УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ СИММЕТРИЙНЫХ СВОЙСТВАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ*

А. Н. Ронто

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: ar@imath.kiev.ua

Н. И. Ронто

Мишкольц. ун-т, Ин-т математики
Hungary, H-3515, Miskolc-Egyetemváros
e-mail: matronto@gold.uni-miskolc.hu

We establish conditions under which a system of nonlinear nonautonomous ordinary differential equations has a set of solutions periodic with one and the same period and possess certain symmetry properties.

Встановлено умови, при виконанні яких система нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь має деяку множину розв'язків, які є періодичними з одним і тим самим періодом та мають певні симетрійні властивості.

1. Введение. В настоящей работе изучается класс систем нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих „достаточно богатый" запас периодических решений, которые, кроме того, удовлетворяют определенным условиям симметрии. Рассматриваемые здесь симметрийные свойства (см. определение 3.1) близки к изучавшимся в [1], но, вообще говоря, не совпадают с ними; по этому поводу см. замечание 7.1. Полученная в п. 8 теорема содержит, в частности, теорему 6 из [2, с. 326] (см. также [3]).

Статья построена следующим образом. В пп. 2, 3 дана постановка задачи, описаны рассматриваемые далее симметрийные свойства, а также приведены некоторые утверждения, характеризующие упомянутые свойства. Содержание п. 4 составляет перечень технических условий, используемых в дальнейшем. В пп. 5 – 7 установлен ряд вспомогательных утверждений (некоторые из них, вероятно, окажутся полезными и в других задачах). Наконец, в п. 8 содержится основной результат работы — теорема 8.1 — и приведены некоторые ее следствия.

2. Постановка задачи. Будем рассматривать задачу о T-периодических решениях системы n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x'(t) = f\left(t, x(t)\right), \qquad -\infty < t < \infty, \tag{2.1}$$

в которой $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ — некоторая функция, периодическая по первому аргументу с периодом T.

* Выполнена при частичной поддержке фонда OTKA (грант № T 031961).

Под решением задачи о T-периодических решениях системы (2.1) понимаем непрерывно дифференцируемый элемент банахова пространства C_T^n непрерывных вектор-функций $(-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^n$, периодических с периодом T. Пространство непрерывных n-мерных вектор-функций на $(-\infty, \infty)$ будем обозначать символом C^n.

3. Симметрийные свойства периодических функций. Нас интересуют те свойства дифференциальных уравнений системы (2.1), при которых T-периодические решения этой системы являются в том или ином смысле „симметричными". Здесь мы ограничимся рассмотрением следующего симметрийного свойства.

Определение 3.1. *Будем говорить, что функция $x \in C_T^n$ при некоторых скаляре τ и невырожденной матрице $E \in GL_n(\mathbb{R})$ имеет свойство (τ, E), если при всех вещественных t справедливо равенство*

$$x(t) = Ex\,(-t-\tau)\,. \tag{3.1}$$

Множество функций из C_T^n, имеющих свойство (τ, E), будем обозначать символом $C_T^n\,(\tau, E)$:

$$C_T^n\,(\tau, E) := \Big\{ x \in C_T^n \mid \text{для всех } t \in (-\infty, \infty) \text{ выполнено (3.1)} \Big\}. \tag{3.2}$$

Очевидна следующая лемма.

Лемма 3.1. *При произвольных точке $\tau \in (-\infty, \infty)$ и невырожденной n-мерной матрице E множество $C_T^n\,(\tau, E)$ образует замкнутое линейное подпространство в C_T^n.*

Замечание 3.1. Из (3.1) ясно, что для $x \in C_T^n(\tau, E)$ векторы

$$x(kT),$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, являются неподвижными для линейного оператора E.

Свойство, о котором идет речь в определении 3.1, можно трактовать как некоторую геометрическую симметрию графика рассматриваемой функции. В частности, при $E \in \{-1_n, 1_n\}$, где символом 1_n обозначена единичная матрица размерности n, определением 3.1 описываются весьма естественные свойства τ-четности и τ-нечетности, понимаемые в следующем смысле.

Определение 3.2. *Функцию $x \in C_T^n$ будем называть τ-нечетной (соответственно, τ-четной), если при каждом t из $(-\infty, \infty)$ равенство (3.1) выполняется с $E = -1_n$ (соответственно, $E = 1_n$).*

Ясно, что обычные понятия четности и нечетности векторнозначной функции скалярного аргумента получаются непосредственно из определения 3.2 при $\tau = 0$.

Замечание 3.2. Свойства, подобные условиям τ-четности и τ-нечетности, возникают в теории рядов Фурье [4]. Подобные понятия использованы, например, в [5].

Примеры τ-четных и τ-нечетных функций легко строить на основании следующего утверждения.

Предложение 3.1. *Если функция $x \in C^n_T$ четная (соответственно, нечетная), то при произвольном вещественном τ построенная по ней функция*

$$(-\infty, \infty) \ni t \longmapsto x\Big(t + \frac{\tau}{2}\Big) \tag{3.3}$$

является τ-четной (соответственно, τ-нечетной).

