

Взаимодействие магнитных вихрей с дефектами

А.С. Ковалев

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина*

*Харьковский национальный университет им. В.И. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 610022, Украина
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua*

Я.Е. Прилепский

Aston University, Birmingham, UK

Статья поступила в редакцию 2 марта 2018 г., опубликована онлайн 28 мая 2018 г.

Рассеяние магнитных вихрей и вихревых пар магнитным дефектом в двумерных легкоплоскостных ферромагнетиках теоретически исследовано в рамках классических уравнений динамики намагниченности и приближения коллективных переменных для координат вихрей. Предложена модель дефекта как локальной области магнетика, отличающейся от остальной части обменным взаимодействием. Рассмотрено вращение магнитного вихря вокруг дефекта и рассеяние им вихревых пар (связанных состояний вихря и антивихря). В пределе малоуглового рассеяния получены аналитические выражения для дифференциального сечения рассеяния и зависимости угла рассеяния от параметров вихревой пары, дефекта и прицельного расстояния. Рассеяние вихревых пар дефектом исследовано численно и качественно во всей области параметров рассеяния. Указано на существование критических значений прицельного параметра, при которых характер рассеяния качественно меняется, и продемонстрирована возможность существования локализованных у дефекта вращательных состояний вихревых пар.

Розсіяння магнітних вихорів та вихрових пар магнітним дефектом в двовимірних легкоплоскоштинних ферромагнетиках теоретично розглянуто в межах класичних рівнянь динаміки намагніченості та наближенні колективних змінних для координат вихорів. Запропоновано модель дефекту як локальної частини магнетика, що відрізняється від іншої частини обмінною взаємодією. Розглянуто обертання магнітного моменту вихора навколо дефекту і розсіювання ним вихрових пар (зв'язаних станів вихора та антивихора). Для малокутового розсіювання отримано аналітичний вираз для диференційного перерізу розсіювання та залежність кута розсіювання від параметрів вихрових пар, дефекту та прицільної відстані. Розсіювання вихрових пар дефектом досліджено чисельно та якісно в усій області параметрів розсіювання. Вказано на існування критичних значень прицільної відстані, при яких характер розсіювання якісно змінюється, та продемонстровано можливість існування локалізованих біля дефекту обертальних станів вихрових пар.

PACS: 75.10.-b Общая теория и модели магнитного упорядочения;
75.10.Hk Классические спиновые модели..

Ключевые слова: легкоплоскостной ферромагнетик, магнитные дефекты, магнитный вихрь, вихревая пара, уравнение Тиле, рассеяние вихрей, сечение рассеяния.

Введение

Важными объектами изучения нелинейной динамики магнетиков являются солитоны разного типа, в частности топологические [1,2], представленные, например вихрями в легкоплоскостных ферромагнетиках [3,4]. Исследование вихревых возбуждений в конденсированных системах является традиционной областью гидродинамики, динамики сверхтекучей жидко-

сти [5] и в последнее время — исследования БЭК [6]. Интерес к магнитным вихрям в последнее время возник в связи с возможностью их использования в спинтронике [7]. Негативным при этом является низкая скорость перемещения вихрей и сильное их взаимодействие с примесями. Поэтому перспективными представляются вихревые пары, которые могут распространяться со скоростями порядка скорости магно-

нов и возбуждаться различными методами [8]. При этом возникает важная проблема взаимодействия вихревых пар с дефектами магнитной структуры. Динамика и взаимодействие магнитных вихревых пар широко обсуждается теоретически [9,10]. Меньше известно о взаимодействии даже изолированных вихрей с дефектами, для которого получены противоречивые результаты [11,12]. Динамика вихревых пар в поле дефекта еще сложнее, о чем можно судить по данным численного рассмотрения такой задачи в БЭК [13]. В данной работе рассмотрено взаимодействие магнитных вихрей и вихревых пар с дефектом в рамках сформулированной модели такого дефекта.

1. Формулировка модели

Ферромагнетик с магнитной анизотропией типа изотропная плоскость легкого намагничивания в классическом подходе характеризуется энергией [1,2]

$$E = \int \varepsilon dx dy = \int \left(J a_0^2 (\nabla \mathbf{M})^2 / 2 + \beta M_z^2 / 2 \right) dx dy, \quad (1)$$

где \mathbf{M} — магнитный момент, J, β — константы обменного взаимодействия и одноионной анизотропии ($\beta > 0$), связанной с осью Z , перпендикулярной легкой плоскости XY . Динамику вектора \mathbf{M} можно описывать уравнением Ландау–Лифшица (УЛЛ) [14]

$$\partial \mathbf{M} / \partial t = (2\mu_0 / \hbar) [\mathbf{M}, \delta \varepsilon / \delta \mathbf{M}], \quad (2)$$

где μ_0 — магнетон Бора. В качестве переменных удобно выбрать Z -компоненту момента $m = M_z / M_0$ и азимутальный угол его поворота в плоскости XY $\varphi = \arctg(M_y / M_x)$, которые играют роль канонически сопряженных величин, в терминах которых гамильтонаны уравнения и энергия (1) имеют вид

$$\dot{\varphi} = -(2\mu_0 / \hbar M_0) \partial \varepsilon / \partial m, \quad \dot{m} = (2\mu_0 / \hbar M_0) \partial \varepsilon / \partial \varphi, \quad (3)$$

$$E = \left(M_0^2 / 2 \right) \int \left(J a_0^2 \left((\nabla m)^2 / (1 - m^2) + (1 - m^2) (\nabla \varphi)^2 \right) + \beta m^2 \right) dx dy. \quad (4)$$

Поскольку ниже будут рассматриваться дефекты с аксиальной симметрией, то кроме энергии сохраняется и Z -проекция углового момента \mathbf{K} [1,2]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{n}_z \left(\hbar M_0 / 2\mu_0 \right) \int m \left(x (\partial \varphi / \partial y) - y (\partial \varphi / \partial x) \right) dx dy. \quad (5)$$

Статическое решение УЛЛ (3) для магнитного вихря в точке $(x = X, y = Y)$ имеет вид

$$\varphi = q \arctg \frac{y - Y}{x - X} = \pm \arctg \frac{y - Y}{x - X},$$

$$m = m(r) = p f \left(\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2} \right) = \pm f \quad (6)$$

где параметр $q = \pm 1$ определяет топологический заряд «вихря» с $q = 1$ и «антивихря» с $q = -1$, параметр $p = \pm 1$ — его поляризацию, а намагниченность вихря $m(r)$ локализована в его коре с размером d_0 порядка величины «магнитной длины» $l_0 = a_0 \sqrt{J/\beta}$ [3,4]. Топологические свойства вихря определяют его динамику и характеризуются величиной гировектора $\mathbf{G} = -2\pi p q (\hbar M_0 / 2\mu_0) \mathbf{n}_z$.

