УДК 531.36

ОБМЕЖЕНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ СИСТЕМ ВОЛЬТЕРРИ У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

М. Ф. Городній

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. акад. Глушкова 2, корп.6
e-mail: gorod@hotbox.ru

We find conditions for solutions of Volterra systems with matrix coefficients to be bounded and periodic. The conditions are formulated in terms of the coefficients.

Наведено умови обмеженості та періодичності розв'язків систем Вольтерри з матричними коефіцієнтами, які формулюються в термінах коефіцієнтів цих систем.

Нехай H — p-вимірний комплексний евклідів простір із скалярним добутком $(.,.)$ та породженою ним нормою $\|.\|$; $\{A_n,\ n \geq 0\}$ — фіксована послідовність лінійних операторів, що діють із H в H; I — одиничний, O — нульовий оператори в H. Норму лінійного оператора A_n будемо позначати, як звичайно, $\|A_n\|$.

Мета даної роботи — отримати критерій обмеженості розв'язку $x := \{x_n,\ n \geq 0\}$ лінійної системи Вольтерри

$$x_0 = y_0, \quad x_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} A_{n-k} x_k + y_{n+1}, \quad n \geq 0, \tag{1}$$

для довільної обмеженої послідовності $y := \{y_n,\ n \geq 0\}$ елементів H та застосувати цей критерій для дослідження питання про обмеженість розв'язків однієї нелінійної системи Вольтерри у просторі H.

Достатні умови обмеженості розв'язків системи (1) отримано в [1] у випадку, коли послідовність y додатково періодична, а оператори $A_n,\ \ n \geq 0$, самоспряжені. (Про застосування систем Вольтерри також див. [1] та наведену там бібліографію.)

1. Критерій обмеженості розв'язків системи (1). Нехай $\{v_1,\ v_2, \ldots, v_p\}$ – фіксований базис у H. Матрицю, що відповідає оператору A_n у цьому базисі, у подальшому також будемо позначати символом A_n. Оскільки всі норми у скінченновимірному просторі еквівалентні, то у цьому пункті додатково будемо використовувати

$$\|u\|_* := \max_{1 \leq k \leq p} |u(k)|, \quad u = u(1)v_1 + u(2)v_2 + \ldots + u(p)v_p \in H,$$

$$\|A_n\|_* := \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{k=1}^{p} |a_n(j;k)|, \quad A_n = \big\{a_n(j;k)\big\}_{j,k=1}^{p}, \quad n \geq 0.$$

Критерій обмеженості розв'язків лінійної системи Вольтерри (1) містить така теорема.

Теорема 1. *Нехай*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\| < +\infty. \tag{2}$$

Тоді еквівалентними є такі твердження:

a_1) *система (1) для довільної обмеженої в H послідовності y має єдиний обмежений розв'язок x;*

a_2) *для будь-якого z з одиничного круга $K := \{z \in \mathbf{C},\ |z| \le 1\}$ оператор*

$$F(z) := I + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1} z^n$$

має обернений $F^{-1}(z)$.

Доведення. Визначимо послідовність лінійних операторів $\{Q_n,\ n \ge 0\}$ у просторі H співвідношеннями

$$Q_0 = -A_0, \qquad Q_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} A_{n-k} Q_k - A_{n+1}, \quad n \ge 0. \tag{3}$$

Неважко перевірити, що відповідний y єдиний розв'язок x системи Вольтерри (1) зображується у вигляді

$$x_0 = y_0, \qquad x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} Q_{n-k} y_k + y_{n+1}, \quad n \ge 0. \tag{4}$$

Покажемо, що $a_1) \Rightarrow a_2)$. Оскільки для довільного $u \in H$ відповідний послідовності $y_0 = u,\ y_n = \vec{0},\ n \ge 1$, обмежений розв'язок системи (1) має вигляд $x_0 = u,\ x_n = Q_{n-1}u,\ n \ge 1$, то внаслідок теореми Банаха – Штейнгауза [2, с. 116] та еквівалентності норм у скінченновимірному просторі числова послідовність $\{\|Q_n\|_*,\ n \ge 0\}$ є обмеженою, а отже, ряд

$$Q(z) := I + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n-1} z^n$$

збігається за нормою при $|z| < 1$.

