

Спектр элементарных возбуждений бозе-системы при учете парных корреляций

Ю.М. Полуэктов

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина*

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина*

E-mail: yuripoluektov@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 10 апреля 2018 г., опубликована онлайн 28 августа 2018 г.

Показано, что для квазисредних от произведений полевых операторов в системе бозе-частиц может быть получена цепочка уравнений, аналогичная цепочке Боголюбова в теории классических газов. В случае, когда достаточно ограничиться учетом только квазисредних от одного полевого оператора и произведений двух операторов, получена замкнутая система динамических уравнений при нулевой температуре, учитывающая как одночастичный конденсат, так и парные корреляции. Исследован спектр возбуждений в пространственно однородном состоянии и показано, что он имеет две ветви: акустическую и ветвь с энергетической щелью при нулевом импульсе. Обсуждается возможность существования квазичастичных возбуждений с энергетической щелью в сверхтекучем гелии в связи с экспериментами по поглощению СВЧ излучения.

Ключевые слова: бозе-эйнштейновский конденсат, аномальные и нормальные средние, парные корреляции, звуковая ветвь элементарных возбуждений, элементарные возбуждения с энергетической щелью.

1. Введение

Бозе-эйнштейновский конденсат системы малой плотности слабозаимодействующих бозе-частиц при нулевой температуре обычно описывается уравнением Гросса–Питаевского [1,2], которое в настоящее время широко применяется для исследования конденсатов, создаваемых в магнитных и лазерных ловушках [3,4]. Уравнение Гросса–Питаевского получено в приближении самосогласованного поля, когда не учитываются короткодействующие корреляции частиц. В этом случае бозе-система описывается когерентным вектором состояния [5]. Между тем учет парных корреляций, существенных на малых расстояниях, оказывается важным даже в системах с малой плотностью, поскольку приводит к некоторым качественно новым результатам. Так, в разреженном газе классических частиц учет парных корреляций позволяет получить интеграл столкновений в кинетическом уравнении и, следовательно, все эффекты, описываемые уравнением Больцмана [6]. Роль парных корреляций в равновесной бозе-системе с конденсатом исследовалась в работе [7].

В данной работе получена система динамических уравнений, в которых помимо одночастичных аномальных средних учитываются также парные корреляции, а корреляциями большего числа частиц пренебрегается. Исследованы малые колебания на фоне пространственно однородного равновесного состояния. Показано, что при учете парных корреляций существуют две ветви элементарных возбуждений: одна из них звуковая, а другая ветвь в длинноволновом пределе имеет энергетическую щель. Первая из этих ветвей приближается к боголюбовскому спектру при малых импульсах, а вторая — при больших. Обсуждается возможность существования квазичастичных возбуждений с энергетической щелью в сверхтекучем гелии в связи с экспериментами по поглощению СВЧ излучения.

2. Уравнения для средних от полевых операторов

Произвольный оператор в гейзенберговском представлении $A(t) = \exp\left(i\frac{H}{\hbar}t\right)A(0)\exp\left(-i\frac{H}{\hbar}t\right)$ подчиняется динамическому уравнению

$$i\hbar \frac{\partial A}{\partial t} = [A, H], \quad (1)$$

где в представлении вторичного квантования гамильтониан может быть записан в виде суммы операторов кинетической энергии и энергии парного взаимодействия $H = H_1 + H_2$, причем

$$H_1 = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi^+(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}', t),$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \Psi^+(\mathbf{r}, t) \Psi^+(\mathbf{r}', t) \Psi(\mathbf{r}', t) \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

Здесь

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + [U_0(\mathbf{r}) - \mu] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3)$$

а m — масса бозе-частицы, μ — химический потенциал, $U_0(\mathbf{r})$ — энергия частицы во внешнем поле. Предполагается, что потенциал взаимодействия частиц $U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ зависит только от расстояния между частицами, а спин частиц равен нулю. Полевые операторы подчиняются стандартным коммутационным соотношениям для бозе-частиц [8]. Пусть $\langle \Psi \rangle$ — среднее значение полевого оператора при нулевой температуре. Тогда полевой оператор можем записать, выделив в нем c — числовую и операторную части:

$$\Psi = \langle \Psi \rangle + \xi, \quad \Psi^+ = \langle \Psi^+ \rangle + \xi^+. \quad (4)$$

Соотношения (4) являются определением надконденсатных операторов ξ, ξ^+ , для которых выполнены очевидные условия:

$$\langle \xi \rangle = \langle \xi^+ \rangle = 0. \quad (5)$$

Здесь усреднение по точному состоянию понимается в смысле квазисредних для систем с нарушенной фазовой симметрией [9, 10]. Будем предполагать отличными от нуля как нормальные средние, инвариантные относительно фазового преобразования полевых операторов

ров $\Psi \rightarrow \Psi' = \exp(i\alpha)\Psi$, так и аномальные средние, где эта инвариантность нарушена. Отметим, что именно с существованием аномальных средних и связано свойство сверхтекучести. Введем обозначение для аномального среднего от полевого оператора:

$$\eta(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \Psi(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad \eta^*(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \Psi^+(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (6)$$

Средние от произведений нескольких полевых операторов могут быть выражены через средние от произведений операторов ξ, ξ^+ . Например, средние от произведений двух полевых операторов, с учетом (5), можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \Psi^+(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}') \rangle &= \eta^*(\mathbf{r}) \eta(\mathbf{r}') + \langle \xi^+(\mathbf{r}) \xi(\mathbf{r}') \rangle, \\ \langle \Psi(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}') \rangle &= \eta(\mathbf{r}) \eta(\mathbf{r}') + \langle \xi(\mathbf{r}) \xi(\mathbf{r}') \rangle, \\ \langle \Psi^+(\mathbf{r}) \Psi^+(\mathbf{r}') \rangle &= \eta^*(\mathbf{r}) \eta^*(\mathbf{r}') + \langle \xi^+(\mathbf{r}) \xi^+(\mathbf{r}') \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично могут быть записаны и средние от произведения большего числа полевых операторов. Они будут содержать также средние от большего числа надконденсатных операторов вида $\langle \xi^+(\mathbf{r}_1) \xi(\mathbf{r}_2) \xi(\mathbf{r}_3) \rangle$, $\langle \xi^+(\mathbf{r}_2) \xi(\mathbf{r}_3) \xi(\mathbf{r}_4) \rangle$, $\langle \xi^+(\mathbf{r}_1) \xi(\mathbf{r}_2) \xi(\mathbf{r}_3) \xi(\mathbf{r}_4) \rangle$, и т.д. Полагая последовательно в гейзенберговском уравнении (1) оператор A равным $\Psi, \Psi^+\Psi, \Psi\Psi, \Psi^+\Psi^+, \dots$, после усреднения получаем связанную бесконечную цепочку уравнений для средних $\langle \Psi \rangle, \langle \Psi^+\Psi \rangle, \langle \Psi\Psi \rangle, \langle \Psi^+\Psi^+ \rangle, \dots$, аналогичную цепочке Боголюбова в кинетической теории классических газов [6].

