интервал снизу, находится из требования применимости уравнений (16), (17) при описании флуктуационно-кинетического этапа эволюции в бесстолкновительной нормальной ферми-жидкости. Действительно, медленность изменения со временем «многочастичных функций распределения» $n_s(x_1\, ,\, \ldots\, x_s\, ;\, t)$ (см. (3)), удовлетворяющих уравнениям (16), (17), применительно к флуктуирующим ферми-жидкостям должна означать малость характерных периодов колебаний по сравнению с характерным временем t изменения функций $n_s(x_1\, ,\, \ldots\, x_s\, ;\, t)$; $\omega_{\text{ch}} t >> 1$, где ω_{ch} — характерная частота колебаний. Поскольку из всего возможного спектра характерных частот мы намерены выделить в настоящей работе только частоту колебаний нулевого звука $\omega_0(k)$ (см. ниже), временной интервал, в котором справедливо рассматриваемое приближение, в соответствии с (19) задается соотношением

$$1 << \omega_0(k) t << \omega_0(k) \tau_r\ . \quad (20)$$

Отметим, что условия, при которых квазилинейное приближение в невырожденной плазме может быть справедливым, наиболее подробно изложены в [34].

Перейдем теперь непосредственно к выводу уравнений квазилинейного приближения. Ограничимся учетом влияния на динамику системы только парных флуктуаций, что находится в соответствии с приближениями квазилинейной теории в обычной плазме.

В рамках оговоренных приближений уравнения кинетики длинноволновых флуктуаций с учетом только парных корреляционных функций $g(x_1\, ,\, x_2\, ,\, t)$ с использованием (16)–(18) могут быть приведены к виду

$$\frac{\partial n(x)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\} n(x) + $$

$$+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}'} \int d\mathbf{x}'\, \frac{\partial f(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}}\, g(x,\, x')\ , \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\, g(x_1\, ,\, x_2) =$$

$$= \left\{ -\frac{\partial \varepsilon(p_1)}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\partial U(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right\} g(x_1\, ,\, x_2) +$$

$$+ \left\{ -\frac{\partial \varepsilon(p_2)}{\partial \mathbf{p}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} + \frac{\partial U(\mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right\} g(x_1\, ,\, x_2) +$$

$$+ \frac{\partial n(x_1)}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \sum_{\mathbf{p}'} \int d\mathbf{x}'\, f(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}') g(x',\, x_2) +$$

$$+ \frac{\partial n(x_2)}{\partial \mathbf{p}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \sum_{\mathbf{p}'} \int d\mathbf{x}'\, f(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}') g(x_1\, ,\, x')\ ,$$

где величина $U(\mathbf{x})$ дается выражением

$$U(\mathbf{x}) \equiv \sum_{\mathbf{p}'} \int d\mathbf{x}'\, f(\mathbf{x}-\mathbf{x}') n(x')\ . \quad (22)$$

Уравнения (21) с учетом (22) и представляют собой замкнутую систему уравнений, описывающих эволюцию нормальной ферми-жидкости при временах, задаваемых соотношением (20). В пространственно-однородном случае эти уравнения значительно упрощаются. Первое из уравнений (21) может быть записано в виде

$$\frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial p_i} J_i(\mathbf{p})\ , \quad (23)$$

где плотность потока квазичастиц $J_i(\mathbf{p})$ в импульсном пространстве дается выражением

$$J_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}k_i f_{-\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}'} g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t) \ , \qquad (24)$$

в котором величины $f_{\mathbf{k}}$, $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t)$ представляют собой соответственно фурье-образы функции взаимодействия $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ и парной корреляционной функции $g(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t)$:

$$f_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{x} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})f(\mathbf{x}) \ ,$$
$$g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t) = \int d\mathbf{x} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})g(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \ , \qquad (25)$$

причем в силу того, что $g(x, x') = g(x', x)$, для величины $g_{\mathbf{k}}$ справедливо соотношение

$$g^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t) = g_{-\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t) \qquad (26)$$

(в формулах (24), (25) учтено, что в пространственно-однородном случае парная корреляционная функция $g(x, x'; t)$ зависит только от разности координат $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$: $g(x, x'; t) \equiv g(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \mathbf{p}, \mathbf{p}'; t)$).