Таким чином, при $|z| < 1$ матричні функції $F(z)$ та $Q(z)$ визначаються за допомогою збіжних за нормою рядів. Тому внаслідок рівностей (3) та означення добутку рядів за Коші маємо

$$\forall z,\ |z| < 1\ :\ F(z)Q(z) = I. \tag{5}$$

Доведемо, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Q_n\|_* < +\infty. \tag{6}$$

Зафіксуємо індекси j та k, $1 \le j, k \le p$, і розглянемо таку обмежену в H послідовність y, що $y_n = y_n(k)v_k$, $n \ge 0$. Внаслідок твердження a_1), (4) та означення $\|.\|_*$ j-ті компоненти відповідного y розв'язку $\{x_n,\, n \ge 0\}$ задають обмежену послідовність комплексних чисел і визначаються таким чином:

$$x_0(j) = \delta_{jk} y_0(k),$$
$$x_{n+1}(j) = \sum_{\nu=0}^{n} q_{n-\nu}(j,k) y_\nu(k) + \delta_{jk} y_{n+1}(k), \quad n \ge 0. \tag{7}$$

Тут δ_{jk} — символ Кронекера, $Q_n = \{q_n(j,k)\}_{j,k=1}^{p}$, $n \ge 0$. Оскільки для довільної обмеженої послідовності $\{y_n(k),\, n \ge 0\} \subset \mathbf{C}$ побудована згідно з (7) послідовність $\{x_n(j),\, n \ge 0\}$ є обмеженою, то на підставі тих же міркувань, що й при доведенні леми 1 з [3], робимо висновок, що

$$\forall 1 \le j, k \le p \,:\, \sum_{n=0}^{\infty} |q_n(j,k)| < +\infty. \tag{8}$$

Залишилось зауважити, що з (8) випливає збіжність ряду (6), а отже, з урахуванням (3) рівності (5) виконуються при $z \in K$. Тому для довільного $z \in K$ $\det F(z) \ne 0$, чого досить для існування $F^{-1}(z)$. Отже, імплікацію $a_1) \Rightarrow a_2)$ доведено.

Покажемо, що $a_2) \Rightarrow a_1)$. Внаслідок твердження a_2) та (2) числова функція $\varphi(z) :=$ $:= \det F(z)$ визначається за допомогою збіжного ряду та не має нулів у одиничному крузі K. Звідси випливає (див., наприклад, задачу 3 з [4, с. 486]), що $\varphi^{-1}(z)$ розвивається в абсолютно збіжний в K ряд Тейлора. Оскільки елементи матриці $F(z)$ також є абсолютно збіжними в K рядами Тейлора, то на підставі правила Крамера визначення оберненої матриці робимо висновок, що функція $F^{-1}(z)$ розвивається у збіжний за нормою у крузі K ряд Тейлора. Тому з урахуванням (3) для кожного $z \in K$ виконується рівність $F^{-1}(z) = Q(z)$, а отже, $\sum_{n=0}^{\infty} \|Q_n\|_* < +\infty$. Таким чином, згідно з (4) можна стверджувати, що кожній обмеженій послідовності y відповідає обмежений розв'язок x системи (1), тобто виконується твердження a_1).

Теорему 1 доведено.

2. Наслідки. Наведені нижче твердження узагальнюють відповідні результати роботи [1].

Наслідок 1. *Нехай $\{A_j,\ j \ge -1\}$ — послідовність додатних самоспряжених операторів в H, що задовольняє такі умови:*

$b_1)$ $O \le A_{-1} < I$;

$b_2)$ $\forall j \ge -1 \,:\, A_j - A_{j+1} \ge A_{j+1} - A_{j+2}$;

$b_3)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\| < +\infty$.

Тоді виконується твердження a_1) теореми 1.

Зауваження. Про властивості додатних самоспряжених операторів див., наприклад, [5, с. 280–285]. Домовимося, що для самоспряжених операторів T і S будемо писати $T > S$, якщо

$$\forall u \in H, \quad u \ne \vec{0} \,:\, (Tu, u) > (Su, u).$$

Доведення наслідку 1. Досить переконатися, що з умов $b_1) - b_3)$ випливає твердження $a_2)$ теореми 1.