Если расстояния между вихрями и до границ магнетика существенно больше магнитной длины, а скорости вихрей намного меньше скорости магнонов $c = (2\mu_0 M_0 / \hbar) \sqrt{J\beta}$, то вихревая динамика может приближенно описываться в терминах координат центров вихрей $\mathbf{R}_i(t)$ и уравнений Гиле [15] для них:

$$[\dot{\mathbf{R}}_i, \mathbf{G}_i] + \partial E / \partial \mathbf{R}_i = 0, \quad (7)$$

а энергия системы сводится [15] к сумме

$$E = -2\pi J M_0^2 \sum_{i < j} p_i p_j \ln |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|. \quad (8)$$

В этом же приближении угловой момент системы вихрей равен

$$K = (\pi \hbar M_0 / 2\mu_0) \sum_i p_i q_i \mathbf{R}_i^2. \quad (9)$$

Уравнению (7) можно придать несколько иную, иногда более удобную форму [4]:

$$\dot{\mathbf{R}}_i = -p_i \nabla \varphi_{\text{ex}}(\mathbf{r} = \mathbf{R}_i) (2J\mu_0 M_0 / \hbar), \quad (10)$$

где φ_{ex} — распределение поля намагниченности в легкой плоскости в точке расположения i -го вихря, вызванное всеми остальными вихрями. Вихрь обладает энергией $E_0 = \pi J M_0^2 \ln(l/d_0)$, где l — расстояние до ближайшей границы магнетика, и собственным угловым моментом $K_0 = \hbar M p q / 2\mu_0$, где $M \sim M_0 d_0^2$ — его намагниченность. Динамика вихревых пар и их взаимодействие подробно исследованы в работах [9,10]. Вихревая пара может двигаться со скоростями $V < c$, а ее энергия и импульс зависят от расстояния между вихрями в ней L и определяются при $V \ll c$ формулами

$$E = 2\pi J M_0^2 \ln(L/d_0), \quad P = (\pi \hbar M_0 / \mu_0) L,$$

$$V = dE/dP = (2J\mu_0 M_0 / \hbar) / L. \quad (11)$$

Рассмотрим динамику вихревой пары в неоднородном бесконечном двумерном ферромагнетике с магнитным дефектом, представляющим радиально-симметричную область радиуса a с обменным взаимодействием J_2 , отличным от обмена J_1 в объеме. Величины магнитного момента и магнитной анизотропии в дефекте не изменяются. Предполагается, что дефект и окружающая матрица связаны «жестким» магнитным

взаимодействием с бесконечным обменом через границу $J_s = \infty$. Таким образом, условия на границе (окружности S радиуса a) представляются в виде $\mathbf{M}_1|_S = \mathbf{M}_2|_S$ и $J_1 d\mathbf{M}_1/dn|_S = J_2 d\mathbf{M}_2/dn|_S$, где ниже все величины с индексом 1 будут относиться к матрице, а с индексом 2 — к области дефекта. Из условия применимости уравнений (7), (10) следует, что вихри находятся на достаточно большом расстоянии от границы, и на ней $m \ll 1$. При этом граничные условия сводятся к условиям для угловой переменной φ :

$$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S, \quad J_1 d\varphi_1/dn|_S = J_2 d\varphi_2/dn|_S, \quad (12)$$

а статические поля $\varphi_{1,2}(\mathbf{r})$ системы вихрей вне и в дефекте определяются уравнениями

$$J_1 \Delta \varphi_1 = 0 \text{ при } |\mathbf{r}| > a \text{ и } J_2 \Delta \varphi_2 = 0 \text{ при } |\mathbf{r}| < a. \quad (13)$$

Распределение поля вихря, расположенного на расстоянии R вне круглой области с измененными свойствами и граничными условиями (12), хорошо известно [17]. Для вихря с топологическим зарядом q надо поместить внутри дефектной области на расстоянии $b = a^2/R$ от центра фиктивный вихрь с нецелочисленным топологическим зарядом

$$q_{in} = q(J_2 - J_1)/(J_2 + J_1) = q\sigma, \quad (14)$$

а в центре дефекта — антивихрь с зарядом $-q_{in}$. (Учет конечности обмена через границу ($J_s \neq \infty$) приводит к замене $q_{in} \rightarrow q_{eff} = -(1 - f(J_s)q_{in})$, где функция $f(J_s)$ с ростом J_s быстро меняется от нуля до единицы [17].) Поле внутри дефекта определяется фиктивным вихрем с зарядом $q_{out} = q - q_{in} = q(1 - \sigma)$ в точке \mathbf{R} . Таким образом, для вихря с $q = 1$ в точке $\mathbf{R}(R, 0)$ поля φ_1 и φ_2 вне и внутри дефекта определяются выражениями

$$\varphi_1 = \arctg(y/(x - R)) + \sigma \arctg(y/(x - b)) - \sigma \arctg(y/x), \quad (15)$$

$$\varphi_2 = (1 - \sigma) \arctg(y/(x - R)) + \sigma \pi. \quad (16)$$

Для описания рассеяния вихревой пары вне дефекта (вихря с зарядом $q = 1$ в точке $\mathbf{R}_1(X_1, Y_1)$ и антивихря с зарядом $q = -1$ в точке $\mathbf{R}_2(X_2, Y_2)$) поместим фиктивные вихри в точки $\mathbf{b}_1(x_1, y_1)$ и $\mathbf{b}_2(x_2, y_2)$ внутри области дефекта (см. рис. 1). Все вихри предполагаем имеющими одну поляризацию $p_i = 1$. Фиктивные вихри в начале координат компенсируются, и задача сводится к нахождению поля двух реальных и двух фиктивных вихрей. Интегралы движения E и K позволяют решить задачу о динамике вихревой пары. Положения и заряды виртуальных вихрей определяются выражениями

$$b_i = a^2/R_i, \quad x_i = a^2 X_i/R_i^2, \quad y_i = a^2 Y_i/R_i^2, \quad q_1 = \sigma, \quad q_2 = -\sigma. \quad (17)$$

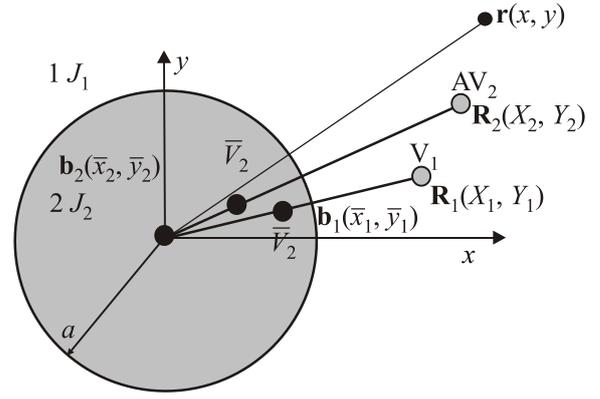


Рис. 1. Распределение реальных и фиктивных вихрей в задаче о вихревой паре в системе с магнитным дефектом.