Предложение 3.1 легко доказывается на основании следствия 3.1 из приводимого ниже предложения 3.2.

Пример 3.1. Функция

$$u(t) := \cos\Big(t + \frac{\pi}{4}\Big) - \sin\Big(3\,t + \frac{\pi}{4}\Big), \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{3.4}$$

является $\dfrac{\pi}{2}$-четной.

Действительно, для четной функции x, определенной формулой

$$x(t) := \cos t + \cos(3\,t), \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{3.5}$$

соответствующая функция (3.3) задается равенством (3.4). Остается применить предложение 3.1 для $T = 2\pi$ и $\tau = \dfrac{\pi}{2}$.

На рис. 1 построен график $\dfrac{\pi}{2}$-четной функции (3.4), полученной из четной функции (3.5) сдвигом аргумента на $\dfrac{\pi}{4}$ (символы $\diamond$).

Пример 3.2. Функция

$$u(t) := \sin\Big(t + \frac{\pi}{4}\Big) - \cos\Big(3\,t + \frac{\pi}{4}\Big) - \sin\Big(5\,t + \frac{\pi}{4}\Big), \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{3.6}$$

является $\dfrac{\pi}{2}$-нечетной.

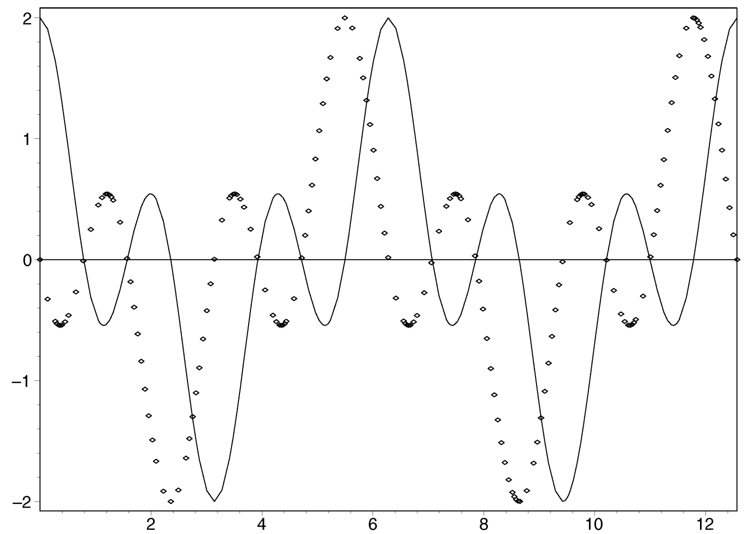

Рис. 1. Функции (3.4) и (3.5).

Для нечетной функции x, определенной формулой

$$x(t) := \sin t - \sin(3\,t) + \sin(5\,t), \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{3.7}$$

соответствующая функция (3.3) задается равенством (3.6). Поэтому из предложения 3.1 при $T = 2\pi$ и $\tau = \dfrac{\pi}{2}$ вытекает $\dfrac{\pi}{2}$-нечетность функции (3.6).

На рис. 2 изображен график $\dfrac{\pi}{2}$-нечетной функции (3.6), полученной из четной функции (3.7) сдвигом аргумента на $\dfrac{\pi}{4}$ (символы $\diamond$).

Замечание 3.3. Предложение 3.1 в определенном смысле обратимо (см. приводимое ниже следствие 3.1).

Оказывается, функции со свойством (τ, E) можно легко конструировать из функций, имеющих свойство $(0, E)$, и наоборот. Этот факт вытекает их следующего предложения.

Предложение 3.2. *При произвольных вещественных σ и τ справедливо включение*

$$\Sigma_{-\frac{\tau}{2}} C^n_T(\sigma, E) \subset C^n_T(\sigma + \tau, E), \tag{3.8}$$

где символом Σ_h обозначен действующий в C^n_T оператор сдвига на h,

$$\big[\Sigma_h x\big](t) := x(t - h), \qquad t \in (-\infty, \infty). \tag{3.9}$$