Якщо, від супротивного, для фіксованого $z \in K$ оператор $F(z)$ не має оберненого, то внаслідок скінченновимірності H обов'язково знайдеться такий елемент $u \in H, \quad \|u\| = 1$, що

$$F(z)u = \vec{0}. \tag{9}$$

Покладемо $a_k := (A_k u, u), \quad k \geq -1$. Згідно з умовами $b_1) - b_3)$ послідовність невід'ємних чисел $\{a_k,\ k \geq -1\}$ задовольняє такі умови:

$c_1)$ $0 \leq a_{-1} < 1$;

$c_2)$ $\forall j \geq -1 \,:\, a_j - a_{j+1} \geq a_{j+1} - a_{j+2}$;

$c_3)$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Доведемо, що

$$\psi(z) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n \neq 0. \tag{10}$$

Справді, якщо для деякого $m \geq -1$ виконується нерівність $a_m - a_{m+1} \leq 0$, то внаслідок умов $c_2), c_3)$ маємо $a_k = 0, \quad k \geq m$. Тому при $a_{-1} = 0$ або $a_0 = 0$ отримуємо $\psi(z) = 1$, при $a_0 > 0$ виконуються нерівності $1 - a_0 > 0, \quad a_0 - a_1 > 0$, а отже, правильність співвідношення (10) випливає з доведення леми 2 роботи [3].

Залишилось зауважити, що (10) суперечить рівності (9).

Наслідок 1 доведено.

Нехай y — періодична з періодом $m \in \mathbf{N}$ послідовність елементів простору H, тобто

$$\forall n \geq 0 \,:\, y_{n+m} = y_n.$$

Продовжимо її до періодичної на $\mathbf{Z}$ послідовності $\tilde{y} := \{y_n,\ n \in \mathbf{Z}\}$. Справедливим є такий наслідок.

Наслідок 2. *Припустимо, що виконується умова (2) та твердження $a_2)$ теореми 1. Тоді система*

$$u_{n+1} = -\sum_{k=0}^{\infty} A_k u_{n-k} + y_{n+1}, \quad n \in \mathbf{Z}, \tag{11}$$

має єдиний періодичний розв'язок $\tilde{u} = \{u_n,\ n \in \mathbf{Z}\}$ і для відповідного y єдиного обмеженого розв'язку x системи Вольтерри (1) справджується співвідношення

$$\|x_n - u_n\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Доведення. Якщо виконуються умови наслідку 2, то, узагальнюючи доведення теореми 1 з роботи [6], робимо висновок, що система (11) має єдиний періодичний розв'язок $\tilde{u}$ з компонентами

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k y_{n-k} + y_{n+1}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Оскільки $\sum_{n=0}^{\infty} \|Q_n\| < +\infty$, то, скориставшись рівностями (4), отримаємо

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| = \| \sum_{k=n+1}^{\infty} Q_k y_{n-k} \| \le \max_{1\le j\le m} \|y_j\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \|Q_k\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Наслідок 2 доведено.

3. Обмежені розв'язки нелінійної системи Вольтерри. Дослідимо питання про обмеженість розв'язку x нелінійної системи Вольтерри

$$x_0 = y_0, \qquad x_{n+1} = -\sum_{n=0}^{n} A_{n-k} g(x_k) + y_{n+1}, \quad n \ge 0, \tag{13}$$

у якій $g : H \to H$ — деяке відображення, y — обмежена послідовність елементів H. У подальшому використовуються такі умови:

$d_1)$ $g(\vec{0}) = \vec{0}$, а також існує така стала $c > 0$, що функція $h(x) := x - \dfrac{1}{c} g(x), \quad x \in H$, задовольняє умову Ліпшиця

$$\exists \mu \in (0;1) \quad \forall x, u \in H \ : \ \|h(x) - h(u)\| \le \frac{\mu}{\sqrt{p}} \|x - u\|;$$

$d_2)$ оператори $A_n, \ n \ge 0$, попарно комутують та є самоспряженими;

$d_3)$ $\forall j \ge 0 \ : \ I > A_j \ge A_{j+1} > O$;

$d_4)$ $\forall l \ge j \ge 0 \quad \forall m \ge 0 \ : \ A_j A_{j+m}^{-1} \ge A_l A_{l+m}^{-1}$;

$d_5)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\| < +\infty$.