Соответственно, при определении поля внутри дефекта необходимо в точках расположения реальных вихрей \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 поместить виртуальные вихри с зарядами $\tilde{q}_1 = 1 - \sigma$ и $\tilde{q}_2 = \sigma - 1$. Таким образом, поля вне и внутри дефекта определяются формулами

$$\varphi_{out} = \arctg \frac{y - Y_1}{x - X_1} - \arctg \frac{y - Y_2}{x - X_2} + \sigma \arctg \frac{y - y_1}{x - x_1} - \sigma \arctg \frac{y - y_2}{x - x_2}, \quad (18)$$

$$\varphi_{in} = (1 - \sigma) \arctg \frac{y - Y_1}{x - X_1} - (1 - \sigma) \arctg \frac{y - Y_2}{x - X_2}. \quad (19)$$

«Внешние поля» $\varphi_{i,ext}$, действующие на вихрь пары, определяются фиктивными вихрями и полем «комплемментарного» вихря пары из суммы (18). Знание этих полей достаточно для построения динамики исходной вихревой пары в рамках уравнений (10).

2. Динамика изолированного вихря в поле магнитного дефекта

Рассмотрим динамику изолированного вихря с $q = p = 1$ в поле дефекта в предложенной модели. Распределение намагниченности определяется формулами (15), (16). Из (7) следует, что вихрь вращается вокруг дефекта по круговой орбите с радиусом R , который определяет энергию и момент системы

$$E_V = \pi J_1 M_0^2 \ln(l/d_0) - \pi J_1 M_0^2 \sigma \ln(1 - a^2/R^2), \quad (20)$$

$$K_V = (\hbar M_0 / 2\mu_0) \pi R^2. \quad (21)$$

Второе слагаемое в (20) описывает взаимодействие вихря с дефектом, качественно совпадающее с приведенным в работе Pereira и др. [12]. При $R \gg a$ энергия взаимодействия

$$E_{int} \approx \pi J_1 M_0^2 \sigma a^2 / R^2 = J_1 M_0^2 \delta / R^2,$$

где характеристика дефекта $\delta = \sigma \pi a^2$ пропорциональна его площади и меняется от $-\pi a^2$ для немагнитного дефекта до πa^2 для «магнито жесткого». Первый предел особенно интересен, поскольку описывает также ситуацию со сверхтекучей жидкостью с непроницаемой областью. В случае большой дефектной области при движении вихря вдоль границы на расстоянии Δ от нее при $a \gg \Delta \gg l_0$ из (20) следует $E_{\text{int}} \approx -\pi J_1 M_0^2 \sigma \ln(\Delta/a)$, что соответствует движению вдоль границы полупространства со скоростью $V = J_1 M_0 \mu_0 \sigma / \hbar \Delta$. При конечном радиусе дефекта из (7) следует выражение для скорости вращения вихря

$$V = -J_1 M_0 \frac{2\mu_0}{\hbar} \sigma \frac{a^2}{R(R^2 - a^2)}. \quad (22)$$

Вихрь «захватывается» дефектом и вращается вокруг него со скоростью $\propto 1/R^3$ на больших расстояниях. Направление вращения зависит от свойств дефекта. При понижении обмена по сравнению с матричным (в частности, для немагнитного дефекта) вихрь вращается против часовой стрелки, а при большем обмене в дефекта — по часовой стрелке.

3. Движение вихревой пары при наличии магнитного дефекта

Перейдем к исследованию динамики вихревой пары при наличии дефекта (рис. 2). (В предложенной модели в отсутствие вихрей дефект не создает своего поля.) Вихревая пара до рассеяния ($t = -\infty$) имеет размер L_0 и «прицельное расстояние» ρ . Найдем зависимость угла рассеяния пары $\chi = \chi(\rho, L_0)$ от прицельного расстояния и размера пары L_0 . Размер L_0 определяет энергию системы, а вместе с ρ — угловой момент, т.е. два интеграла движения. Ниже $\mathbf{R}_1(X_1, Y_1)$ — координата вихря с

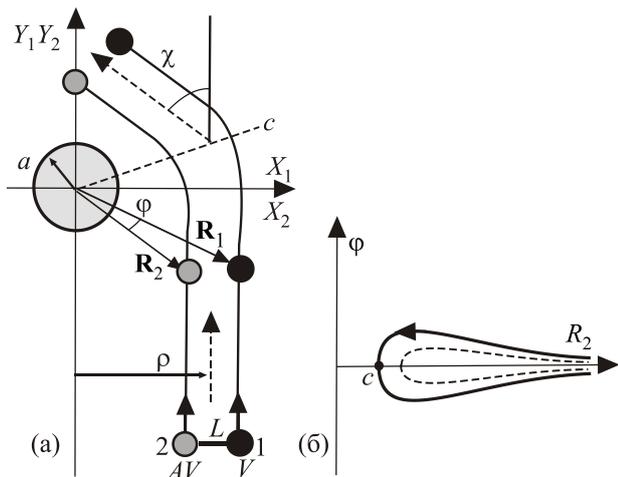


Рис. 2. Рассеяние пары «вихрь–антивихрь» на круглом ферромагнитном дефекте в случае слабомагнитного дефекта с $J_2 < J_1$. Траектории вихрей пары (а) и соответствующий «фазовый портрет» (б).

зарядом $q = 1$ и $\mathbf{R}_2(X_2, Y_2)$ — координата антивихря с зарядом $q = -1$. Угол между векторами \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 обозначен как φ . Положения фиктивных вихрей определяются положением вихрей пары, и задача сводится к движению только этих двух квазичастиц. Таким образом, динамическая система с двумя степенями свободы и двумя независимыми интегралами движения интегрируется в квадратурах. Знание поля намагнитченности (18) вне дефекта позволяет с помощью (10) написать уравнения движения вихрей пары. Введем новую временную переменную $\tau = (2J_1 M_0 \mu_0 / \hbar)t$, в терминах которой уравнения (10) переписуются в виде $\mathbf{R}_\tau = -\nabla \varphi_{\text{ex}}$ или

$$\frac{dX_{1,2}}{d\tau} = \frac{Y_2 - Y_1}{R_1^2 - 2\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + R_2^2} \pm \sigma \frac{Y_{1,2}}{(R_{1,2}^2 - a^2)} \mp \sigma \frac{Y_{1,2}R_{2,1}^2 - Y_{2,1}a^2}{R_1^2 R_2^2 - 2a^2 \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + a^4}, \quad (23)$$

$$\frac{dY_{1,2}}{d\tau} = \frac{X_1 - X_2}{R_1^2 - 2\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + R_2^2} \mp \sigma \frac{X_{1,2}}{(R_{1,2}^2 - a^2)} \pm \sigma \frac{X_{1,2}R_{2,1}^2 - X_{2,1}a^2}{R_1^2 R_2^2 - 2a^2 \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + a^4}, \quad (24)$$