Так, уравнение для среднего от полевого оператора (6) имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \eta(\mathbf{r})}{\partial t} = \int H(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \eta(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' + \int U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|) \langle \Psi^+(\mathbf{r}'') \Psi(\mathbf{r}'') \Psi(\mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r}'', \quad (8)$$

а уравнения для нормальных и аномальных парных корреляций записываются в виде

$$i\hbar \frac{\partial \langle \Psi^+(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}') \rangle}{\partial t} = \int [H(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \langle \Psi^+(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}'') \rangle - H^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \langle \Psi^+(\mathbf{r}'') \Psi(\mathbf{r}') \rangle] d\mathbf{r}'' - \int [U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|) - U(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|)] \langle \Psi^+(\mathbf{r}) \Psi^+(\mathbf{r}'') \Psi(\mathbf{r}'') \Psi(\mathbf{r}') \rangle d\mathbf{r}'', \quad (9)$$

$$i\hbar \frac{\partial \langle \Psi(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}') \rangle}{\partial t} = \int [H(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \langle \Psi(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}'') \rangle + H(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \langle \Psi(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}'') \rangle] d\mathbf{r}'' + U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \langle \Psi(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}') \rangle + \int [U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|) + U(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|)] \langle \Psi^+(\mathbf{r}'') \Psi(\mathbf{r}'') \Psi(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}') \rangle d\mathbf{r}''. \quad (10)$$

Среднее от произведения трех полевых операторов с учетом (4), (5) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \langle \Psi^+(\mathbf{r}_1) \Psi(\mathbf{r}_2) \Psi(\mathbf{r}_3) \rangle &= \eta^*(\mathbf{r}_1) \eta(\mathbf{r}_2) \eta(\mathbf{r}_3) + \\ &+ \eta^*(\mathbf{r}_1) \langle \xi(\mathbf{r}_2) \xi(\mathbf{r}_3) \rangle + \eta(\mathbf{r}_2) \langle \xi^+(\mathbf{r}_1) \xi(\mathbf{r}_3) \rangle + \eta(\mathbf{r}_3) \langle \xi^+(\mathbf{r}_1) \xi(\mathbf{r}_2) \rangle + \langle \xi^+(\mathbf{r}_1) \xi(\mathbf{r}_2) \xi(\mathbf{r}_3) \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично можно представить входящие в уравнения (9) и (10) средние от произведений четырех операторов. Например:

$$\begin{aligned} \langle \Psi^+(\mathbf{r}_1)\Psi^+(\mathbf{r}_2)\Psi(\mathbf{r}_3)\Psi(\mathbf{r}_4) \rangle &= \eta^*(\mathbf{r}_1)\eta^*(\mathbf{r}_2)\eta(\mathbf{r}_3)\eta(\mathbf{r}_4) + \\ &+ \eta^*(\mathbf{r}_1)\eta^*(\mathbf{r}_2)\langle \xi(\mathbf{r}_3)\xi(\mathbf{r}_4) \rangle + \eta^*(\mathbf{r}_1)\eta(\mathbf{r}_3)\langle \xi^+(\mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_4) \rangle + \eta^*(\mathbf{r}_1)\eta(\mathbf{r}_4)\langle \xi^+(\mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_3) \rangle + \\ &+ \eta^*(\mathbf{r}_2)\eta(\mathbf{r}_3)\langle \xi^+(\mathbf{r}_1)\xi(\mathbf{r}_4) \rangle + \eta^*(\mathbf{r}_2)\eta(\mathbf{r}_4)\langle \xi^+(\mathbf{r}_1)\xi(\mathbf{r}_3) \rangle + \eta(\mathbf{r}_3)\eta(\mathbf{r}_4)\langle \xi^+(\mathbf{r}_1)\xi^+(\mathbf{r}_2) \rangle + \\ &+ \eta^*(\mathbf{r}_1)\langle \xi^+(\mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_3)\xi(\mathbf{r}_4) \rangle + \eta^*(\mathbf{r}_2)\langle \xi^+(\mathbf{r}_1)\xi(\mathbf{r}_3)\xi(\mathbf{r}_4) \rangle + \\ &+ \eta(\mathbf{r}_3)\langle \xi^+(\mathbf{r}_1)\xi^+(\mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_4) \rangle + \eta(\mathbf{r}_4)\langle \xi^+(\mathbf{r}_1)\xi^+(\mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_3) \rangle + \\ &+ \langle \xi^+(\mathbf{r}_1)\xi^+(\mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_3)\xi(\mathbf{r}_4) \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Чтобы из бесконечной цепочки связанных уравнений получить замкнутую систему, как и в кинетической теории газов [6], следует аппроксимировать высшие корреляционные функции произведениями корреляционных функций низшего порядка. В дальнейшем конденсат будем описывать с помощью одночастичных средних (6) и ограничимся учетом только парных корреляций надконденсатных операторов, введенных соотношениями (4), определив следующие корреляционные функции

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &\equiv \langle \xi^+(\mathbf{r}, t)\xi(\mathbf{r}', t) \rangle, \\ \tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &\equiv \langle \xi(\mathbf{r}, t)\xi(\mathbf{r}', t) \rangle, \quad \tau^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \langle \xi^+(\mathbf{r}, t)\xi^+(\mathbf{r}', t) \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Функции (13) обладают очевидными свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &= g^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t), \\ \tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &= \tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t), \\ \tau^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &= \tau^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (14)$$

Средние от произведения трех надконденсатных операторов в силу свойства (5) не могут быть выражены через парные корреляционные функции, поэтому их следует положить равными нулю: $\langle \xi^+(\mathbf{r}_1)\xi(\mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_3) \rangle \approx 0$.

Средние от произведений четырех операторов будем аппроксимировать с помощью произведений парных корреляционных функций, например:

$$\begin{aligned} \langle \xi^+(\mathbf{r}_1)\xi^+(\mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_3)\xi(\mathbf{r}_4) \rangle &\approx \tau^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\tau(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)g(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) + g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4)g(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3), \\ \langle \xi^+(\mathbf{r}_1)\xi(\mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_3)\xi(\mathbf{r}_4) \rangle &\approx g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\tau(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)\tau(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) + g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4)\tau(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3). \end{aligned} \quad (15)$$

Для систем, описываемых квадратичными по полевым операторам гамильтонианами, эти соотношения являются точными [11]. В нашем же случае, как отмечалось, используем это приближение для получения замкнутой системы уравнений. Данная аппроксимация является непротиворечивой, поскольку приводит к пра-

вильным термодинамическим соотношениям и, вероятно, тем лучше, чем менее плотной является рассматриваемая многочастичная система.