Покладемо

$$\ell_\infty(H) := \left\{ x := \{x_n, \ n \ge 0\} \subset H \ \middle| \ |x|_\infty := \sup_{n \ge 0} \|x_n\| < +\infty \right\},$$

$(\ell_\infty(H), |.|_\infty)$ — комплексний банахів простір із покоординатними додаванням елементів та множенням на комплексне число.

Далі буде необхідною така лема.

Лема 1. *Припустимо, що виконуються умови $d_2)$–$d_5)$. Тоді для довільного $y \in \ell_\infty(H)$ лінійна система Вольтерри*

$$x_0 = y_0, \qquad x_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} c A_{n-k} x_k + y_{n+1}, \quad n \ge 0, \tag{14}$$

має єдиний розв'язок x у просторі $\ell_\infty(H)$. Для цього розв'язку справджується така оцінка:

$$|x - y|_\infty \le \sqrt{p} |y|_\infty. \tag{15}$$

Доведення. З умови d_2) випливає [7, с. 145], що знайдеться ортогональний базис $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ у просторі H, в якому матриці операторів $A_n,\ \ n \geq 0$, одночасно мають діагональний вигляд. Нехай матриця A_n має у цьому базисі на головній діагоналі числа $\{\lambda_n(1), \lambda_n(2), \dots, \lambda_n(p)\}$. Якщо, як звичайно, $y_n = y_n(1)e_1 + y_n(2)e_2 + \dots + y_n(p)e_p$ — розклад елемента $y_n \in H$ за розглядуваним базисом, то система Вольтерри (13) еквівалентна p числовим системам Вольтерри вигляду

$$x_0(\nu) = y_0(\nu), \quad x_{n+1}(\nu) = -\sum_{k=0}^{n} c\lambda_{n-k}(\nu)x_k(\nu) + y_{n+1}(\nu), \quad n \geq 0, \tag{16}$$

де $1 \leq \nu \leq p$.

Зафіксуємо $\nu,\quad 1 \leq \nu \leq p$. З умов $d_2) - d_5)$ випливає, що числова послідовність $\{\lambda_n(\nu),\ n \geq 0\}$ задовольняє умови леми 4 роботи [3], а отже, система (16) має єдиний обмежений розв'язок $x(\nu)$, причому

$$\|x(\nu) - y(\nu)\|_\infty \leq \gamma_{c,\nu}\|y(\nu)\|_\infty, \tag{17}$$

де $\gamma_{c,\nu} := 1 - (1 + c\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(\nu))^{-1}, \quad \|\cdot\|_\infty$ позначає норму в просторі ℓ_∞.

Якщо покласти $\gamma_c := \max\{\gamma_{c,\nu},\ 1 \leq \nu \leq p\}$, то з урахуванням нерівностей (17) неважко перевірити, що єдиний розв'язок $x = \{x_n = x_n(1)e_1 + x_n(2)e_2 + \dots + x_n(p)e_p,\ n \geq 0\}$ системи Вольтерри (14) є обмеженим і задовольняє нерівність

$$|x - y|_\infty \leq \gamma_c\sqrt{p}|y|_\infty, \tag{18}$$

а отже, виконується нерівність (15).

Лему 1 доведено.

Відповідь на питання про обмеженість розв'язків системи (13) містить така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови $d_1) - d_5)$. Тоді для довільного $y \in \ell_\infty(H)$ нелінійна система (13) має єдиний розв'язок x у просторі $\ell_\infty(H)$. Цей розв'язок задовольняє нерівність*

$$|x - y|_\infty \leq \frac{\mu + \sqrt{p}}{1 - \mu}\,|y|_\infty. \tag{19}$$

Доведення. Визначимо оператор $A : \ell_\infty(H) \to \ell_\infty(H)$, який довільному $u \in \ell_\infty(H)$ ставить у відповідність елемент Au з такими компонентами:

$$(Au)_0 = \vec{0}, \quad (Au)_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} A_{k-j}u_j, \quad k \geq 0.$$

Зауважимо, що A — лінійний неперервний оператор і система (14) еквівалентна операторному рівнянню $(\mathbf{I} + cA)x = y$, що розглядається у просторі $\ell_\infty(H)$. Тут $\mathbf{I}$ — одиничний оператор в $\ell_\infty(H)$.