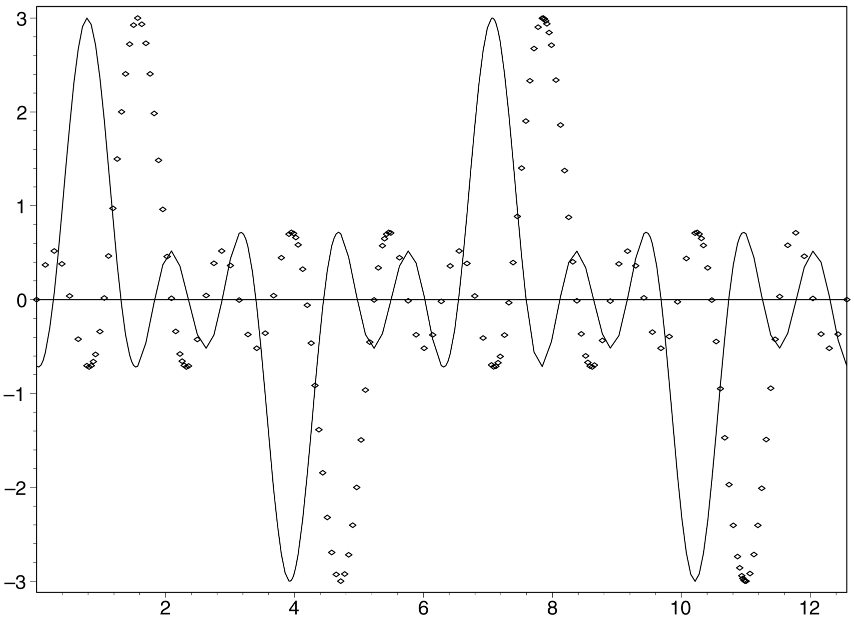

Рис. 2. Функции (3.6) и (3.7).

Доказательство. Пусть некоторая функция x принадлежит $C_T^n(\sigma, E)$ и, следовательно, согласно определению 3.1, удовлетворяет условию

$$x(t) = Ex(-t-\sigma), \qquad t \in (-\infty, \infty). \tag{3.10}$$

Положим

$$x_\tau := \Sigma_{-\frac{\tau}{2}} x. \tag{3.11}$$

Согласно определению (3.9) оператора $\Sigma_{-\frac{\tau}{2}}$, для таким образом заданной функции x_τ имеем

$$x_\tau(-t-\sigma-\tau) = x\Big(-t-\sigma-\tau+\frac{\tau}{2}\Big) = x\Big(-t-\sigma-\frac{\tau}{2}\Big) =$$
$$= x\Big(-\Big[t+\frac{\tau}{2}\Big]-\sigma\Big),$$

откуда в силу (3.10) вытекает соотношение

$$Ex_\tau(-t-\tau-\sigma) = x\Big(t+\frac{\tau}{2}\Big), \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

Согласно (3.11) последнее равенство можно записать в виде

$$Ex_\tau(-t-\tau-\sigma) = x_\tau(t), \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

откуда с учетом определения 3.2 заключаем, что x_τ принадлежит $C_T^n(\tau+\sigma, E)$. Поскольку x до сих пор была произвольной функцией, принадлежащей $C_T^n(\sigma, E)$, этим и доказано требуемое включение (3.8).

Следствие 3.1. *Если функция $x \in C_T^n$ имеет свойство $(0, E)$, то при любом вещественном τ построенная по ней функция*

$$(-\infty, \infty) \ni t \longmapsto x\Big(t + \frac{\tau}{2}\Big) \tag{3.12}$$

имеет свойство (τ, E). Обратно, если некоторая функция $x \in C_T^n$ имеет свойство (τ, E), то соответствующая функция

$$(-\infty, \infty) \ni t \longmapsto x\Big(t - \frac{\tau}{2}\Big)$$

имеет свойство $(0, E)$.

Доказательство. Согласно предложению 3.2 имеет место включение (3.8), которое при $\sigma = 0$ принимает вид

$$\Sigma_{-\frac{\tau}{2}} C_T^n(0, E) \subset C_T^n(\tau, E).$$

Это и означает, что при любой функции x из $C_T^n(0, E)$ соответствующая функция (3.12) имеет свойство (τ, E), т. е. справедливо первое из сформулированных утверждений.

С другой стороны, при $\sigma = -\tau$ включение (3.8) принимает вид

$$\Sigma_{-\frac{\tau}{2}} C_T^n(-\tau, E) \subset C_T^n(0, E),$$

откуда вытекает, что при $x \in C_T^n(\tau, E)$ функция (3.12) принадлежит $C_T^n(0, E)$. Заменяя здесь τ на $-\tau$, получаем второе утверждение следствия.

Утверждения следствия 3.1 можно схематически изобразить в виде диаграммы

$$C_T^n(\tau, E) \xrightarrow{\Sigma_{\frac{\tau}{2}}} C_T^n(0, E) \xrightarrow{\Sigma_{-\frac{\tau}{2}}} C_T^n(\tau, E).$$

Иногда подобную описанной выше идею можно применять для построения функций, имеющих свойство (τ, E), исходя из четных функций. А именно, справедливо следующее предложение.

Предложение 3.3. *Если $x \in C_T^n$ — четная функция, а E — невырожденная n-мерная матрица, то для произвольной n-мерной квадратной матрицы G, столбцы которой принадлежат ядру матрицы*

$$1_n - E,$$

функция

$$(-\infty, \infty) \ni t \longmapsto Gx\Big(t + \frac{\tau}{2}\Big) \tag{3.13}$$

имеет свойство (τ, E).