где $R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2$ и $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2$. Эти уравнения допускают аналитическое решение в приближении малоуглового рассеяния, изучение методами качественной теории динамических систем и численное исследование в широком интервале значений параметров L_0 , ρ и σ . Уравнения (23), (24) совпадают с полученными в подходе Тиле из формул (7) при знании полной энергии системы. Ее легко получить, воспользовавшись формулами (18), (19) и выражением для энергии (4) в основном приближении с $m = 0$:

$$E = 2\pi J_1 M_0^2 \ln \frac{R_{12}}{d_0} + \pi J_1 M_0^2 \sigma \ln \left(\frac{R_1^2 R_2^2 - 2R_1 R_2 a^2 \cos \varphi + a^4}{(R_1^2 - a^2)(R_2^2 - a^2)} \right), \quad (25)$$

где $R_{12}(t) = |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = \sqrt{R_1^2 - 2R_1 R_2 \cos \varphi + R_2^2}$ — расстояние между вихрями пары, которое отлично от начального значения L_0 и зависит от времени. Первое слагаемое в (25) отвечает собственной энергии пары (11), а множители $(R_1^2 - a^2)$ и $(R_2^2 - a^2)$ во втором — взаимодействию с дефектом каждого вихря пары (см. (20)). Полная энергия включает дополнительное слагаемое, связанное с взаимодействием вихрей пары «через дефект». Аргумент логарифма во втором члене в (25) больше единицы, и при $\sigma < 0$ слабомагнитный дефект притягивает пару, а при $\sigma > 0$ магнито жесткий дефект отталкивает ее.

Угловой момент пары выражается через начальные данные и равен

$$K = (\pi \hbar M_0 / 2\mu_0) (R_1^2 - R_2^2) = (\pi \hbar M_0 / \mu_0) (L_0 \rho). \quad (26)$$

Знание интегралов движения E и K позволяет изучить динамику вихревой пары с помощью качественного анализа на «фазовой плоскости», в качестве которой удобно выбрать расстояние антивихря (близко расположенного к дефекту) до центра R_2 и угол φ . В приближении малоуглового рассеяния при $\rho \gg a, L_0$ из (25,26) следует соотношение:

$$\varphi \approx (L_0 / R_2^2) \sqrt{(R_2 - \rho + L_0/2)(R_2 + \rho) + (a L_0 / R_2)^2}, \quad (27)$$

которое дает представление о динамике системы на плоскости φ, R_2 . Соответствующая фазовая траектория приведена на рис. 2(б), где пунктиром изображена траектория для прямолинейного движения вихревой пары в случае отсутствия дефекта ($a = 0$), а точка c соответствует ближайшей к дефекту точке траектории (линия c на рис. 2(а)).

4. Малоугловое рассеяние вихревых пар

Малоугловое рассеяние легко исследовать аналитически. В качестве переменных введем координаты центра вихревой пары $\mathbf{r} = (x, y)$ и величину вектора «вихревого диполя» $\mathbf{d} = 2\mathbf{b}$, определяющего размер пары $R_{12}(t) = L(t) = 2b$:

$$\begin{aligned} x &= (X_1 + X_2)/2, & y &= (Y_1 + Y_2)/2, \\ u &= b_x = (X_1 - X_2)/2, & v &= b_y = (Y_1 - Y_2)/2. \end{aligned} \quad (28)$$

Новые переменные приведены на рис. 3, где через χ обозначен угол рассеяния. В новых переменных динамические уравнения (23), (24) принимают вид

$$[\mathbf{r}_\tau, \mathbf{n}] = \mathbf{b}/2b^2 + (f - s)\mathbf{b} + h\mathbf{n}, \quad (29)$$

$$[\mathbf{b}_\tau, \mathbf{n}] = -s\mathbf{r} + h\mathbf{b}, \quad (30)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, перпендикулярный плоскости системы, а коэффициенты уравнений зависят только от модулей векторов $\mathbf{r}(\tau)$ и $\mathbf{b}(\tau)$:

$$h = (\sigma a^2) 8b^2 L_0 \rho / PQ, \quad f = (\sigma a^2) 2/Q,$$

$$s = (\sigma a^2) 4b^2 (r^2 + b^2 - a^2) / PQ,$$

$$P = (r^2 + b^2 - a^2)^2 - (L_0 \rho)^2, \quad Q = P + 4a^2 b^2.$$

При малоугловом рассеянии можно воспользоваться разделением временных масштабов: «быстрого» движения центра пары (координат (x, y)) со скоростью $V \sim 1/L$ и «медленного» изменения ее формы и направ-

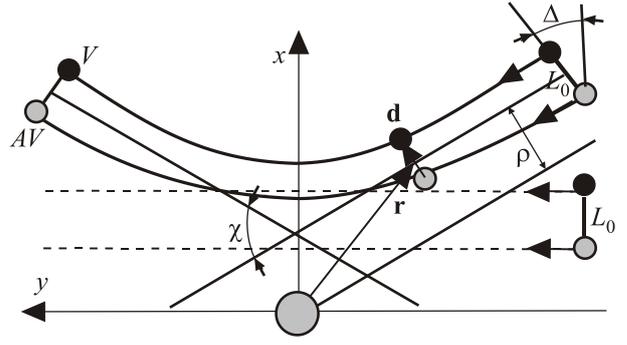


Рис. 3. Малоамплитудное рассеяние вихревой пары (случай магнито жесткой примеси).

ления движения (координат (u, v)). Все слагаемые в уравнениях, кроме первого в правой части (29), имеют множители $\sigma a^2 \sim \delta$, характеризующие «мощность» дефекта. Слагаемые в правой части (29) имеют слева направо такие порядки величин: $1/b$, $(\sigma a^2)b/\rho^4$, $(\sigma a^2)b^3/\rho^6$, $(\sigma a^2)b^3/\rho^6$, а в правой части (30) — $(\sigma a^2)b^2/\rho^5$ и $(\sigma a^2)b^4/\rho^7$. Поэтому отклонение траектории пары от прямолинейной мало при $\rho \gg ab \sim aL_0$. В основном приближении из (29) получаем решение для свободного движения пары размера L_0 : $\mathbf{r}_0 = (\rho, \tau/L_0) = (\rho, t(2J_1 M_0 \mu_0 / \hbar L_0))$ и $r_0 = \sqrt{\rho^2 + \tau^2/L_0^2}$, что согласуется с решением (11) (пунктиры на рис. 3), и в этом приближении $b = b_0 = u_0 = L_0/2$, $v_0 = 0$. Для пары малого размера с $L \ll r$, т.е. при $b \ll \rho$, уравнение (30) принимает вид $[\mathbf{b}_\tau, \mathbf{n}] = -s\mathbf{r}$, или при учете вида основного приближения: $v_\tau = -s\rho$ и $u_\tau = s\tau/L_0$, где $s \approx \sigma a^2 L_0^2 / (\rho^2 + \tau^2/L_0^2)^3$. Интегрирование дает асимптотики разворота вихревой пары при $\tau \rightarrow \pm\infty$: $v(\pm\infty) = \mp(\pi a^2 \sigma) 3L_0^3 / 16\rho^4$. Угол ее поворота за половину времени рассеяния равен $\Delta \approx 2v/L_0$ (рис. 3), а полный угол рассеяния $\chi = 2\Delta$. Поэтому зависимость $\chi = \chi(\rho)$ определяется формулой