При учете только парных корреляций и в приближении (15) из (8)–(10) следует замкнутая система уравнений для функций $\eta(\mathbf{r}, t)$, $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ и $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \eta(\mathbf{r})}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \eta(\mathbf{r}) + [U_0(\mathbf{r}) - \mu] \eta(\mathbf{r}) + \\ &+ \int d\mathbf{r}'' U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|) \left[|\eta(\mathbf{r}'')|^2 \eta(\mathbf{r}) + \eta^*(\mathbf{r}'') \tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') + \eta(\mathbf{r}'') g^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') + \eta(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}) \right], \\ i\hbar \frac{\partial \tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial t} &= U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \eta(\mathbf{r}) \eta(\mathbf{r}') + U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\hbar^2}{2m} (\Delta + \Delta') \tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + [U_0(\mathbf{r}) + U_0(\mathbf{r}') - 2\mu] \tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \\ &+ \int d\mathbf{r}'' U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|) \left[|\eta(\mathbf{r}'')|^2 \tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \eta(\mathbf{r}) \eta^*(\mathbf{r}'') \tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') + \eta(\mathbf{r}) \eta(\mathbf{r}'') g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') + \right. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 & +g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'')\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') + g(\mathbf{r}'', \mathbf{r})\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') + \\
 & + \int d\mathbf{r}'' U(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|) \left[|\eta(\mathbf{r}'')|^2 \tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \eta(\mathbf{r}')\eta^*(\mathbf{r}'')\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') + \eta(\mathbf{r}')\eta(\mathbf{r}'')g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}) + \right. \\
 & \left. + g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'')\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + g(\mathbf{r}'', \mathbf{r})\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') + g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \right], \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & i\hbar \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} (\Delta - \Delta') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - [U_0(\mathbf{r}) - U_0(\mathbf{r}')] g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \\
 & - \int d\mathbf{r}'' U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|) \left[|\eta(\mathbf{r}'')|^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \eta^*(\mathbf{r})\eta(\mathbf{r}'')g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') + \eta^*(\mathbf{r})\eta^*(\mathbf{r}'')\tau(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') + \right. \\
 & \left. + \tau^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')\tau(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') + g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') + g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'') \right] + \\
 & + \int d\mathbf{r}'' U(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|) \left[|\eta(\mathbf{r}'')|^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \eta(\mathbf{r}')\eta^*(\mathbf{r}'')g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') + \eta(\mathbf{r}')\eta(\mathbf{r}'')\tau^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') + \right. \\
 & \left. + \tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')\tau^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') + g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') + g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'') \right]. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Отметим, что для данной системы выполняется условие инвариантности относительно операции обращения времени, поскольку наряду с решениями $\eta(\mathbf{r}, t)$, $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$, $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ она также имеет решения $\eta^*(\mathbf{r}, -t)$, $\tau^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', -t)$, $g^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', -t)$. Если пренебречь в уравнении (16) парными корреляциями $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')$ и $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')$, то оно принимает вид уравнения Гросса–Питаевского [1,2]. Заметим, однако, что система уравнений (16)–(18) не имеет решения, в котором будет отлична от нуля только функция $\eta(\mathbf{r}, t)$, а обе парных корреляционных функции $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$, $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ равны нулю. Это означает, что при наличии одночастичного конденсата в системе взаимодействующих частиц обязательно присутствует также и парный конденсат.

Среднее от оператора полного числа частиц N дается формулой

$$\langle N \rangle = \int \left[\eta^*(\mathbf{r}, t)\eta(\mathbf{r}, t) + g(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t) \right] d\mathbf{r}, \quad (19)$$

а плотность числа частиц есть, очевидно, $n(\mathbf{r}, t) = |\eta(\mathbf{r}, t)|^2 + g(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t)$. В дальнейшем, где это не вызовет недоразумения, как и в уравнениях (16)–(18), для краткости не будем явно указывать зависимость средних от времени.

3. Локальная форма уравнений

Уравнения (16)–(18) являются интегро-дифференциальными. Сделаем некоторые дальнейшие упрощения. При изучении состояний, медленно изменяющихся на масштабах, сравнимых с характерным радиусом r_0 действия потенциала межчастичного взаимодействия $U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$, которыми и будем интересоваться, можем перейти к дифференциальным уравнениям. Парные корреляционные функции (13) зависят от двух координат \mathbf{r}, \mathbf{r}' . Удобно перейти к новым координатам $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} + \mathbf{r}')$, тогда

$$\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \tau\left(\mathbf{R} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, \mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \equiv \tilde{\tau}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})$$

и

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g\left(\mathbf{R} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, \mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \equiv \tilde{g}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}). \quad (20)$$

При изменении координаты центра масс пары \mathbf{R} эти функции меняются медленно на расстояниях порядка действия межчастичного потенциала r_0 . Их можно представить в виде

$$\tilde{\tau}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{\mathbf{k}} \tau_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}, \quad \tilde{g}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}, \quad (21)$$

разложив зависимость от «быстрых» координат $\boldsymbol{\rho}$ в ряд Фурье. В дальнейшем в этих суммах будем учитывать лишь слагаемое с $\mathbf{k} = 0$, которое зависит только от координаты \mathbf{R} . Все другие слагаемые в суммах (21) содержат зависящий от расстояния между точками множитель, который осциллирует тем быстрее, чем больше k . Такими быстро осциллирующими слагаемыми будем пренебрегать. Это означает, что вместо точных функций $\tilde{\tau}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})$, $\tilde{g}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})$ будем рассматривать функции, усредненные по макроскопическому объему $V_0 \sim L^3$, где $L \gg r_0$:

$$\tau_0(\mathbf{R}) \approx V_0^{-1} \int \tilde{\tau}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}, \quad g_0(\mathbf{R}) \approx V_0^{-1} \int \tilde{g}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}. \quad (22)$$

Такое приближение, как отмечалось, допустимо, если рассматриваются возмущения на пространственных масштабах, существенно превосходящих радиус действия межчастичного потенциала. Подставим разложения (21) в уравнения (16)–(18) и оставим, в соответствии со сказанным, медленно меняющиеся функции с $\mathbf{k} = 0$. Поскольку предполагается, что функции мало меняются на расстоянии действия межчастичного потенциала, то в функциях, стоящих под интегралом, проведем замену $\mathbf{r}'' \approx \mathbf{r}$. В результате придем к следующей

системе локальных динамических дифференциальных уравнений:

$$i\hbar \frac{\partial \eta(\mathbf{r})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \eta(\mathbf{r}) + [U_0(\mathbf{r}) - \mu] \eta(\mathbf{r}) + U_0 \left[|\eta(\mathbf{r})|^2 \eta(\mathbf{r}) + \eta^*(\mathbf{r}) \tau(\mathbf{r}) + 2\eta(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) \right], \quad (23)$$

$$i\hbar \frac{\partial \tau(\mathbf{r})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{4m} \Delta \tau(\mathbf{r}) + U(0) \eta^2(\mathbf{r}) + [U(0) + 2U_0(\mathbf{r}) - 2\mu] \tau(\mathbf{r}) + U_0 \left[4|\eta(\mathbf{r})|^2 \tau(\mathbf{r}) + 2\eta^2(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) + 6g(\mathbf{r}) \tau(\mathbf{r}) \right], \quad (24)$$

$$i\hbar \frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial t} = -U_0 \left[\eta^{*2}(\mathbf{r}) \tau(\mathbf{r}) - \eta^2(\mathbf{r}) \tau^*(\mathbf{r}) \right]. \quad (25)$$

Здесь $U_0 = \int U(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$, а $U(0)$ — значение потенциала взаимодействия в начале координат. В (23)–(25) обозначено $\tau_0(\mathbf{R}) \rightarrow \tau(\mathbf{r})$, $g_0(\mathbf{R}) \rightarrow g(\mathbf{r})$.