Фурье-компонента $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t)$ в соответствии (21) удовлетворяет уравнению

$$\dot g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2) = -i\mathbf{k}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\, g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2) +$$
$$+ i\mathbf{k}\, \frac{\partial n(\mathbf{p}_1)}{\partial \mathbf{p}_1}\, f_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}'} g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}_2) -$$
$$- i\mathbf{k}\, \frac{\partial n(\mathbf{p}_2)}{\partial \mathbf{p}_2}\, f_{-\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}'} g_{-\mathbf{k}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}_1) \ , \qquad (27)$$

где

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \ . \qquad (28)$$

Уравнения (23), (27) в сочетании с (24), (27) являются исходными при выводе основных уравнений квазилинейной теории нормальной ферми-жидкости. Дальнейшая задача заключается в нахождении решений уравнения (27). В соответствии с методом разделения переменных решение этого уравнения будем искать в виде

$$g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 ; t) = g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1 , t)g_{-\mathbf{k}}(\mathbf{p}_2 , t) \ , \qquad (29)$$

причем, согласно (26), функции $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t)$ и $g_{-\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t)$ связаны между собой соотношением

$$g^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t) = g_{-\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t) \ . \qquad (30)$$

Из (27) получаем уравнение движения для величины $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t)$:

$$\dot g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t) = -\, i\mathbf{k}\mathbf{v}g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t) + i\mathbf{k}\, \frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\, \varphi_{\mathbf{k}}(t) \ , \qquad (31)$$

где введено следующее обозначение:

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) \equiv f_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}} g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t) \ . \qquad (32)$$

Поскольку предполагается, что в изучаемом состоянии системы функция распределения $n(\mathbf{p}, t)$ в интервале времени (20) изменяется медленно со временем, решение уравнения (31) будем искать в виде разложения функции $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t)$ в интеграл Фурье по времени

$$g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega t)g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \omega) \ ,$$
$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega t)\varphi_{\mathbf{k}}(\omega) \ , \qquad (33)$$

считая в главном приближении, что $n(\mathbf{p})$ в (31) вообще не зависит от времени. В таком приближении для фурье-образа $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \omega)$ получим, согласно (31), следующее уравнение:

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \omega) = i\mathbf{k}\, \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\, \varphi_{\mathbf{k}}(\omega) \ . \qquad (34)$$

Решение этого уравнения с учетом (32), (33) имеет вид

$$g_{\nu,\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \omega) = A_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{p})\delta(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k}) -$$
$$- \frac{\tilde A_\nu(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0)}\, \mathbf{k}\, \frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \ , \qquad (35)$$
$$\tilde A_\nu(\mathbf{k}, \omega) = \tilde A^*_\nu(\mathbf{k}, \omega) \equiv f_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}} A_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{p})\delta(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k}) \ ,$$

где величины $A_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ являются произвольными функциями, на которые должно накладываться естественное ограничение, связанное с тем, что $g(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 ; t)$, найденные по (25), (29), (33), (35), должны удовлетворять всем свойствам корреляционных функций. Символический дискретный или непрерывный параметр ν «нумерует» или упорядочивает весь допустимый набор таких функций. В (35) величина $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon^*(-\mathbf{k}, -\omega)$

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \equiv 1 + f_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \left(\omega - \mathbf{kv} + i0\right)^{-1} . \quad (36)$$

Функция $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ является неким аналогом комплексной диэлектрической проницаемости плазмы (напомним, что в данном случае речь идет не обязательно о заряженной ферми-жидкости) и после замены суммирования по $\mathbf{p}$ интегрированием в соответствии с (33) может быть представлена в виде

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_1(\mathbf{k}, \omega) + i\varepsilon_2(\mathbf{k}, \omega) , \quad (37)$$

$$\varepsilon_1(\mathbf{k}, \omega) = 1 + (2\pi)^{-3} f_{\mathbf{k}} \mathbf{k} P \int d\mathbf{pk} \frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \left(\omega - \mathbf{kv}\right)^{-1} ,$$

$$\varepsilon_2(\mathbf{k}, \omega) = -f_{\mathbf{k}} (8\pi^2\hbar^3)^{-1} \int d\mathbf{pk} \frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \delta(\omega - \mathbf{vk}) .$$

При получении выражений (37) использована формула

$$(z + i0)^{-1} = P \frac{1}{z} - i\pi\delta(z) ,$$

где символ P означает, что при дальнейшем интегрировании берется главное значение.