Доказательство. Для определенной формулой (3.13) функции

$$u(t) := Gx\Big(t + \frac{\tau}{2}\Big)$$

имеем

$$Eu(-t-\tau) = EGx\Big(-t + \frac{\tau}{2} - \tau\Big) = EGx\Big(-t - \frac{\tau}{2}\Big). \tag{3.14}$$

Поскольку, по условию, матрица G такова, что

$$EG = G,$$

в случае четности функции x из (3.14) для любого $t \in (-\infty, \infty)$ вытекает равенство

$$Eu(-t-\tau) = u(t),$$

что означает справедливость доказываемого утверждения.

Замечание 3.4. В отличие от предложения 3.2, описанный в предложении 3.3 прием, однако, эффективен лишь тогда, когда

$$\det(1_n - E) = 0,$$

ибо в противном случае формула (3.13) определяет функцию, тождественно равную нулю.

Дальнейшие сведения о строении функций, имеющих свойство (τ, E), дает следующее утверждение.

Предложение 3.4. *Какова бы ни была имеющая свойство (τ, E) функция $x \in C_T^n$, ее значение $x(t)$ в произвольной точке $t \in (\infty, \infty)$ принадлежит ядру матрицы*

$$1_n - E^2.$$

Доказательство. Действительно, пусть x принадлежит $C_T^n(\tau, E)$. Согласно определению 3.1 это означает, что при всех вещественных t выполнено равенство (3.1), откуда следует

$$x(-t-\tau) = Ex(-(-t-\tau)-\tau) = Ex(t), \qquad t \in (-\infty, \infty). \tag{3.15}$$

Подставляя (3.15) в (3.1), приходим к равенству

$$x(t) = E^2 x(t), \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{3.16}$$

т. е. $x(t) \in \ker\big(1_n - E^2\big)$ для всех $t \in (-\infty, \infty)$, что и требовалось доказать.

Замечание 3.5. Особое свойство (3.15) функций из $C_T^n(\tau, E)$, о котором идет речь в предложении 3.4, очевидно, отсутствует при выполнении для E равенства

$$E^2 = 1_n. \tag{3.17}$$

Из предложения 3.4 вытекает следующая характеризация свойства (τ, E) для скалярных функций.

Следствие 3.2. *Какова бы ни была точка $\tau \in (-\infty, \infty)$, множество $C_T^1(\tau, E)$ при $E \neq \neq 1$ содержит только функцию, тождественно равную нулю, а в случае, когда $E = 1$, совпадает со множеством τ-четных функций.*

Доказательство. Из предложения 3.4 следует, что для любой имеющей свойство (τ, E) скалярной функции x выполнено тождество (3.16). Поскольку в данном случае $E \in (-\infty, \infty)$, отсюда следует, что либо $E \neq 1$ и x тождественно равна 0, либо $E = 1$ и x является τ-четной в смысле определения (3.2).

Из следствия 3.2 вытекает, что свойство (τ, E) при E, отличных от 1_n, имеет существенно многомерную природу.

Пример 3.3. Пусть τ — некоторое фиксированное вещественное число, а $\theta : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ — произвольным образом заданная функция, при некотором $\sigma \in \{-1, 1\}$ удовлетворяющая условию

$$\theta(t) = \sigma\theta(-t - \tau), \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{3.18}$$

т. е. являющаяся либо τ-четной ($\sigma = 1$), либо τ-нечетной ($\sigma = -1$). Зафиксируем вещественные α, β и γ, для которых $\alpha\beta \neq 0$, и построим (очевидно, невырожденную) матрицу

$$E = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Справедливы следующие утверждения:

1. Для любого вещественного μ функция

$$u(t) = \mu\theta(t) \begin{pmatrix} \gamma(\sigma - \alpha)^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{3.20}$$

принадлежит классу $C_T^2(\tau, E)$ с матрицей E, заданной равенством

$$E = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

при $\alpha \neq \sigma$.

2. Для произвольных вещественных λ и μ функция

$$u(t) = \theta(t) \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{3.22}$$

принадлежит классу $C_T^2(\tau, E)$, если матрица E задана формулой

$$E = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

3. Для произвольных вещественных λ функция

$$u(t) = \theta(t) \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

принадлежит классу $C_T^2(\tau, E)$, если матрица (3.19) имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} \sigma & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

при $\beta \neq \sigma$.

Действительно, из предложения 3.4 непосредственно вытекает, что функции u класса $C_T^2(\tau, E)$ принимают значения в подпространстве меньшей размерности. Размерность эта в данном случае равна либо 0, либо 1, и, значит, любая такая функция допускает представление в виде (3.22), где $\theta : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ — непрерывная T-периодическая функция, а λ и μ — некоторые числа.