Как видим, в полученных уравнениях существенную роль играет поведение потенциала межчастичного взаимодействия на малых расстояниях. Вид потенциала здесь известен плохо. Более того, в большинстве модельных потенциалов, таких как, например, потенциал Леннарда–Джонса, предполагается, что на малых расстояниях он стремится к бесконечности [12, 13]. Имеются, однако, потенциалы, такие как потенциал Морзе и его модификации [13], принимающие в начале координат конечное значение. Отметим, что использование модельных потенциалов, которые стремятся к бесконечности на малых расстояниях, приводит к значительным трудностям, поскольку у таких потенциалов отсутствует их фурье-образ. Между тем требование «непроницаемости» атомов при как угодно высоких давлениях, которое выполняется в этом случае, является излишне жестким, поскольку, очевидно, должно существовать давление, при котором атом будет «раздавлен» и перестанет существовать как отдельная структурная единица. Поэтому, на наш взгляд, физически обоснованным и естественным является использование потенциалов, принимающих конечное значение на малых расстояниях. Заметим также, что и квантово-химические расчеты указывают на то, что потенциалы в нуле скорее имеют конечную, хотя и большую, величину [14, 15]. Поскольку потенциальная энергия взаимодействия атомов на малых расстояниях известна плохо, а проблема учёта короткодействующих корреляций в квантовых системах является достаточно сложной [16, 17], то для конкретных расчетов будем использовать простой модельный потенциал «полупрозрачной сферы»:

$$U(\mathbf{r}) = \begin{cases} I, & r < r_0, \\ 0, & r > r_0. \end{cases} \quad (26)$$

Параметр I в (26) предполагается положительным. В этом случае входящие в уравнения (23)–(25) параметры имеют вид $U(0) = I$, $U_0 = I v_a$, где $v_a \equiv \equiv (4\pi/3) r_0^3$ — «объем атома». Потенциалы с конечным значением в нуле и раньше использовались в расчетах бозе-систем [18–20]. В дальнейшем будем анализировать систему уравнений (23)–(25), а для оценок и расчетов пользоваться потенциалом (26).

4. Равновесное пространственно однородное состояние

Рассмотрим условия равновесия в пространственно однородном состоянии в отсутствие внешнего поля $U_0(\mathbf{r}) = 0$, когда $\eta(\mathbf{r}) = \eta$, $g(\mathbf{r}) = g$, $\tau(\mathbf{r}) = \tau$ не зависят от координат. Из уравнений (23)–(25) в этом случае следует система алгебраических уравнений

$$-\mu \eta + U_0 \left(\eta |\eta|^2 + \eta^* \tau + 2\eta g \right) = 0, \quad (27)$$

$$U(0) \eta^2 + [U(0) - 2\mu] \tau + U_0 \left[4|\eta|^2 \tau + 2\eta^2 g + 6g \tau \right] = 0, \quad (28)$$

$$\eta^{*2} \tau - \eta^2 \tau = 0. \quad (29)$$

Величина g вещественна и положительна, а у комплексных величин выделим модуль и фазу: $\eta = \bar{\eta} e^{i\alpha}$, $\tau = \bar{\tau} e^{i\beta}$. Из (29) следует, что $\sin(2\alpha - \beta) = 0$. Таким образом, имеется две возможности $2\alpha - \beta = 0$ или $2\alpha - \beta = \pi$. Следует выбрать вторую возможность, поскольку только в таком случае уравнения (27), (28) имеют физически корректные решения, при этом $\tau = -\bar{\tau} e^{i2\alpha}$. В результате уравнения (27), (28) принимают вид

$$\bar{\eta} \left[-\mu + U_0 \left(\bar{\eta}^2 - \bar{\tau} + 2g \right) \right] = 0, \quad (30)$$

$$U(0) \bar{\eta}^2 - \left[U(0) - 2\mu + 4U_0 \bar{\eta}^2 \right] \bar{\tau} + U_0 \left(2\bar{\eta}^2 - 6\bar{\tau} \right) g = 0. \quad (31)$$

Полная плотность числа частиц

$$n = \bar{\eta}^2 + g. \quad (32)$$

Если в качестве независимой переменной выбираем химический потенциал, то плотность должна быть задана как функция $n = n(\mu)$. Эту зависимость следует получить в результате микроскопического расчета, который, разумеется, можно выполнить только приближенно. Будем считать эту зависимость известной, не конкретизируя ее вид. Если же независимой переменной выбрана плотность, то следует считать заданной зависимость $\mu = \mu(n)$.

Удобно ввести обозначения

$$\nu \equiv \frac{U(0)}{nU_0}, \quad w \equiv \frac{\nu}{4} + \frac{1}{2}, \quad z \equiv \frac{\mu}{nU_0} - 2 \quad (33)$$

и перейти к безразмерным нормированным величинам

$$x \equiv \frac{\bar{\eta}^2}{n}, \quad y \equiv \frac{\bar{\tau}}{n}. \quad (34)$$

Величина x определяет безразмерную плотность одночастичного конденсата, причем $0 < x \leq 1$, а величина y задает нормированный на полную плотность модуль парной аномальной корреляционной функции. Для потенциала (26) $U(0) = I$, $U_0 = I\nu_a$, где $\nu_a \equiv 4\pi r_0^3/3$ — «объем атома». В этом случае $\nu \equiv U(0)/nU_0 = 1/n\nu_a = \nu_0/\nu_a$, где $\nu_0 = 1/n$ — объем, приходящийся на один атом. Очевидно, что чем более разрежена система, тем параметры ν и w больше. В этом случае $w \approx \nu/4 \gg 1$. В плотных системах будем полагать $\nu \geq 2$, так что $w \geq 1$. Конечно, с увеличением плотности возрастает роль тройных и более высоких корреляций, и, следовательно, точность используемого приближения будет ухудшаться. Тем не менее, имея это в виду, будем рассматривать и предел высокой плотности.

В безразмерных обозначениях, с учетом того, что $g/n = 1 - x$, система (30), (31) принимает вид

$$x + y + z = 0, \quad (35)$$

$$z^2 + 2(x - w)z + 2x^2 - 4wx = 0. \quad (36)$$

Поскольку величины x и y положительны, то из (35) следует, что параметр z обязан быть отрицательным. Входящие в уравнения величины $z = \mu/nU_0 - 2$ и $w = 1/4n\nu_a + 1/2$ определяются полной плотностью системы, при этом химический потенциал, как функция плотности $\mu = \mu(n)$ должен быть найден из микроскопического расчета. Таким образом, уравнения (35), (36) позволяют определить зависимости плотности одночастичного конденсата $\bar{\eta}^2 = nx$ и модуля парной аномальной корреляционной функции $\bar{\tau} = yn$ от полной плотности при условии, что известна зависимость $\mu = \mu(n)$. Поскольку в действительности нам такая зависимость неизвестна, будем рассматривать в качестве независимой переменной нормированную плотность одночастичного конденсата, которая может меняться в пределах $0 < x \leq 1$. Так, в системах, описываемых уравнением Гросса–Питаевского, предполагается, что полная плотность совпадает с плотностью одночастичного конденсата и, следовательно, $x = 1$. В сверхтекучем гелии, как известно из экспериментов по рассеянию нейтронов [21], одночастичный конденсат составляет около 10% от полной плотности и, следовательно, здесь $x \approx 0.1$. Тогда уравнения (35), (36) позволяют найти нормированный модуль парной аномальной корреляционной функции и параметр z , а следовательно, и химический потенциал, как функции