Функции $g_{\nu,\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t)$ могут быть найдены из (35) с учетом (33) при помощи теории вычетов, в связи с чем возникает вопрос о нахождении нулей функции $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$. Как обычно, нули функции $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ будем определять из уравнения

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega_0 - i\gamma_{\mathbf{k}}) = 0, \ \omega_0| >> |\gamma_{\mathbf{k}}| . \quad (38)$$

В предположении малости мнимой части $\varepsilon_2(\mathbf{k}, \omega)$ по сравнению с действительной частью $\varepsilon_1(\mathbf{k}, \omega)$ диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ частота ω_0 и декремент (инкремент) $\gamma_{\mathbf{k}}$ должны определяться выражениями

$$\varepsilon_1(\mathbf{k}, \omega_0) = 0 \text{ и } \gamma_{\mathbf{k}} = \varepsilon_2(\mathbf{k}, \omega_0) \left(\frac{\partial \varepsilon_1(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right)^{-1}_{\omega=\omega_0} . \quad (39)$$

В соответствии с условиями применимости теории нормальной ферми-жидкости производная $\partial n(\mathbf{p})/\partial \mathbf{p}$ должна иметь резкий максимум при $p = p_F$, поэтому интеграл по импульсу в выражении (37) для $\varepsilon_1(\mathbf{k}, \omega)$ в главном приближении может быть вычислен в предположении, что $\partial n(\mathbf{p})/\partial \mathbf{p} \approx \approx -(\mathbf{p}/p)\delta(p - p_F)$. В результате придем к следующему дисперсионному соотношению:

$$\omega_0^{\pm} = \pm s_k k v_F , \ \ s_k > 1 , \quad (40)$$

где величина s_k должна находиться из уравнения

$$1 + F_k \left\{ 1 - \frac{s_k}{2} \ln \frac{s_k + 1}{s_k - 1} \right\} = 0 \quad (41)$$

и введены следующие обозначения (см. (22), (25), (28)):

$$v_F = v(p)\Big|_{p=p_F} , \ \ F_K \equiv \frac{f_k p_F^2}{2\pi^2\hbar^3 v_F} . \quad (42)$$

Формулы (40), (41) определяют закон дисперсии нулевого звука в нормальной ферми-жидкости с гамильтонианом квазичастицы, описывающимся выражением (18). Отметим, что вопросы относительно необходимости учета влияния на частоту нулевого звука отклонений функции распределения $n(\mathbf{p})$ от «ступенчатого» распределения $n(p) = \theta(p_F - p)$ в принципиальном отношении разрешимы, по крайней мере они могут быть верифицированы решением полученных ниже уравнений квазилинейной теории, чем в настоящей работе мы не будем заниматься.

Учитывая далее, что для производной $\{\partial\varepsilon_1(k, \omega)/\partial\omega\}|_{\omega=\omega_0(k)}$ справедлива формула

$$\frac{\partial \varepsilon_1(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega}\Bigg|_{\omega=\omega_0(k)} = \frac{F + 1 - s_k^2}{s_k^2 - 1} \frac{1}{\omega_0(k)} , \quad (43)$$

с использованием (39) получим следующее выражение для $\gamma_{\mathbf{k}}$:

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \omega_0(k) \frac{s_k^2 - 1}{(s_k^2 - 1) - F_k} \frac{f_k}{8\pi^2\hbar^3} \times$$

$$\times \int d\mathbf{pk} \frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \delta(\omega_0(k) - \mathbf{kv}) . \quad (44)$$

Из выражения (44) можно увидеть, что в отличие от закона дисперсии колебаний, которые определяются поведением одночастичной функции распределения при $p \approx p_F$, величина $\gamma_{\mathbf{k}}$ зависит от поведения функции распределения на «хвосте», при $\varepsilon > \varepsilon_F$, в силу чего флуктуации одночастичной функции распределения могут играть значительную роль. В справедливости этого утверждения легко убедиться, если предположить изотропность функции распределения в пространстве импульсов, т.е. $n(\mathbf{p}) = n(p)$. Тогда, выполняя в (44) интегрирование по углам, а в оставшемся интеграле переходя от интегрирования по импульсу к интегрированию по $\varepsilon = \varepsilon(p)$, выражение для $\gamma_{\mathbf{k}}$ можно представить в виде

$$\gamma_k = \omega_0(k)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{F_k s_k (s_k^2 - 1)}{(s_k^2 - 1) - F_k}\int\limits_{\bar{\varepsilon}_k}^{\infty} d\varepsilon \left(\frac{p(\varepsilon)}{p_F}\right)^2 \left(\frac{v_F}{v(\varepsilon)}\right)^2 \frac{\partial n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\,, \tag{45}$$