Согласно определению 3.1, функция (3.22) имеет свойство (τ, E) тогда и только тогда, когда при всех $t \in (-\infty, \infty)$

$$\theta(t) \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \theta(-t - \tau) \begin{pmatrix} \alpha\lambda + \gamma\mu \\ \beta\mu \end{pmatrix}.$$

Следовательно, анализируя систему линейных алгебраических уравнений

$$(\sigma - \alpha)\lambda = \gamma\mu,$$

$$(\sigma - \beta)\mu = 0$$

и учитывая предположение (3.18) относительно функции θ, приходим к приведенным выше выводам.

Пример 3.4. Функция вида

$$u(t) = \begin{bmatrix} -\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{1}{3}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{3.23}$$

имеет свойство $\left(\frac{\pi}{2}, E\right)$ при

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Легко видеть, что описанная в примере 3.3 функция (3.20) примет вид (3.23), если в качестве θ выбрать $\frac{\pi}{2}$-четную функцию (3.4) из примера 3.1:

$$\theta(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(3\,t + \frac{\pi}{4}\right), \qquad t \in (-\infty, \infty). \tag{3.25}$$

Матрица же (3.24) совпадает с (3.21) при $\sigma = 1$, $\alpha = 2$ и $\gamma = 3$.

На рис. 3 построены графики первой (сплошная линия) и второй (символы $\diamond$) компонент функции (3.23), а также график $\frac{\pi}{2}$-четной функции θ, заданной формулой (3.25) (символы +).

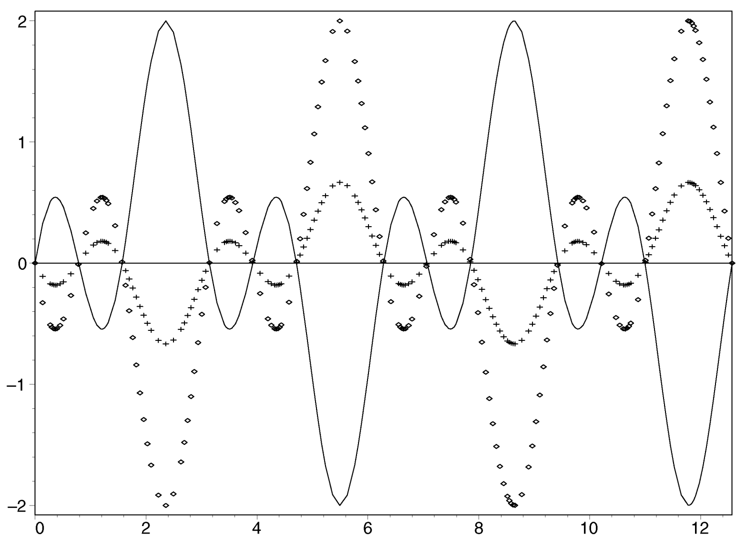

Рис. 3. Компоненты функции (3.23) и функция (3.25).

4. Предположения. Для реализации рассматриваемого метода на функцию f в правой части (2.1) потребуется наложить некоторые дополнительные ограничения технического характера. А именно, предположим, что:

i) функция $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ периодическая с периодом T по первому аргументу и непрерывна на множестве $\mathbb{R} \times D$, где D — замыкание некоторой ограниченной области в $\mathbb{R}^n$;

ii) найдется такая матричнозначная функция $K : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ с неотрицательными интегрируемыми элементами, что

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K(t)|x_1 - x_2| \tag{4.1}$$

при всех $t \in (-\infty, \infty)$ и $\{x_1, x_2\} \subset D$;

iii) существует такой неотрицательный вектор $M \in \mathbb{R}^n$, что

$$\max_{(t,x)\in(-\infty,\infty)\times D} f(t, x) - \min_{(t,x)\in(-\infty,\infty)\times D} f(t, x) \leq M;$$

iv) множество D_M, состоящее из всех векторов $x \in \mathbb{R}^n$, содержащихся в D вместе со своей замкнутой TM-окрестностью, непусто.

Замечание 4.1. Здесь и ниже знак неравенства, понятие окрестности и символы $\max$, $\min$ понимаются в покоординатном смысле.

5. Вспомогательные утверждения. Оператор $\boldsymbol{H_\sigma}$. Задавшись некоторым $\sigma \in (-\infty, \infty)$, для любого u из C_T^n положим

$$(H_\sigma u)(t) = \left(1 - \frac{t-\sigma}{T}\right) \int\limits_\sigma^t u(s)ds + \frac{t-\sigma}{T} \int\limits_t^{T+\sigma} u(s)ds, \qquad t \in [\sigma, T+\sigma]. \tag{5.1}$$

Замечание 5.1. Легко видеть, что, согласно (5.1), при всех u из C_T^n

$$(H_\sigma u)(\sigma) = 0, \qquad (H_\sigma u)(T+\sigma) = 0$$

независимо от значения $\sigma \in (-\infty, \infty)$. Отсюда, в частности, следует, что H_σ можно рассматривать как оператор из C_T^n в C_T^n.