x при заданной полной плотности, определяемой параметром w :

$$y \equiv y(x, w) = \sqrt{w^2 + 2wx - x^2} - w, \quad (37)$$

$$z \equiv z(x, w) = -\sqrt{w^2 + 2wx - x^2} + w - x. \quad (38)$$

Эти зависимости представлены на рис. 1. Как видно на рис. 1(а), модуль парной аномальной корреляционной функции $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \langle \xi(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}') \rangle$ растет с плотностью одночастичного конденсата, и в разреженной системе при $w \gg 1$ эти величины практически совпадают $y \approx x$. Отрицательный параметр $z = \mu/nU_0 - 2$ убывает с ростом плотности одночастичного конденсата x (рис. 1(б)), и для него при любой полной плотности выполнено неравенство $z > -2$. Отсюда следует, что в рассматриваемой модели химический потенциал всегда положителен, $\mu > 0$.

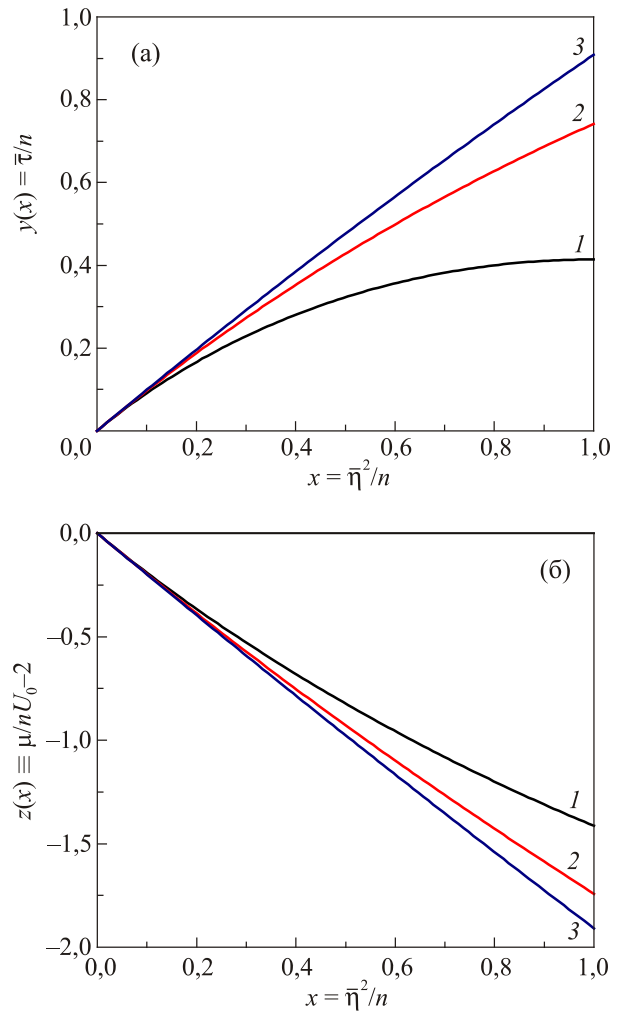


Рис. 1. (Онлайн в цвете) Зависимости от плотности одночастичного конденсата: а) модуля парной аномальной корреляционной функции $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \langle \xi(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}') \rangle$; б) химического потенциала при различных w : 1 (1), 3 (2), 10 (3); $w = \nu_0/4\nu_a + 1/2$, где ν_0 — объем, приходящийся на атом, ν_a — «объем атома».

Отметим также, что при наличии бозе-эйнштейновского конденсата зависимость макроскопических величин, в частности термодинамического потенциала, от постоянной взаимодействия является, вообще говоря, неаналитической. Поэтому, предельный переход по величине постоянной взаимодействия $U_0 \rightarrow 0$ в таких системах, так же как, например, и в сверхпроводниках, является некорректным. Более детально этот вопрос обсуждается в работе [22].

5. Спектр элементарных возбуждений

Рассмотрим распространение малых возмущений в пространственно однородной системе. Полагая

$$\begin{aligned}\eta(\mathbf{r}, t) &= \bar{\eta} + \delta\eta(\mathbf{r}, t), \\ \tau(\mathbf{r}, t) &= \bar{\tau} + \delta\tau(\mathbf{r}, t), \\ g(\mathbf{r}, t) &= g + \delta g(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (39)$$

и обозначив для удобства $\delta\varphi(\mathbf{r}) \equiv \bar{\eta}\delta\eta(\mathbf{r})$, при соответствующем выборе фаз комплексных функций в равновесном состоянии, получаем из (23)–(25) систему линеаризованных уравнений

$$\begin{aligned}i\hbar\delta\dot{\varphi}(\mathbf{r}) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\delta\varphi(\mathbf{r}) + (-\mu + 2U_0n)\delta\varphi(\mathbf{r}) + \\ &+ U_0(\bar{\eta}^2 - \bar{\tau})\delta\varphi^*(\mathbf{r}) + U_0\bar{\eta}^2\delta\tau(\mathbf{r}) + 2U_0\bar{\eta}^2\delta g(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (40)$$

$$\begin{aligned}i\hbar\delta\dot{\tau}(\mathbf{r}) &= -\frac{\hbar^2}{4m}\Delta\delta\tau(\mathbf{r}) + (U(0) - 2\mu + 4U_0n + 2U_0g)\delta\tau(\mathbf{r}) + \\ &+ (2U(0) - 4U_0\bar{\tau} + 4U_0g)\delta\varphi(\mathbf{r}) - 4U_0\bar{\tau}\delta\varphi^*(\mathbf{r}) + U_0(2\bar{\eta}^2 - 6\bar{\tau})\delta g(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (41)$$

$$i\hbar\delta\dot{g}(\mathbf{r}) = -U_0\bar{\eta}^2(\delta\tau(\mathbf{r}) - \delta\tau^*(\mathbf{r})) + 2U_0\bar{\tau}(\delta\varphi^*(\mathbf{r}) - \delta\varphi(\mathbf{r})).\quad (42)$$

Удобно перейти от комплексных величин $\delta\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\delta\tau(\mathbf{r}, t)$ к вещественным переменным

$$\begin{aligned}\delta\Psi(\mathbf{r}, t) &= \delta\varphi(\mathbf{r}, t) + \delta\varphi^*(\mathbf{r}, t), & \delta\Phi(\mathbf{r}, t) &= i[\delta\varphi(\mathbf{r}, t) - \delta\varphi^*(\mathbf{r}, t)], \\ \delta\Theta(\mathbf{r}, t) &= \delta\tau(\mathbf{r}, t) + \delta\tau^*(\mathbf{r}, t), & \delta\Lambda(\mathbf{r}, t) &= i[\delta\tau(\mathbf{r}, t) - \delta\tau^*(\mathbf{r}, t)].\end{aligned}\quad (43)$$