где граничная энергия $\bar{\varepsilon}_k \gtrsim \varepsilon_F$ определяется из соотношения

$$\bar{\varepsilon}_k = \varepsilon(\bar{p}_k)\ ,\quad \left.\frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial p}\right|_{p=\bar{p}_k} = s_k \left.\frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial p}\right|_{p=p_F} . \tag{46}$$

По этой причине величину $\gamma_{\mathbf{k}}$ с равным основанием можно считать как инкрементом, так и декрементом, в зависимости от знака производной $\partial n(\varepsilon)/\partial\varepsilon$ (отметим, что в случае равновесного распределения производная $\partial n(\varepsilon)/\partial\varepsilon$ всегда отрицательна).

С учетом формул (32), (35), (40), (45) результат вычисления интегралов в (33) можно представить в виде

$$\varphi_{\nu,\mathbf{k}}(t) \approx \frac{1}{2}\left\{\varphi^{+}_{\nu,\mathbf{k}}(t) + \varphi^{-}_{\nu,\mathbf{k}}(t)\right\}, \tag{47}$$

$$g_{\nu,\mathbf{k}}(\mathbf{p},\, l) \approx$$

$$\approx \exp\,(-i\mathbf{k}\mathbf{v}l)\left\{A_\nu(\mathbf{p},\,\mathbf{k}) + 2\pi i\,\frac{A_\nu(\mathbf{k},\,\mathbf{k}\mathbf{v})}{\varepsilon(\mathbf{k},\,\mathbf{k}\mathbf{v})}\,\mathbf{k}\,\frac{\partial n(p)}{\partial \mathbf{p}}\right\} +$$

$$+\,\frac{1}{2}\left\{\varphi^{-}_{\nu,\mathbf{k}}(t)(\omega_0(k) + \mathbf{k}\mathbf{v} - i0)^{-1} -\right.$$

$$\left. -\ \varphi^{+}_{\nu,\mathbf{k}}(t)(\omega_0(k) - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0)^{-1}\,\mathbf{k}\,\frac{\partial n(p)}{\partial \mathbf{p}}\right\},$$

где функции $\varphi^{\pm}_{\nu,\mathbf{k}}(l)$ определяются выражениями

$$\varphi^{\pm}_{\nu,\mathbf{k}}(t) = \mp\ 2\pi i\omega_0(k)\tilde{A}_\nu(\mathbf{k},\,\pm\omega_0(k))\,\exp\,(-\gamma_{\mathbf{k}}t \mp\ i\omega_0(k)t), \tag{48}$$

причем в силу (30), (35) эти функции связаны соотношением

$$(\varphi^{+}_{\nu,\mathbf{k}}(t))^{*} = \varphi^{-}_{\nu,-\mathbf{k}}(t)\ . \tag{49}$$

При получении формул (47) учтена малость величины $\gamma_{\mathbf{k}}$ по сравнению с частотой $\omega_0(k)$, в связи с чем в (47) использован знак приблизительного равенства.

Отметим, что введение в рассмотрение именно величин $\varphi^{\pm}_{\nu,\mathbf{k}}(t)$, помимо удобства, обусловлено тем, что в квазичастичном подходе к изучению колебаний в нормальной ферми-жидкости операторы рождения и уничтожения квантов нулевого звука могут быть введены формулами подобными (47). По этой причине величина

$$I_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{\nu} \varphi^{+}_{\nu,\mathbf{k}}(t)\varphi^{-}_{\nu,-\mathbf{k}}(t) = \sum_{\nu} \left|\varphi^{+}_{\nu,\mathbf{k}}(t)\right|^2 \tag{50}$$

совпадает с распределением по волновым числам $\mathbf{k}$ интенсивности нулевых колебаний в нормальной ферми-жидкости.