Положим

$$R_{K,T} := r\left(H_\sigma K\right), \tag{5.2}$$

где K в правой части равенства означает оператор умножения на обозначаемую той же буквой непрерывную матричнозначную функцию $K : (-\infty, \infty) \to GL_n(\mathbb{R})$:

$$C_T^n \ni u(\cdot) \longmapsto K(\cdot)u(\cdot).$$

Символом $r(A)$, как обычно, обозначаем спектральный радиус линейного ограниченного оператора A. Из замечания 5.1 ясно, что композицию $H_\sigma K$ можно рассматривать как линейный оператор, преобразующий пространство C_T^n в свою часть.

Лемма 5.1. *Какова бы ни была интегрируемая матричнозначная функция $K : \mathbb{R} \to$ $\to GL_n(\mathbb{R})$, число $R_{K,T}$ не зависит от значения σ в (5.2). Кроме того,*

$$R_{K,T} = 1/\min\left\{|\mu| : \det\left(\frac{T}{\mu}1_n - \Omega_{\mu K,0}(T)\int\limits_0^T s\Omega^{-1}_{\mu K,0}(s)ds\right) = 0\right\}. \tag{5.3}$$

Здесь в приводимом ниже доказательстве символом $\Omega_{P,\sigma}$ для $P : [\sigma, T+\sigma] \to GL_n(\mathbb{R})$ обозначается нормированная в точке σ фундаментальная матрица линейной однородной дифференциальной системы

$$x'(t) = \left(1 - 2\frac{t-\sigma}{T}\right) P(t)x(t), \qquad t \in [\sigma, T+\sigma].$$

Доказательство леммы 5.1. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда не все элементы матричнозначной функции K тождественно равны нулю.

Будучи компактным, линейный интегральный оператор $H_\sigma K : C_T^n \to C_T^n$ имеет только точечный спектр. Пусть, следовательно, λ — ненулевое собственное значение $H_\sigma K$, а $u \in C_T^n$ — соответствующая собственная функция.

Согласно (5.1) для $t \in [\sigma, T+\sigma]$ имеем

$$\left(1 - \frac{t-\sigma}{T}\right) \int_\sigma^t K(s)u(s)ds + \frac{t-\sigma}{T} \int_t^{T+\sigma} K(s)u(s)ds = \lambda u(t). \tag{5.4}$$

Если теперь положить

$$y(t) = \int_\sigma^t K(s)u(s)ds, \qquad t \in [\sigma, T+\sigma], \tag{5.5}$$

то из (5.4) находим, что для всех t из $[\sigma, T+\sigma]$

$$\left(1 - \frac{t-\sigma}{T}\right) K(t)y(t) + \frac{t-\sigma}{T} K(t)\big[y(T+\sigma) - y(t)\big] = \lambda y'(t). \tag{5.6}$$

Таким образом, если u — собственная функция оператора $H_\sigma K$, соответствующая собственному значению λ, то функция (5.5) необходимо удовлетворяет начальной задаче

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{1}{\lambda}\left(1 - 2\frac{t-\sigma}{T}\right) K(t)y(t) + \frac{t-\sigma}{\lambda T} K(t)y(T+\sigma), \quad t \in [\sigma, T+\sigma], \\ y(\sigma) &= 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Решение этой задачи, как легко проверить, удовлетворяет функциональному уравнению

$$y(t) = \frac{1}{\lambda T} \Omega_{\frac{1}{\lambda}K,\sigma}(t) \int_\sigma^t \Omega^{-1}_{\frac{1}{\lambda}K,\sigma}(s)(s-\sigma)ds \cdot y(T+\sigma), \qquad t \in [\sigma, T+\sigma]. \tag{5.8}$$

Напомним, что матричнозначная функция $\Omega_{\frac{1}{\lambda}K,\sigma} : [\sigma, T+\sigma] \to GL_n(\mathbb{R})$ определена перед началом настоящего доказательства, а $\Omega^{-1}_{\frac{1}{\lambda}K,\sigma}$ обозначает матрицу, обратную к $\Omega_{\frac{1}{\lambda}K,\sigma}$.

Из (5.8), в частности, вытекает, что вектор

$$c = y(T+\sigma) \tag{5.9}$$

является решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\left[\lambda 1_n - \frac{1}{T} \Omega_{\frac{1}{\lambda}K,\sigma}(T+\sigma) \int_\sigma^{T+\sigma} \Omega^{-1}_{\frac{1}{\lambda}K,\sigma}(s)(s-\sigma)ds\right] c = 0. \tag{5.10}$$

Решение (5.9) системы (5.10) нетривиально, поскольку в противном случае из (5.7) и (5.5) последует тривиальность собственной функции u оператора $H_\sigma K$, что абсурдно. Таким образом, при данном λ матрица $B_{\frac{1}{\lambda}K,\sigma}$, где

$$B_{P,\sigma} := \lambda 1_n - \frac{1}{T}\Omega_{P,\sigma}(T+\sigma)\int\limits_{\sigma}^{T+\sigma}\Omega_{P,\sigma}^{-1}(s)(s-\sigma)ds, \tag{5.11}$$