В этих переменных, и с учетом обозначений (34), система линеаризованных уравнений (40)–(42) примет вид

$$\hbar\delta\dot{\Psi} = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\delta\Phi + 2nU_0(x+z)\delta\Phi - nU_0x\delta\Lambda, \quad (44)$$

$$\hbar\delta\dot{\Phi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\delta\Psi + 2nU_0x\delta\Psi + nU_0x\delta\Theta + 4nU_0x\delta g, \quad (45)$$

$$\begin{aligned}\hbar\delta\dot{\Lambda} &= -\frac{\hbar^2}{4m}\Delta\delta\Theta + 2nU_0(2w-z-x)\delta\Theta + \\ &+ 4nU_0(2w+2z+x)\delta\Psi + 4nU_0(4x+3z)\delta g,\end{aligned}\quad (46)$$

$$\hbar\delta\dot{\Theta} = \frac{\hbar^2}{4m}\Delta\delta\Lambda - 2nU_0(2w-z-x)\delta\Lambda - 4nU_0(2w-x)\delta\Phi, \quad (47)$$

$$\hbar\delta\dot{g} = nU_0x\delta\Lambda - 2nU_0(x+z)\delta\Phi. \quad (48)$$

Полагая, что зависимость флуктуаций от координат и времени имеет вид $\sim \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$, из условия равенства нулю детерминанта полученной однородной системы линейных алгебраических уравнений прихо-

дим к биквадратному уравнению, определяющему законы дисперсии возможных возбуждений:

$$\tilde{\omega}^4 - A\tilde{\omega}^2 + B = 0. \quad (49)$$

Здесь

$$A \equiv \tilde{\omega}_0^2 + a_1\tilde{\epsilon}_k + \frac{5}{4}\tilde{\epsilon}_k^2, \quad B \equiv b_1\tilde{\epsilon}_k + b_2\tilde{\epsilon}_k^2 + b_3\tilde{\epsilon}_k^3 + \frac{\tilde{\epsilon}_k^4}{4}, \quad (50)$$

причем $\tilde{\omega}^2 \equiv (\hbar\omega/U(0))^2$, $\tilde{\epsilon}_k \equiv \epsilon_k/U(0)$, $\epsilon_k = \hbar^2k^2/2m$ — энергия свободной частицы. Коэффициенты в (50) имеют вид

$$\begin{aligned}a_1 &= 2\chi[\tilde{x} + 2F(\tilde{x})], \\ b_1 &= 8\chi^3\tilde{x}^2[9 - 5\tilde{x} + F(\tilde{x})], \\ b_2 &= \chi^2[8 - 8\tilde{x}^2 - 3\tilde{x} + 19\tilde{x}F(\tilde{x}) + 8F(\tilde{x})], \\ b_3 &= \frac{1}{2}\chi[3 + \tilde{x} + 5F(\tilde{x})].\end{aligned}\quad (51)$$

Здесь $F(\tilde{x}) \equiv \sqrt{1 + 2\tilde{x} - \tilde{x}^2}$, а параметр $\chi \equiv w/v = (1/4)(1 + 2/v)$ слабо зависит от плотности, изменяясь от 1/4 для разреженных систем до 1/2 при большой плотности.

Система допускает пространственно однородные колебания с частотой $\omega_0 = \tilde{\omega}_0 U(0)/\hbar$, определяемой формулой

$$\tilde{\omega}_0^2 = 8\chi^2 [1 + 3\tilde{x} - 2\tilde{x}^2 + F(\tilde{x})]. \quad (52)$$

Зависимости частоты однородных колебаний от плотности одночастичного конденсата при некоторых значениях полной плотности показаны на рис. 2. Эта частота слабо зависит от плотности конденсата, причем эта зависимость тем слабее, чем меньше полная плотность системы.

Биквадратное уравнение (49) имеет решения, определяющие две ветви возбуждений:

$$\tilde{\omega}_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[A \pm \sqrt{A^2 - 4B} \right]. \quad (53)$$

Решение ω_- при малых волновых числах дает звуковую ветвь $\omega_-^2 = c^2 k^2$, где квадрат скорости звука определяется формулой

$$c^2 = \frac{U(0)}{2m} \chi \frac{\tilde{x}^2 [9 - 5\tilde{x} + F(\tilde{x})]}{[1 + 3\tilde{x} - 2\tilde{x}^2 + F(\tilde{x})]}. \quad (54)$$

Зависимости скорости звука от плотности одночастичного конденсата при некоторых значениях полной плотности показаны на рис. 3. Скорость возрастает с увеличением плотности одночастичного конденсата, причем тем быстрее, чем больше полная плотность. В пределе малой плотности при $x = 1$

$$c^2 \sim 10 \frac{U(0)}{m\nu^2}. \quad (55)$$

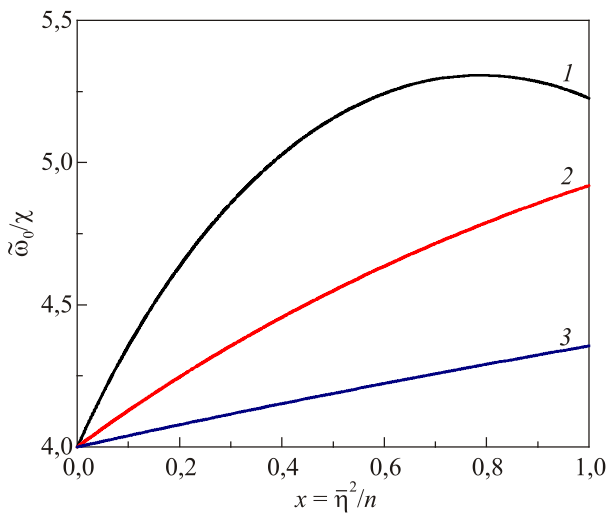


Рис.2. (Онлайн в цвете) Зависимости частоты однородных колебаний $\tilde{\omega}_0 = \hbar\omega_0/U(0)$ от плотности одночастичного конденсата при различных w : 1 (1), 3 (2), 10 (3); $w \equiv \nu/4 + 1/2$, $\chi \equiv w/\nu = (1/4)(1 + 2/\nu)$, $\nu = 1/m\nu_a = \nu_0/\nu_a$, где ν_0 — объем, приходящийся на атом, ν_a — «объем атома».