В силу (29) наиболее общий вид решения уравнений (27) дается выражением

$$g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1\ ,\, \mathbf{p}_2\ ;\ t) = \sum_{\nu} g_{\nu,\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1\ ,\ t)g_{\nu,-\mathbf{k}}(\mathbf{p}_2\ ,\ t)\ . \tag{51}$$

Эта формула объясняет смысл введения индекса ν в функциях $A_\nu(\mathbf{p},\,\mathbf{k})$: при $t = 0$ количество функций $A_\nu(\mathbf{p},\,\mathbf{k})$ должно быть достаточным, чтобы с их помощью можно было сконструировать произвольную начальную корреляционную функцию
$g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1\ ,\, \mathbf{p}_2\ ;\ 0) = \sum_{\nu} g_{\nu,\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1\ ,\ 0)g_{\nu,-\mathbf{k}}(\mathbf{p}_2\ ,\ 0)$.

Используя (51), а также формулы (24), (32), можно представить плотность потока в импульсном пространстве $J_i(\mathbf{p})$ в уравнении (23) в виде

$$J_i(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3}\int d\mathbf{k}\ k_i \sum_{\nu} g_{\nu,\mathbf{k}}(\mathbf{p},\ t)\varphi_{\nu,-\mathbf{k}}(t)\ , \tag{52}$$

где величины $g_{\nu,\mathbf{k}}(\mathbf{p},\ t)$, $\varphi_{\nu,-\mathbf{k}}(t)$ определяются формулами (47).

Сделаем при этом существенное замечание. Согласно (20), выражение (47) содержит быстро осциллирующие слагаемые, что приводит к появлению таких же слагаемых в формулах (51), (52). С другой стороны, как уже отмечалось, возможность применения уравнений (16), (17), (21) требует медленности изменения со временем параметров сокращенного описания (см. (20)) (что, кстати, и позволило искать решение уравнения (27) в виде (33), (47)). Очевидно, появление быстро осциллирующих слагаемых связано с выбором способа решения уравнения (27). Поэтому в дальнейших выкладках при нахождении явного вида величин $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1\ ,\, \mathbf{p}_2\ ;\ t)$, $J_i(p)$ с учетом (47), (48) мы должны сохранить только те слагаемые, которые не содержат быстро осциллирующих множителей типа exp ($\pm i\omega_0 t$), exp ($\pm i\mathbf{kv}t$).

Такой несколько искусственный прием эквивалентен усреднению выражений (51), (52) по характерным периодам нулевых колебаний, которые малы по сравнению с характерными временами изменения одночастичной функции распределения. Исключение из рассмотрения быстрых осцилляций позволяет теперь отказаться от предположения об отсутствии зависимости одночастичной функции распределения $n(\mathbf{p})$ от времени (напомним, что такое приближение использовалось в выкладках начиная с уравнения (34)). Это означает, что все физические величины, описывающие изучаемое состояние системы, медленно меняются со временем, причем характерные масштабы этого изменения порядка характерных времен изменения со временем одночастичной функции распределения $n(\mathbf{p}, t)$.

С учетом изложенных замечаний основные уравнения эволюции изучаемого состояния системы приобретают довольно простой вид. Структура уравнения для одночастичной функции распределения по сравнению с (23) не меняется (для удобства изложения запишем это уравнение еще раз):

$$\frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial p_i} J_i(\mathbf{p}) , \qquad (53)$$

где плотность потока фермионов в импульсном пространстве $J_i(\mathbf{p})$ в соответствии с формулами (47), (48), (52) может быть представлена в виде

$$J_i(\mathbf{p}) = -D_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial p_j} . \qquad (54)$$

Коэффициент диффузии в пространстве импульсов $D_{ij}(\mathbf{p})$ определяется выражением

$$D_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{1}{16\pi^2} \int d\mathbf{k}\; k_i\, k_j\; \delta(\omega_0(k) - \mathbf{kv}) I_{\mathbf{k}}(t) , \qquad (55)$$

где величина $I_{\mathbf{k}}(t)$, пропорциональная распределению интенсивности колебаний по волновому числу $\mathbf{k}$, в соответствии с (48), (50) дается формулой

$$I_{\mathbf{k}}(t) = 4\pi^2\omega_0^2(k) \exp(-2\gamma_{\mathbf{k}} t) \sum_{\nu} \left| A_\nu(\mathbf{k}, \omega_0(k)) \right|^2 . \qquad (56)$$