вырождена. Следовательно,

$$R_{K,T} \leq \max\Big\{|\lambda| : \det B_{\frac{1}{\lambda}K,\sigma} = 0\Big\}. \tag{5.12}$$

С другой стороны, если предположить, что при некотором ненулевом λ

$$\det B_{\frac{1}{\lambda}K,\sigma} = 0,$$

то существует нетривиальное решение c линейной алгебраической системы (5.10). Тогда, как легко видеть, единственное решение y начальной задачи

$$y'(t) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - 2\frac{t-\sigma}{T}\right)K(t)y(t) + \frac{t-\sigma}{\lambda T}K(t)c, \qquad t \in [\sigma, T+\sigma], \tag{5.13}$$

$$y(\sigma) = 0 \tag{5.14}$$

удовлетворяет уравнению (5.8), откуда вытекает справедливость равенства (5.9). Следовательно, функция y является также решением задачи (5.7).

Положим

$$u(t) := \frac{1}{\lambda}\left(1 - 2\frac{t-\sigma}{T}\right)y(t) + \frac{t-\sigma}{\lambda T}c, \qquad t \in [\sigma, T+\sigma]. \tag{5.15}$$

Из (5.13) и (5.15) очевидно, что

$$y'(t) = K(t)u(t), \qquad t \in [\sigma, T+\sigma],$$

и, значит, в силу (5.14), справедливо равенство (5.5).

Таким образом, мы установили существование нетривиальной функции $u \in C_T^n$, соответствующая которой функция (5.5) при всех t из $[\sigma, T+\sigma]$ удовлетворяет уравнению (5.6). Интегрируя выражения в обеих частях (5.6) от σ до $t \in [\sigma, T+\sigma]$ и принимая во внимание (5.14), получаем, что для u выполнено соотношение (5.4), т. е. u является собственной функцией оператора $H_\sigma K$ с собственным значением λ. Следовательно,

$$R_{K,T} \geq \max\Big\{|\lambda| : \det B_{\frac{1}{\lambda}K,\sigma} = 0\Big\}. \tag{5.16}$$

Объединяя, наконец, (5.12) и (5.16), приходим к равенству

$$R_{K,T} = \max\Big\{|\lambda| : \det B_{\frac{1}{\lambda}K,\sigma} = 0\Big\}. \tag{5.17}$$

Покажем теперь, что величина $R_{K,T}$ не зависит от σ и, таким образом, выбранное нами обозначение (5.2) оправдано.

Действительно, поскольку, согласно известному свойству матрицанта,

$$\Omega_{P,\sigma}(t) = \Omega_{P,0}(t)\Omega_{P,\sigma}(0),$$

имеем

$$B_{P,\sigma} = \lambda 1_n - \frac{1}{T}\Omega_{P,\sigma}(T+\sigma)\int\limits_{\sigma}^{T+\sigma}\Omega_{P,\sigma}^{-1}(s)(s-\sigma)ds =$$

$$= \lambda 1_n - \frac{1}{T}\Omega_{P,0}(T+\sigma)\Omega_{P,\sigma}(0)\int\limits_{0}^{T}s\Omega_{P,\sigma}^{-1}(0)\Omega_{P,0}^{-1}(s+\sigma)ds =$$

$$= \lambda 1_n - \frac{1}{T}\Omega_{P,0}(T+\sigma)\int\limits_{0}^{T}s\Omega_{P,0}^{-1}(s+\sigma)ds. \tag{5.18}$$

Но так как

$$\Omega_0(s+\sigma) = \Omega_0(s)\Omega_0(\sigma),$$

из (5.18) получаем

$$B_{P,\sigma} = \lambda 1_n - \frac{1}{T}\Omega_{P,0}(T)\Omega_0(\sigma)\int\limits_{0}^{T}s\Omega_0^{-1}(\sigma)\Omega_{P,0}^{-1}(s)ds =$$

$$= \lambda 1_n - \frac{1}{T}\Omega_{P,0}(T)\int\limits_{0}^{T}s\Omega_{P,0}^{-1}(s)ds.$$

Из последнего равенства, в частности, следует, что матрица $B_{K\lambda^{-1},\sigma}$ на самом деле не зависит от σ. В силу равенства (5.17) это означает, что то же свойство имеет и число (5.2).

Наконец, полагая в (5.17) $\sigma = 0$, приходим к равенству (5.3), что и завершает доказательство леммы.