$$\chi(\rho, L_0) = 3\delta L_0^2 / 4\rho^4. \quad (31)$$

Из второго уравнения для диполя пары находится изменение ее размера в процессе рассеяния $L = L_0(1 - \sigma a^2 L_0^2 / \rho^4)$: при отталкивании пары от дефекта ($\sigma > 0$) она сжимается в области взаимодействия и растягивается при притяжении к дефекту ($\sigma < 0$).

Полученный результат следует и из формулы малоамплитудного рассеяния обычных частиц [18], если переписать ее в виде

$$\chi = -(2\rho/P_0 V_0) \int_{\rho}^{\infty} dr (dU/dr) / \sqrt{\rho^2 - r^2},$$

где импульс и скорость вихревой пары на бесконечности (11) равны $P_0 = \pi\hbar M_0 L_0 / \mu_0$ и $V_0 = 2J_1 \mu_0 M_0 / \hbar L_0$, а потенциальная энергия равна полной энергии вихревой пары в поле дефекта (25), сводящаяся в рассмотренном пределе к $E \approx (\sigma \mu a^2) J_1 M_0^2 L_0^2 / r^4$. В последнее время разрабатываются методики генерации вихрей и вихревых пар в БЭК, а также вихрей и скирмионов в магнетиках под действием высокочастотного поля и при лазерном и температурном воздействии [13,19]. Поскольку при этом генерируется большое число вихревых возбуждений и формируется их направленное движение, возникают проблемы усреднения результатов [20], и представляет интерес вычисление дифференциального сечения рассеяния вихрей и вихревых пар на ансамбле дефектов. Вычисляемая обычным образом [18] для двумерного случая эта величина равна

$$\Sigma(\rho) = |d\rho/d\chi| d\chi = (3\pi\sigma)^{1/4} \sqrt{a L_0 / 32} \chi^{-5/4} d\chi.$$

5. Процесс рассеяния при произвольных параметрах вихревых пар и дефектов

Хотя в дифференциальное сечение рассеяния основной вклад вносит малоугловое рассеяние, представляет интерес исследование этого процесса при произвольных соотношениях параметров задачи: a , σ , L_0 и ρ . Рассеяние в общем случае было рассмотрено численно в рамках уравнений (23), (24) в программе MAPLE. Угол рассеяния χ определяется только безразмерными комбинациями параметров L_0 , a и ρ . Метод коллективных переменных подразумевает выполнение неравенства $L_0 \Delta \gg l_0$, где Δ — наименьшее расстояние от вихрей до границы дефекта. Несмотря на то, что при критических соотношениях параметров, когда вихри достаточно близко приближаются к границам дефекта ($\Delta \ll l_0$), условия применимости уравнений (23), (24) нарушаются, полученные результаты качественно дают общую характеристику динамики системы «вихревая пара–дефект». Характер рассеяния различен в случаях отталкивающего (при $\sigma > 0$) и притягивающего (при $\sigma < 0$) дефектов. Параметр σ меняется в интервале $-1 < \sigma < 1$. Мы приведем результаты для наиболее характерных случаев $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$. Последний особенно интересен, поскольку при этом данные для магнитной системы переносятся на важную проблему взаимодействия вихревых пар с твердым включением в сверхтекучей жидкости.

5.1. Рассеяние пар притягивающим (немагнитным) дефектом

В качестве примера на рис. 4(а) приведены численные результаты для зависимости угла рассеяния χ от прицельного расстояния ρ в пределе $\sigma = -1$ для фиксированных значений радиуса дефекта $a = 2$ и размера пары $L_0 = 1$. Она существенно меняется при критиче-

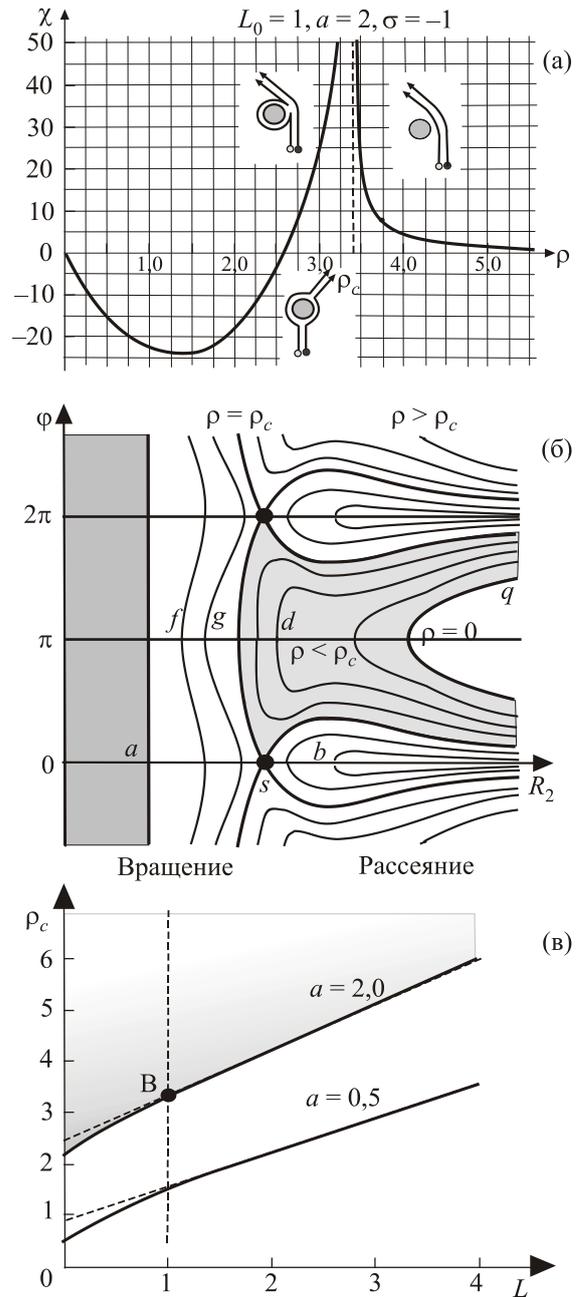


Рис. 4. Зависимость $\chi = \chi(\rho)$ при $L_0 = 1$ и $a = 2$ (а), «фазовый портрет» рассеяния вихревой пары на плоскости ϕ, R_2 при разных значениях ρ (б), зависимость $\rho_c = \rho_c(L)$ (в).