Легко видеть, что с учетом малости инкремента (декремента) $\gamma_{\mathbf{k}}$ в (45) и медленности его изменения со временем $I_{\mathbf{k}}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{\mathbf{k}}(t) = -2\gamma_{\mathbf{k}}(t) I_{\mathbf{k}}(t) . \qquad (57)$$

Замкнутая с учетом формул (45), (54), (55) система уравнений (53), (57), описывающая релаксацию нуль-звуковых колебаний и релаксацию фермионов, представляет собой уравнения квазилинейной теории нормальной ферми-жидкости, или уравнения квазилинейного приближения. Математическая структура этих уравнений тождественна структуре уравнений квазилинейной теории ленгмюровской плазмы, где и была впервые отмечена возможность квазилинейной релаксации плазмы на частотах характерных плазменных колебаний (см. в этой связи [32–34]).

Заключение

Обсудим условия существования квазилинейного приближения на нулевом звуке в нормальной ферми-жидкости. Характерное время τ_q установления квазилинейного режима, согласно (53), (54), можно оценить следующим образом:

$$\tau_q \sim p_F^2 / D(p_F) . \qquad (58)$$

Предположим, что в начальный момент времени парная корреляционная функция имеет вид

$$g(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\,;\, \mathbf{p}_1\,,\, \mathbf{p}_2\,;\, 0) =$$

$$= g_0 \xi\,(|\mathbf{p}_1|, |\mathbf{p}_2|) \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}{R^2} \right), \qquad (59)$$

где g_0 — амплитуда начальных пульсаций; $\xi(p_1\,,\, p_2)$ — некая функция, определяющая зависимость парной корреляционной функции от импульсов; R — характерные размеры пространственной локализации начальных пульсаций. В результате несложных, но достаточно громоздких выкладок оценим величину $I_{\mathbf{k}}(0)$, входящую в выражение для $D(p)$ (см. (55), (56)):

$$I_k(0) \sim g_0 \xi (s v_F)^2 F^2 p_F^2 R^3 \exp\left(\frac{-R^2 k^2}{4} \right), \qquad (60)$$

где s, F по-прежнему определяются формулами (41), (42), а величина ξ дается выражением

$$\xi = \int_{\bar{p}/p_F}^{\infty} dz_1 z_1^2 \int_{\bar{p}/p_F}^{\infty} dz_2\, z_2^2\, \xi(z_1\,,\, z_2) ,$$

в котором граничный импульс $\bar{p}$ находится из условий (46). Используя (55) с учетом (60), получаем оценочную формулу для $D(p_F)$:

$$D(p_F) \sim g_0 \xi F^2 p_F^2 \omega_0 \ , \ \ \omega_0 \sim s v_F / R \ ,$$

откуда в соответствии с (58) находим выражение для характерного времени τ_q установления квазилинейного режима:

$$\tau_q \sim \frac{1}{g_0 \xi F^2} \, \omega_0^{-1} \ , \ \ \omega_0 \sim s v_F / R \ . \qquad (61)$$

Поскольку по (19), (20) необходимо выполнение условия $\omega_0 \tau_q >> 1$, приходим к следующему соотношению между начальными условиями и функцией взаимодействия квазичастиц (см. (18), (24), (41), (42), (59)):

$$(g_0 \xi F^2)^{-1} >> 1 \ . \qquad (62)$$

Очевидно, что это соотношение выполняется тем лучше, чем меньше амплитуда пульсаций и обезразмеренная амплитуда Ландау.