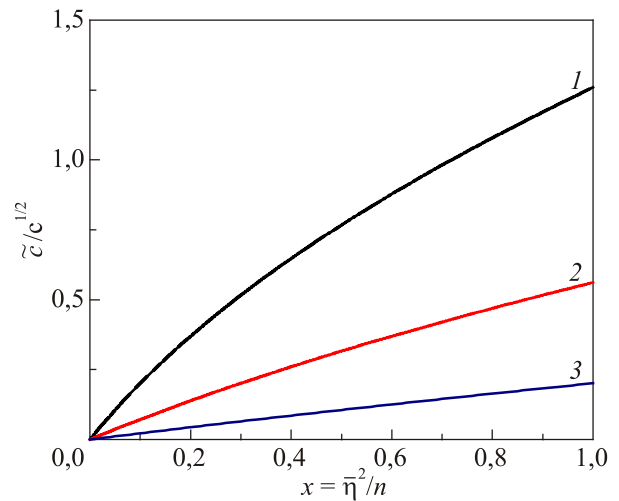


Рис.3. (Онлайн в цвете) Зависимости скорости звуковых колебаний $\tilde{c} \equiv c\sqrt{2m/U(0)}$ от плотности одночастичного конденсата при различных w : 1 (1), 3 (2), 10 (3); $w \equiv \nu/4 + 1/2$, $\chi \equiv w/\nu = (1/4)(1 + 2/\nu)$, $\nu = 1/m\nu_a = \nu_0/\nu_a$, где ν_0 — объем, приходящийся на атом, ν_a — «объем атома».

Решение ω_+ отвечает ветви возбуждений с энергетической щелью. При малых k зависимость частоты от волнового числа имеет вид

$$\omega_+^2 = \omega_0^2 + \alpha \frac{k^2}{2m}, \quad (56)$$

где

$$\alpha = U(0)\chi \frac{[4 + 10\tilde{x} - 7\tilde{x}^2 + \tilde{x}^3 + (4 + 14\tilde{x} - 9\tilde{x}^2)F(\tilde{x})]}{[1 + 3\tilde{x} - 2\tilde{x}^2 + F(\tilde{x})]}. \quad (57)$$

Ветви элементарных возбуждений в бозе-системе с учетом парных корреляций представлены на рис. 4. На этом же рисунке показана кривая для боголюбовского закона дисперсии $\hbar\omega_B = \sqrt{\epsilon_k (\epsilon_k + 2\chi n U_0)}$, которая лежит между полученными двумя ветвями. В длинноволновом пределе боголюбовский закон дисперсии приближается к звуковой ветви $\omega_- = ck$, а в пределе коротких волн — к ветви ω_+ , имеющей энергетическую щель ω_0 при $k \rightarrow 0$. Хотя, строго говоря, рассматриваемые уравнения применимы для длинноволновых возбуждений, но решения (53) дают разумные значения и при больших k :

$$\hbar\omega_+ = \epsilon_k, \quad \hbar\omega_- = \frac{\epsilon_k}{2}. \quad (58)$$

Ветвь с энергетической щелью в коротковолновом пределе переходит в закон дисперсии одной свободной частицы, а звуковая ветвь — в закон дисперсии пары связанных частиц. Отметим, также, что вид полученного спектра слабо меняется как с изменением полной плотности, так и с изменением доли одночастичного конденсата.

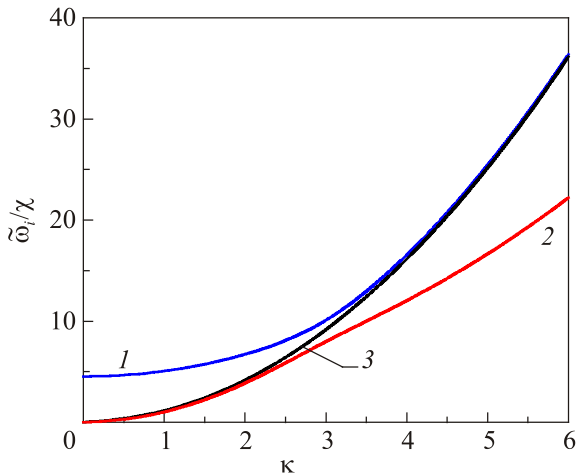


Рис.4. (Онлайн в цвете) Спектр элементарных возбуждений бозе-системы $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\kappa)$ при учете парных корреляций: $\tilde{\omega} = \hbar\omega/U(0)$, $\kappa = \hbar k/\sqrt{2mU(0)\chi}$, k — волновое число. $\tilde{\omega}_+/\chi$ — возбуждения с энергетической щелью $\hbar\omega_0$ (52) при $k=0$ (1); $\tilde{\omega}_-/\chi$ — звуковые возбуждения, скорость которых определена формулой (54) (2); боголюбовский спектр $\tilde{\omega}_B/\chi = \sqrt{\kappa^2(\kappa^2 + 2x/w)}$ (3); $w \equiv v/4 + 1/2$, $\chi \equiv w/v = (1/4)(1 + 2/v)$, $v = 1/nv_a = v_0/v_a$, где v_0 — объем, приходящийся на атом, v_a — «объем атома». Расчет проведен для параметров $x = 0,8$, $w = 5$.

6. Заключение

В работе показано, что в многочастичной бозе-системе для квазисредних от произведений полевых операторов может быть получена цепочка динамических уравнений, аналогичная цепочке Боголюбова в теории классических газов. При учете только квазисредних от одного полевого оператора, а также квазисредних нормальных и аномальных произведений двух операторов, получена замкнутая система динамических уравнений при нулевой температуре, учитывающая одночастичный конденсат и парные корреляции. Полученная система дифференциальных уравнений (23)–(25), описывает динамику конденсата и обобщает уравнение Гросса–Питаевского с учетом короткодействующих парных корреляций. Исследован спектр малых колебаний в пространственно однородной системе. Показано, что имеется две ветви элементарных возбуждений: одна со звуковым законом дисперсии в пределе длинных волн, а вторая имеет в этом пределе энергетическую щель.

Следует отметить, что вопрос о возможности существования в бозе-системах возбуждений с энергетической щелью имеет давнюю историю и обсуждался ранее во многих работах (см., например, [23–28]). В ранней работе Ландау [29], до того как им было постулировано существование в сверхтекучем гелии фоннротонного спектра, также предполагалось существование элементарных возбуждений с энергетической щелью.

Однако оказалось, что таких квазичастиц недостаточно, чтобы описать термодинамические свойства. На возможность существования в дополнение к фоновой ветви спектра другой ветви, имеющей энергетическую щель, на качественном уровне обращено внимание в книге [11, с. 322]. На несовпадение спектров одночастичных и коллективных возбуждений в бозе-системе с конденсатом указывается в недавних работах [30–32].

В экспериментальной работе [33] было обнаружено поглощение СВЧ излучения в сверхтекучем гелии на частоте около 180 ГГц. Эта частота отвечает энергии, близкой к величине энергии ротона ~ 10 К. Однако, поскольку импульс ротона на несколько порядков превосходит импульс фотона при такой энергии, интерпретация наблюдаемого эффекта как поглощение энергии отдельными ротонами затруднена из-за противоречия с законом сохранения импульса. В работе [34] было высказано предположение, что наблюдаемое в [33] поглощение обязано существованию в гелии возбуждений с энергетической щелью. Согласно (52), величина энергетической щели приблизительно определяется соотношением $\hbar\omega_0 \approx U(0)$. Для оценки энергетического параметра $U(0)$ можно, например, использовать выражение для скорости звуковых возбуждений, которая, согласно (54), для достаточно плотной системы определяется соотношением $c^2 \sim U(0)/m$. Если в этом соотношении взять параметры гелия $c \approx 2,3 \cdot 10^4$ см/с и $m \approx 6,65 \cdot 10^{-24}$ г, то получим $U(0) \approx 35 \cdot 10^{-16}$ эрг ≈ 25 К. Отметим, что близкое значение $U(0) = 50 \cdot 10^{-16}$ эрг использовалось в расчетах работ [19,20]. Эта энергия соответствует частоте в несколько сотен гигагерц, что не противоречит эксперименту [33]. Обратим также внимание, что экспериментальное обнаружение элементарных возбуждений при очень малых импульсах другими методами, например с помощью неупругого рассеяния нейтронов [35], вряд ли возможно, а вклад возбуждений с энергетической щелью в термодинамические величины в сравнение с вкладом фононов и ротонов оказывается малым.