ском значении прицельного расстояния $\rho = \rho_c \approx 3,4$. Пределу $\rho \gg \rho_c$ соответствует рассмотренное выше малоугловое рассеяние, но при $\rho = \rho_c$ сценарий рассеяния меняется. При $\rho > \rho_c$ оба вихря пары огибают дефект с одной стороны (рис. 2(а)), а при $\rho < \rho_c$ в процессе рассеяния она распадается на два вихря, которые обходят препятствие с разных сторон, и после прохождения дефекта пара снова восстанавливается как единый объект (рис. 5(а)). При $\rho < \rho_c$ и $\rho \rightarrow \rho_c$ траектория антивихря, двигающегося вблизи поверхности дефекта, резко меняется (рис. 5(б)): часть траектории он

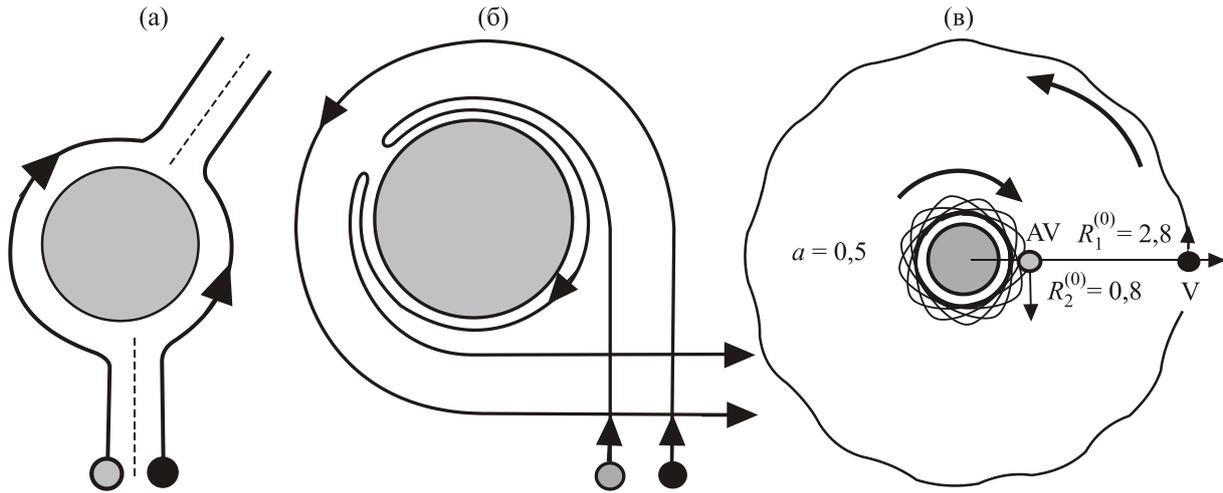


Рис. 5. Зависимость характера рассеяния вихревой пары с $\rho < \rho_c$ при различном соотношении размеров пары и дефекта: $L_0 = 2$, $a = 0,5$, $\rho \ll \rho_c$ (а) и $L_0 = 1$, $a = 0,5$, $\rho \approx \rho_c$ (б). Характер вращения вихревой пары вокруг дефекта при $a = 2$, $M = 7,2$, $L \approx 2$, $\rho = M/2L_0 \approx 1,8$ (в).

проходит в направлении, обратном вращению вихря пары. При изменении знака $\rho - \rho_c$ разность углов направления векторов \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 скачком меняется на 2π . При $\rho \rightarrow 0$ расстояние вихрей до границы дефекта стремится к величине $\Delta \approx L_0/2$, поскольку энергия вихревой пары распределяется почти поровну между двумя парами вихрей с их изображениями (рис. 5(а)). Эти результаты качественно согласуются с приведенными в [13] для отталкивающей примеси в БЭК. (Отталкивающая примесь в БЭК соответствует притягивающему магнитному дефекту.)

Наглядное представление о характере рассеяния дает его анализ на «фазовой плоскости» φ, R_2 . При $\sigma = -1$ из выражения (25) следуют зависимости $\varphi = \varphi(R_2)$ для разных прицельных расстояний ρ и энергий вихревой пары $E = 2\pi M_0^2 \ln(L_0/d_0)$:

$$\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{L_0^2(R_1 R_2 - a^2)^2 - (R_1 - R_2)^2(R_1^2 - a^2)(R_2^2 - a^2)}{4R_1 R_2 (R_1^2 - a^2)(R_2^2 - a^2) - a^2 L_0^2}. \quad (32)$$

Поскольку $R_1 = \sqrt{R_2^2 + 2\rho L_0}$, то выражение (32) задает зависимость $\varphi = \varphi(R_2, \rho, L_0)$. Качественно она приведена на рис. 4(б), где заштрихованная часть с $R_2 < a$ соответствует области дефекта. При приближении координаты R_2 антивихря на малое расстояние к этой границе условия применимости рассмотрения нарушаются, но мы будем пользоваться полученными результатами для качественного понимания процесса рассеяния.

Области $\rho > \rho_c$ на рис. 4(б) отвечают «траектории» типа (б), для которых до и после рассеяния угол между радиус-векторами вихрей равен нулю. При $\rho < \rho_c$ процессу рассеяния отвечает заштрихованная область тра-

екторий типа (д), для которых угол между радиус-векторами меняется в процессе рассеяния на 2π (т.е. один из вихрей пары «огibt» дефект). При «лобовом» столкновении с $\rho = 0$ (границная линия q на рисунке) вихри обходят дефект с разных сторон с минимальным расстоянием до его границы R_0 , которое зависит от соотношения $l = L_0/2a$ и для $z = R_0/a$ определяется уравнением $z^3 - lz^2 - z - l = 0$: $R_0 \approx L_0/2$ при $L_0 \gg a$ и $R_0 \approx a + L_0/2$ при $L_0 \ll a$. «Фазовым траекториям» типа (д), близким к сепаратрисе (г), отвечают реальные траектории типа изображенной на рис. 4(в). В некотором временном интервале вихри пары вращаются в противоположном направлении, и этот интервал растет в пределе $\rho \rightarrow \rho_c$. Значению $\rho = \rho_c$ отвечает «седловая точка» s фазового портрета. Из уравнений (23), (24) следует, что ей отвечает синфазное вращение вихревой пары вокруг дефекта. Однако такое движение, как обычно в седловых точках, неустойчиво, а вихри (см. ниже) начинают вращаться в противоположных направлениях. Из уравнения (32) при $\varphi = 0$ следует, что в критической точке при больших размерах пары ($L_0 > a$) имеем $\rho_c \approx L_0/2 + 3a^{2/3}L_0^{1/3}$ (рис. 4(в)).