Соотношение

$$\tau_q << \tau_d \qquad (63)$$

обусловлено тем, что характерное время τ_q установления квазилинейного режима должно быть малым по сравнению с характерным временем затухания Ландау нулевого звука $\tau_d \sim 1/\gamma_k$ (см. (45)). Для конкретизации соотношения (63) приведем выражения из [35] для коэффициента затухания нулевого звука γ_k в двух предельных случаях больших и малых безразмерных амплитуд Ландау F_k в состоянии статистического равновесия, описывающегося одночастичной функцией распределения при отличной от нуля температуре [35]. Значение коэффициента затухания нулевого звука в данном случае наиболее существенно при $s \gtrsim 1$, что по (41) происходит при $0 < F_k \lesssim 2$. Можно показать, что при выполнении условия

$$\frac{\pi T}{\varepsilon_F (s-1)} \lesssim 1 \qquad (64)$$

(где T — температура), когда тепловые поправки к частоте нулевого звука можно не учитывать и по-прежнему соблюдается равенство (41), справедливо следующее выражение для величины s:

$$s \approx 1 + 2 \exp \left\{ -2(1 + 1/F) \right\} \ .$$

С его учетом исходя из (45) можно прийти к выражению для коэффициента бездиссипативного затухания нулевого звука

$$\gamma_k \approx \pi (s-1) \left\{ \exp \left[2\pi \, \frac{(s-1)\varepsilon_F}{\pi T} \right] + 1 \right\}^{-1} \omega_0(k) \ , \qquad \omega_0(k) \sim k v_F \ , \ \ k \sim 1/R \ . \qquad (65)$$

В соотвествии с последней формулой соотношение (63) эквивалентно условию

$$\pi (s-1) \left\{ \exp \left[2\pi \, \frac{(s-1)\varepsilon_F}{\pi T} \right] + 1 \right\}^{-1} >> \frac{1}{g_0 \xi F^2} \ , \qquad 0 < F_k \lesssim 2 \ . \qquad (66)$$

Можно также убедиться, что в противоположном случае больших безразмерных амплитуд Ландау $F >> 1$ условие (63) принимает вид

$$\exp \left(\frac{F}{3} \, \frac{\varepsilon_F}{T} \right) >> \frac{1}{g_0 \xi} \ . \qquad (67)$$

Отметим следующее обстоятельство. Вообще говоря, коэффициент бесстолкновительного затухания нулевого звука γ_k намного меньше коэффициента затухания за счет столкновений $1/\tau_r$ (τ_r — время релаксации), вследствие чего соотношения (62), (64)–(67) не всегда обеспечивают установление квазилинейного режима в рамках временного интервала (20). Однако в случае $0 < F_k \lesssim 2$, когда для γ_k справедливо выражение (65), коэффициент бесстолкновительного затухания нулевого звука может быть порядка коэффициента поглощения за счет столкновений [35]. Действительно, время релаксации τ_r за счет столкновений квазичастиц в ^{3}He в хорошем согласии с экспериментом [26–29] может быть оценено формулой

$$\tau_r \sim 10^2 \, \frac{\hbar}{\varepsilon_F} \left(\frac{\varepsilon_F}{T} \right)^2 \ .$$

Максимальное значение коэффициента затухания нулевого звука $\gamma_k^{\max}$, согласно (64), (65), определяется выражением

$$\gamma_k^{\max} \approx \pi (s-1) \exp(-2\pi) \omega_0 \ ,$$

$$\omega_0 \sim v_F / R \ , \ \ k \sim 1/R \ .$$

Легко убедиться в том, что для частот ω_0, удовлетворяющих соотношениям

$$\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_F} \sim 10^{-2}\,\frac{(s-1)}{\pi^3}\,\exp(2\pi)\ ,$$

$$\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_F} << 1\ ,\ \ \omega_0 \sim v_F/R\ ,$$

коэффициент бесстолкновительного затухания нулевого звука может быть порядка коэффициента поглощения за счет столкновений. В этом случае соотношения (62), (64)–(67) характеризуют условия существования квазилинейной релаксации в нормальной ферми-жидкости в зависимости от температуры и параметров, связанных как с начальным состоянием системы в модельном представлении (59), так и с функцией взаимодействия фермионов в рамках модельного представления (18).

Во всех остальных случаях неравенство (63), определяющее малость характерного времени установления квазилинейного режима в нормальной ферми-жидкости по сравнению с характерными временами затухания нулевого звука, следует заменить соотношением

$$\tau_q << \tau_r\ .$$

Лишний раз подчеркнем, что соображения и выкладки, приведенные в заключении, имеют чисто оценочный характер. Точно установить границы применимости квазилинейного приближения можно, естественно, только в конкретном случае, решая уравнения квазилинейной релаксации (53), (57), задавая начальные значения для парной корреляционной функции $g(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\ ;\ \mathbf{p}_1\ ,\ \mathbf{p}_2\ ;\ 0)$.