Внаслідок леми 1 оператор $(\mathbf{I} + cA)$ має неперервний обернений оператор $(\mathbf{I} + cA)^{-1}$, причому згідно з (18)

$$\forall y \in \ell_\infty(H) \ : \ |(\mathbf{I} + cA)^{-1}y - y|_\infty \le \gamma_c \sqrt{p} |y|_\infty. \tag{20}$$

Використовуючи умову d_1) при $u = \vec{0}$, робимо висновок, що

$$\forall x \in H \ : \ \left\| \frac{1}{c} g(x) \right\| \le \left(\frac{\mu}{\sqrt{p}} + 1 \right) \|x\|.$$

Тому є коректно визначеним відображення $G \ : \ \ell_\infty(H) \to \ell_\infty(H)$, що задається таким чином:

$$Gu := \{(Gu)_k = g(u_k), \ k \ge 0\}, \quad u \in \ell_\infty(H).$$

За допомогою A та G система Вольтерри (13) записується у просторі $\ell_\infty(H)$ у вигляді $x = -AGx + y$. При фіксованому $y \in \ell_\infty(H)$ це рівняння еквівалентне рівнянню $x = T_y(x)$, де

$$T_y(x) := (\mathbf{I} + cA)^{-1} A(cx - Gx) + (\mathbf{I} + cA)^{-1} y, \quad x \in \ell_\infty(H). \tag{21}$$

Перевіримо, що T_y — стискаюче відображення в $\ell_\infty(H)$. Справді, для будь-яких x, u з простору $\ell_\infty(H)$ з урахуванням (18) та умови d_1) маємо

$$\begin{aligned} |T_y(x) - T_y(u)|_\infty = & \left| x - u - \frac{1}{c}(Gx - Gu) - \right. \\ & - \left. (\mathbf{I} + cA)^{-1} \left(x - u - \frac{1}{c}(Gx - Gu) \right) \right|_\infty \le \\ & \le \gamma_c \sqrt{p} \left| x - u - \frac{1}{c}(Gx - Gu) \right|_\infty = \\ & = \gamma_c \sqrt{p} \sup_{n \ge 0} \|h(x_n) - h(u_n)\| \le \gamma_c \mu |x - u|_\infty. \end{aligned} \tag{22}$$

Покладемо $B_y := \big\{ u \in \ell_\infty(H) \,\big|\, |u - y|_\infty \le R|y|_\infty \big\}$, де $R := (\mu + \sqrt{p})(1 - \mu)^{-1}$, і перевіримо, що $T_y(B_y) \subset B_y$. Справді, внаслідок d_1), (20) – (22), для кожного $u \in B_y$ справджується ланцюг нерівностей

$$\begin{aligned} |T_y(u) - y|_\infty \le |T_y(u) - T_y(y)|_\infty + \left| \left(y - \frac{1}{c} Gy \right) - (\mathbf{I} + cA)^{-1} \left(y - \frac{1}{c} Gy \right) \right|_\infty + \\ + \ |(\mathbf{I} + cA)^{-1} y - y|_\infty \le \gamma_c (\mu R + \mu + \sqrt{p}) |y|_\infty \le R |y|_\infty, \end{aligned}$$

оскільки числа μ та γ_c належать $(0; 1)$, а отже, виконується нерівність $R \ge \gamma_c (\mu + \sqrt{p})(1 - \gamma_c \mu)^{-1}$.

Таким чином, до відображень $T_y : \ell_\infty(H) \to \ell_\infty(H)$ та $T_y : B_y \to B_y$ можна застосувати принцип стискаючих відображень Банаха, згідно з яким рівняння $x = T_y(x)$ має єдиний розв'язок у просторі $\ell_\infty(H)$, причому цей розв'язок задовольняє нерівність (19).

Теорему 2 доведено.

1. *Колмановский В. Б.* О предельной периодичности решений некоторых систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 5. — С. 36 – 43.
2. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. — М.: Высш. шк., 1982. — 271 с.
3. *Городній М. Ф.* Про обмежені розв'язки нелінійної системи Вольтерри // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 2. — С. 149 – 155.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.
5. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 587 с.
6. *Городний М. Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. — 1991. — **43**, № 1. — С. 41 – 46.
7. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука, 1971. — 272 с.

Одержано 20.09.2002