В этом пределе $R_2 \approx a^{2/3}L_0^{1/3} \gg a$ и выполняется условие применимости уравнений. На рис. 4(в) приведена зависимость $\rho_c = \rho_c(L_0)$, полученная численно для значения $a = 2$. Заштрихована область прицельных расстояний, при которых пара не распадается вблизи дефекта. Точкой B отмечена особенность на рис. 4(а), а вертикальной штриховой линией — развертка по оси прицельных расстояний на нем. Зависимость $\rho_c = \rho_c(L_0)$ практически линейна во всем интервале изменений прицельного расстояния за исключением области малых прицельных параметров порядка величин L_0 и a . Для сравнения приведена также зависи-

мость $\rho_c = \rho_c(L_0)$ для $a = 0,5$. Из проведенного анализа следует, что при $\sigma = -1$ критическое значение ρ_c существует при любых значениях размеров пары и дефекта.

Анализ фазового портрета указывает на наличие при значениях величин R_2 , меньших сепаратрисных (g), области совершенно другой динамики (линии f) на рис. 4(б)). Ей отвечает вращение вихревой пары вблизи дефекта. Параметр L_0 уже не имеет смысла размера пары при ее уходе на бесконечность, но остается характеристикой энергии системы. При этом вихрь и антивихрь вращаются в противоположном направлении с различными скоростями. Их движение является двухчастотным и происходит с двумя несоизмеримыми в общем случае частотами. Характерный вид такого вращения, полученный численно, представлен на рис. 5(в) для следующих начальных условий: $R_1(t=0) = 2,8$, $R_2(t=0) = 0,8$, $M(t=0) = R_1^2 - R_2^2 = 7,2$.

5.2. Рассеяние пар отталкивающим дефектом

При $\sigma > 0$ («магнито жесткий» дефект) вихревая пара отталкивается от него, и ее рассеяние существенно меняется. Исследуем предел $\sigma = 1$ ($J_2 \rightarrow \infty$) и рассмотрим процесс рассеяния на «фазовой плоскости» ϕ, R_2 . В данном случае вместо соотношения (32) имеем связь $\phi(R_2)$ вида

$$\cos \phi = \frac{1}{4a^2 R_1 R_2} \left((R_1^2 + a^2)(R_2^2 + a^2) - \sqrt{(R_1^2 - a^2)(R_2^2 - a^2)} \sqrt{(R_1^2 - a^2)(R_2^2 - a^2) + 4a^2 L_0^2} \right) \quad (33)$$

с $R_1 = \sqrt{R_2^2 + 2\rho L_0}$. Она описывает процесс рассеяния при разных значениях ρ, L_0, a и приведена на рис. 6(б). Численное решение уравнений (23), (24) для пары большого размера с $L_0 = 6 \gg a = 0,5$ дает зависимость угла рассеяния от прицельного расстояния, приведенную на рис. 6(а). Она напоминает зависимость в случае притягивающего дефекта при изменении знака $(\rho - \rho_c)$. Также имеется критическое значение ρ_c прицельного расстояния, при котором меняется характер рассеяния, но теперь оно существует только при размере пары большем критического $L_c = a(1 + \sqrt{5})\sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx a \cdot 6,66$, зависящего от размера дефекта (рис. 6(в)). При фиксированном размере пары $L > L_c(a)$ с изменением прицельного расстояния процесс рассеяния меняется. При $\rho > \rho_c(L, a)$ оба вихря пары в течение всего процесса остаются по одну сторону от дефекта, чему соответствуют линии типа (b) на рис. 6(б). При $\rho = \rho_c$ (линия (g) на рис. 4(б)) происходит бифуркация, и пара распадается на два вихря, обходящих дефект с разных сторон. При дальнейшем уменьшении ρ вихри огибают дефект и в процессе рассеяния относительный угол между ними меняется на 2π (линии типа (d)). При лобовом

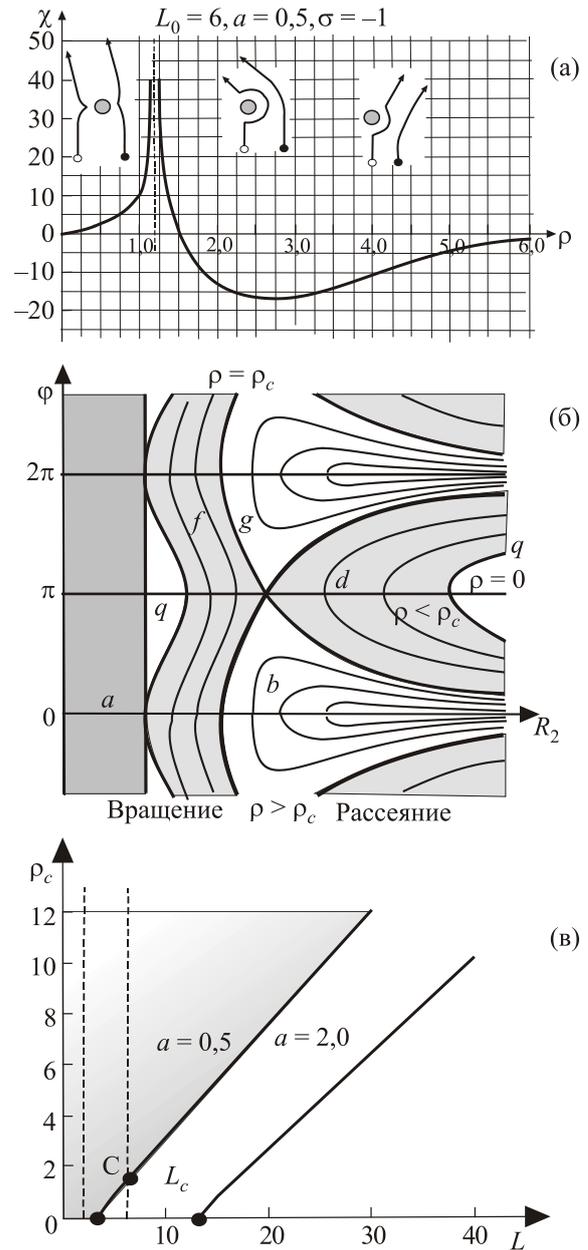


Рис. 6. Зависимость $\chi = \chi(\rho)$ при $L_0 = 6$ и $a = 0,5$ для отталкивающего дефекта (а), «фазовый портрет» динамики рассеяния пары (б) и зависимость критического прицельного расстояния от размеров вихревой пары и дефекта (в). На вставках (а) приведены качественно траектории вихрей в процессе рассеяния.