Автор признателен академику НАН Украины С. В. Пелетминскому за ценные обсуждения полученных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (грант N 24/378).

1. Ю. Л.Климонтович, *Турбулентное движение и структура хаоса,* Наука, Москва (1990).
2. S. V. Peletminsky and Yu. V. Slusarenko, *Physica* **A210**, 165 (1994).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика; Т. VI. Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
4. А. С. Монин, Ф. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, Наука, Москва (1965); то же (1967).
5. J. R. Dorfman and E. G. D. Cohen, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1257 (1970).
6. Н. Г. Иноземцева, Б. И. Садовников, *ТМФ* **31**, 260 (1977).
7. С. В. Пелетминский, С. С. Плохов, В. И. Приходько, *ТМФ* **46**, 263 (1981).
8. Ю. В. Слюсаренко, *УФЖ* **35**, 441 (1990).
9. А. Ф. Андреев, *ЖЭТФ* **78**, 2064 (1980).
10. С. В. Пелетминский, А. И. Соколовский, *УФЖ* **37**, 1527 (1992).
11. С. В. Пелетминский, Ю. В. Слюсаренко, в кн.: *Проблемы теории твердого тела*, Наукова думка, Киев (1991), с. 162.
12. С. В. Пелетминский, Ю. В. Слюсаренко, *ТМФ* **106**, 469 (1996).
13. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **30**, 1058 (1957).
14. В. П. Силин, *ЖЭТФ* **33**, 495 (1957).
15. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **32**, 59 (1957).
16. В. П. Силин, *ЖЭТФ* **35**, 1243 (1958).
17. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, Ч. 2, Наука, Москва (1978).
18. С. В. Пелетмінський, Ю. В. Слюсаренко, *УФЖ* **39**, 112 (1994).
19. Ю. В. Слюсаренко, *Препринт ННЦ ХФТИ*, N 96-1, Харьков (1996).
20. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
21. Д. Пайнс, Ф. Нозьер, *Теория квантовых жидкостей*, Мир, Москва (1967).
22. Ф. Платцман, П. Вольф, *Волны и взаимодействия в плазме твердого тела*, Мир, Москва (1975).
23. А. И. Ахиезер, В. В. Красильников, С. В. Пелетминский, А. А. Яценко, *УФН* **163**, 1 (1993).
24. M. Luft and S. V. Peletminsky, *Physica* **A162**, 542 (1990).
25. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, Москва (1977).
26. J. Gavoret, *Phys. Rev.* **A137**, 731 (1965).
27. A. C. Anderson, J. I. Connoly, and J. C. Wheatley, *Phys. Rev.* **A135**, 910 (1964).
28. B. E. Keen, P. W. Matthews, and J. Wilks, *Phys. Lett.* **5**, 5 (1963).
29. *Helium Three*, W. P. Halperin and L. P. Pitaevskii (eds.), North-Holland, Amsterdam, Oxford, New-York, Tokyo (1990).
30. E. V. Bezuglyi et al., *J. Phys. Cond. Matter* **3**, 7867 (1991); Е. В. Безуглый, Н. Г. Бурма, Е. Ю. Дейнека, В. Д. Филь, *ФНТ* **19**, 667 (1993).
31. L. Onsager, *Phys. Rev.* **37**, 405 (1931); *Phys. Rev.* **38**, 2265 (1931).
32. Ю. А. Романов, Г. Ф. Филиппов, *ЖЭТФ* **40**, 123 (1961).
33. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, *Ядерный синтез*, **1**, 82 (1961).
34. Г. Эккер, *Теория полностью ионизованной плазмы*, Мир, Москва (1974).
35. Ю. В. Слюсаренко, *ФНТ* **24**, 291 (1998).

Long wave fluctuation kinetics and quasi-linear relaxation by zero sound in normal Fermi liquid

Yu. V. Slusarenko

A universal phenomenological approach is proposed to investigate macroscopic fluctuations in a normal Fermi liquid. General kinetic equations for long wave fluctuations in the normal Fermi liquid are obtained. Based on these kinetic equations a theory of quasy-linear relaxation by zero sound in the normal Fermi liquid is constructed. The conditions of existence of quasi-linear approximations are considered.