Автор рад возможности представить данную статью в выпуск журнала, который посвящен восьмидесятилетнему юбилею И.Н. Адаменко и Э.Я. Рудаевского, с чьими именами связан его многолетний интерес к такому замечательному и необычному с точки зрения повседневности, но фундаментальному для понимания законов природы, явлению как сверхтекучесть.

1. E.P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961).
2. Л.П. Питаевский, *ЖЭТФ* **40**, 646 (1961) [*Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961)].
3. L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose–Einstein Condensation*, Oxford University Press, USA (2003).
4. C.H. Pethick and H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press (2001).
5. Ю.М. Полуэктов, *ФНТ* **37**, 1239 (2011) [*Low Temp. Phys.* **37**, 986 (2011)].

6. Н.Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*. В кн.: Н.Н. Боголюбов, *Избранные труды в трех томах*, Наукова думка, Киев (1970), Т. 2.
7. A.S. Peletminskii, S.V. Peletminskii, and Yu.M. Poluektov, *Condens. Matter. Phys.* **16**, 13603 (2013). *arXiv:1303.5539* [cond-mat.stat-mech].
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).
9. Н.Н. Боголюбов, *Квазисредние в задачах статистической механики*, В кн.: Н.Н. Боголюбов, *Избранные труды в трех томах*, Наукова думка, Киев (1971), Т. 3.
10. Ю.М. Полуэктов, *ФНТ* **23**, 915 (1997). [*Low Temp. Phys.* **23**, 685 (1997)].
11. Н.Н. Боголюбов, Н.Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, Москва (1984).
12. Дж. Гиршфельдер, Ч. Кергисс, Р. Берд, *Молекулярная теория газов и жидкостей*, ИЛ, Москва (1961).
13. Дж. Ферцигер, Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в газах*, Мир, Москва (1976).
14. R.A. Aziz and M.J. Slaman, *J. Chem. Phys.* **94**, 8047 (1991).
15. J.V. Anderson, C.A. Traynor, and B.M. Boghosian, *J. Chem. Phys.* **99**, 345 (1993).
16. Д. Таулес, *Квантовая механика систем многих частиц*, Мир, Москва (1976).
17. R. Jastrow, *Phys. Rev.* **98**, 1479 (1955).
18. К. Бракнер, *Теория ядерной материи. Некоторые вопросы теории многих тел*, Мир, Москва (1964).
19. S. Sunakawa, S. Yamasaki, and T. Kebukawa, *Progr. Theor. Phys.* **41**, 919 (1969).
20. T. Kebukawa, S. Yamasaki, and S. Sunakawa, *Progr. Theor. Physics.* **44**, 565 (1970).
21. И.В. Богдавленский, Л.В. Карнацевич, Ж.А. Козлов, А.В. Пучков, *ФНТ* **16**, 139 (1990) [*Sov. J.Low Temp. Phys.* **16**, 77 (1990)].
22. Yu.M. Poluektov, *JLTP* **186**, 347 (2017).
23. A. Bijl, *Physica* **7**, 869 (1940).
24. M. Girardeau and R. Arnowitt, *Phys. Rev.* **113**, 755 (1959).
25. G. Wentzel, *Phys. Rev.* **120**, 1572 (1960).
26. M. Luban, *Phys. Rev.* **128**, 965 (1962).
27. В.В. Толмачёв, *ДАН СССР* **135**, 825 (1960).
28. Ю.М. Полуэктов, *ФНТ* **28**, 604 (2002) [*Low Temp. Phys.* **28**, 429 (2002)].
29. Л.Д. Ландау, *ЖЭТФ* **11**, 592 (1941).
30. T. Kita, *Phys. Rev. B* **81**, 214513 (2010).
31. T. Kita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **80**, 084606 (2011).
32. K. Tsutsui, Y. Kato, and T. Kita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **85**, 124004 (2016).
33. A. Rybalko, S. Rubets, E. Rudavskii, V. Tikhiy, S. Tarapov, R. Golovashchenko, and V. Derkach, *Phys. Rev. B* **76**, 140503 (2007).
34. Ю.М. Полуэктов, *ФНТ* **40**, 503 (2014) [*Low Temp. Phys.* **40**, 389 (2014)].
35. И.В. Богдавленский, Л.В. Карнацевич, Ж.А. Козлов, В.Г. Колобродов, В.Б. Приезжев, А.В. Пучков, А.Н. Скоморохов, *ФНТ* **20**, 626 (1994) [*Low Temp. Phys.* **20**, 489 (1994)].

Спектр элементарних збуджень бозе-системи при урахуванні парних кореляцій

Ю.М. Полуэктов

Показано, що для квазісередніх від добутків польових операторів в системі бозе-частинок може бути отримано ланцюжок рівнянь, аналогічний ланцюжку Боголюбова в теорії класичних газів. У разі, коли досить обмежитися урахуванням тільки квазісередніх від одного польового оператора і добутків двох операторів, отримано замкнуту систему динамічних рівнянь при нульовій температурі, що враховує як одночастинковий конденсат, так і парні кореляції. Досліджено спектр збуджень в просторово однорідному стані та показано, що він має дві гілки: акустичну і гілку з енергетичною щільною при нульовому імпульсі. Обговорюється можливість існування квазічастинкових збуджень з енергетичною щільною в надплинному гелії в зв'язку з експериментами з поглинання НВЧ випромінювання.

Ключові слова: бозе-ейнштейнівської конденсат, аномальні та нормальні середні, парні кореляції, звукова гілка елементарних збуджень, елементарні збудження з енергетичною щільною.

Spectrum of elementary excitations of the Bose system with account of pair correlations

Yu.M. Poluektov

It is shown that for the quasiaverages of the products of field operators in the system of Bose particles the chain of equations can be obtained which is similar to the Bogolyubov chain in the theory of classical gases. In the case when it is sufficient to confine ourselves to taking into account the quasiaverages of one field operator and the products of two field operators, the closed system of dynamic equations at zero temperature is obtained which accounts for both the one-particle condensate and pair correlations. The spectrum of excitations in a spatially homogeneous state is explored and it is shown that the spectrum has two branches: the sound wave branch and the branch with an energy gap at zero momentum. The possibility is discussed of existence of the quasiparticle excitations with an energy gap in the superfluid helium in connection with experiments on the absorption of microwave radiation.

Keywords: Bose–Einstein condensate, anomalous and normal averages, pair correlations, sound branch of elementary excitations, elementary excitations with energy gap.