столкновении ($\rho = 0$ и линия q на рисунке) минимальное расстояние от вихрей до поверхности дефекта зависит от размера пары. При $L_0 \gg a$ имеем $R_2^{\min} \approx L_0/2$, а при $L_0 \ll a$ минимальное сближение с дефектом $R_2^{\min} - a \approx L_0/2$. Из фазового портрета видна также возможность двухчастотного вращения вихревой пары вокруг дефекта (заштрихованная область f вблизи поверхности дефекта).

Ситуация меняется для вихревых пар малого размера с $L_0 < L_c(a)$ (левая вертикальная штриховая линия на рис. 6(в)). Они не проходят через дефект, а отражаются от него. С уменьшением прицельного расстояния угол рассеяния увеличивается от нуля до π , и при $\rho \rightarrow 0$ минимальные расстояния вихрей до поверхности дефекта стремятся к нулю: $R_2^{\min} \approx a + \rho^2 L_0 / 2a^2$ и $R_1^{\min} \approx a + \rho L_0 / a$. (Но напомним, что при этом теряется справедливость применяемого метода коллективных переменных, поскольку скорости вихрей неограниченно возрастают, превышая скорость спиновых волн в ферромагнетике.)

Заключение

В приближении метода коллективных переменных аналитически, численно и качественно рассмотрен процесс рассеяния магнитных вихревых пар магнитным дефектом в двумерном легкоплоскостном ферромагнетике. Предложена модель дефекта, представляющего круглую область магнетика с обменным взаимодействием, отличным от такового в основном объеме магнетика, и изменяющееся от нуля до бесконечности. Исследовано движение одиночных вихрей и вихревых пар в окрестности дефекта. Для малоуглового рассеяния аналитически получена зависимость угла рассеяния вихревой пары от прицельного расстояния и вычислено дифференциальное сечение рассеяния. При произвольном соотношении параметров вихревой пары и дефекта зависимость угла рассеяния от прицельного расстояния получена численно и исследована качественными методами на фазовой плоскости. В случае немагнитной примеси результаты качественно согласуются с данными численного анализа взаимодействия вихревых пар с дефектами в БЭК. Указано на возможность существования связанных состояний вихревой пары с дефектом в виде двухчастотного встречного вращения вихря и антивихря вокруг дефекта. В частном случае результаты описывают движение вихрей и вихревых пар при наличии круглой непроницаемой области в сверхтекучей жидкости и БЭК.

Работа поддержана научным проектом НАН Украины №4/17-Н и научной программой 1.4.10.26/Ф-26-4.

1. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1988).
2. А.М. Kosevich, В.А. Ivanov, and A.S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
3. А.М. Косевич, В.П. Воронов, И.М. Манжос, *ЖЭТФ* **84**, 148 (1983).
4. А.В. Никифоров, Э.Б. Сонин, *ЖЭТФ* **58**, 373 (1983).
5. L. Onsager, *Suppl. Nuovo Cimento* **6**, 249 (1949); R.P. Feynman, *Phys. Suppl.* **24**, 18 (1958).

6. M.H. Anderson, J.B. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995); K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.I. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
7. J. Raabe, R. Pulwey, R. Sattler, T. Schweinbock, J. Zweek, and D. Weiss, *J. Appl. Phys.* **88**, 4437 (2000).
8. Woo Jin Kwon, Joon Hyun Kim, Sang Won Seo, and Y. Shin, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 245301 (2016); S. Higashitani, H. Takeuchi, S. Matsuo, Y. Nagato, and K. Nagai, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 175301 (2013).
9. N. Papanicolaou and P.N. Spathis, *Nonlinearity* **12**, 285 (1999); S. Komineas and N. Papanicolaou, *arXiv:0712.3684v1, condmat.mes-hall* (2008); S. Komineas, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 117202 (2007).
10. A.S. Kovalev, S. Komineas, and F.G. Mertens, *Eur. Phys. J. B* **25**, 89 (2002); A.C. Ковалев, *ФНТ* **43**, 334 (2017) [*Low Temp. Phys.* **43**, 274 (2017)].
11. М.М. Богдан, *ФНТ* **31**, 968 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 735 (2005)]; М.М. Bogdan and C.E. Zaspel, *Phys. Status Solidi A* **189**, 983 (2002); G.M. Wysin, *Phys. Rev. B* **68**, 184411 (2003); L.A.S. Mol, A.R. Pereira, and A.S.T. Pires, *Phys. Rev. B* **66**, 052415 (2003); S.A. Leonel, Pablo Zimmermann Coura, A.R. Pereira, L.A.S. Mól, and B.V. Costa, *Phys. Rev. B* **67**, 104426 (2003); A.R. Pereira, L.A.S. Mól, S.A. Leonel, P.Z. Coura, and B.V. Costa, *Phys. Rev. B* **68**, 132409 (2003).
12. A.R. Pereira, L.A.S. Mól, S.A. Leonel, P.Z. Coura, and B.V. Costa, *Phys. Rev. B* **68**, 132409 (2003).
13. A. Griffin, G.W. Stagg, N.P. Pronkakis, and C.F. Barenghi, *arXiv:1609.06226v1, cond-mat. quant-gas* (2016).
14. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Phys. Z. Sowiet.* **8**, 153 (1935).
15. A.A. Tiele, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 230 (1973).
16. H.J. Lagt, *Introduction to Vortex Theory, Vortex Flow Press*, Potomac, Maryland (1961).
17. H. Fan and G.F. Wang, *Mechanics of Material* **35**, 943 (2003), см. также Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
18. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1965).
19. E.C. Samson, K.E. Wilson, Z.L. Newman, and B.P. Anderson, *Phys. Rev. A* **93**, 023603 (2016).
20. D. Pinna, F.A. Araujo, J.-V. Kim, V. Cros, D. Querlioz, P. Bessiere, J. Droulez, and J. Grollier, *arXiv:1701.07750v1, cond-mat.mes-hall* (2017).

Magnetic vortices interaction with defects

A.S. Kovalev and J.E. Prilepskii

Magnetic vortices and vortex pairs scattering by magnetic defects in 2D easy-plane ferromagnetic is investigated in the frame of classical equations of magnetization dynamics and in the collective variables approach for the

vortices coordinates. The model for defect as the magnetic domain with exchange interaction differing from the same for the main matrix was suggested. The magnetic vortex rotation about the defect and the vortex pair scattering by defect was considered. The analytical expression for differential scattering cross-section and the dependence of the scattering angle on the parameters of vortex pair, defect and impact parameter were obtained in the limit of small-angle scattering. Vortex pairs scattering by defect was investigated numerically and by qualitative analysis in the wide region of the scattering parameters. The character of the scattering changes qualitatively at the

critical value of impact parameter. It was demonstrated the possibility for existence of vortex pairs rotary states localized near defects.

PACS: 75.10.-b General theory and models of magnetic ordering;
75.10.Hk Classical spin models.

Keywords: easy-plane ferromagnet, magnetic defects, magnetic vortex, vortex pair, Thiele equation, vortex scattering, scattering cross section.