Следствие 5.1. *Пусть матричнозначная функция $K : (-\infty, \infty) \to GL_n(\mathbb{R})$ имеет вид*

$$K(t) = \operatorname{diag}\bigl(k_1(t), k_2(t), \ldots, k_n(t)\bigr), \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

где k_1, k_2, $\ldots$, k_n — некоторые непрерывные скалярные функции на $(-\infty, \infty)$. Тогда число $1/R_{K,T}$ равно наименьшему из модулей тех значений μ, для которых

$$\frac{T}{\mu} = \int_0^T s\exp\left[\mu\int\limits_{s}^{T}\left(1 - \frac{2\xi}{T}\right)k_\nu(\xi)d\xi\right]ds$$

хотя бы при одном значении $\nu \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что в рассматриваемом случае $\Omega_{\mu K,0}(t)$ является диагональной матрицей с компонентами

$$\exp\left[\mu \int\limits_0^t \left(1 - \frac{2\xi}{T}\right) k_\nu(\xi) d\xi\right], \tag{5.19}$$

где $\nu \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Применяя лемму 5.1 и подставляя функции (5.19) в выражения для компонент $\Omega_{\mu K,0}(t)$ в (5.3), получаем требуемое утверждение.

Замечание 5.1. С помощью известной теоремы М. Г. Крейна и М. А. Рутмана о максимальном собственном значении вполне непрерывного положительного оператора (см. теорему 6.2 в [7]) можно показать, что в формуле (5.3) можно ограничиться рассмотрением положительных действительных μ.

Следствие 5.2. *Для любой постоянной квадратной матрицы K размерности n справедливо соотношение*

$$R_{K,T} \approx \frac{Tr(K)}{3,4161}.$$

Утверждение следствия 5.2 известно, например, из [6].

6. Последовательные приближения и их сходимость. Зафиксировав некоторые $\sigma \in \in (-\infty, \infty)$ и $z \in D_M$, введем в рассмотрение последовательность функций $\{x_m(\cdot, z) \mid m \geq 0\}$ с помощью рекуррентной формулы

$$x_{m+1}(t, z) = z + \int\limits_\sigma^t f\left(s, x_m(s, z)\right) ds - \frac{t - \sigma}{T} \int\limits_\sigma^{T+\sigma} f\left(s, x_m(s, z)\right) ds, \tag{6.1}$$

где

$$x_0(t, z) = z$$

для всех $t \in [\sigma, T + \sigma]$.

Очевидно, что все члены определенной таким образом последовательности являются элементами пространства C_T^n.

Лемма 6.1. *Для всех $x \in C_T^n$ и $t \in [\sigma, T + \sigma]$ имеет место оценка*

$$\left| \int\limits_\sigma^t \left[x(s) - \frac{1}{T} \int\limits_\sigma^{T+\sigma} x(\xi) d\xi\right] ds \right| \leq \frac{1}{2}\alpha(t - \sigma)\Big[\max_{s \in (-\infty,\infty)} x(s) - \min_{s \in (-\infty,\infty)} x(s)\Big], \tag{6.2}$$

где

$$\alpha(t) := 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right), \qquad t \in [0, T]. \tag{6.3}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение из левой части неравенства (6.2). Учитывая, что для y из C_T^n

$$\int\limits_{\sigma}^{T+\sigma} y(s)ds = \int\limits_{0}^{T} y(s)ds,$$

и выполняя в каждом из интегралов замену переменной по формуле

$$\eta = s - \sigma,$$

получаем

$$\int\limits_{\sigma}^{t} \left[x(s) - \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} x(\xi)d\xi \right] ds = \int\limits_{0}^{t-\sigma} \left[x(\xi+\sigma) - \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} x(\eta+\sigma)d\eta \right] d\xi.$$

Поскольку, согласно лемме 2.3 из [2], для всех $x \in C_T^n$ и $t \in (-\infty,\infty)$ выполняется оценка

$$\left| \int\limits_{0}^{t} \left[x(s) - \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} x(\xi)d\xi \right] ds \right| \leq \frac{1}{2}\alpha(t)\Big[\max_{s\in(-\infty,\infty)} x(s) - \min_{s\in(-\infty,\infty)} x(s)\Big],$$

где скалярная функция α определяется равенством (6.3), отсюда для $t \in [\sigma, T+\sigma]$ имеем

$$\left| \int\limits_{\sigma}^{t} \left[x(s) - \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} x(\sigma)d\xi \right] ds \right| \leq \frac{1}{2}\alpha(t-\sigma)\Big[\max_{\xi\in(-\infty,\infty)} x(\xi+\sigma) - \min_{\xi\in(-\infty,\infty)} x(\xi+\sigma)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha(t-\sigma)\Big[\max_{\xi\in(-\infty,\infty)} x(\xi) - \min_{\xi\in(-\infty,\infty)} x(\xi)\Big],$$

что совпадает с требуемой оценкой (6.2). Лемма доказана.

Неравенство и знаки $\max$, $\min$ здесь, как и везде в этой статье, понимаются в смысле замечания 4.1.

Лемма 6.2. *Для произвольного $z \in D_M$ значения всех функций последовательности (6.1) принадлежат D.*

Доказательство. Утверждение леммы 6.2 устанавливается аналогично изложенному в § 2, гл. 1 [2]. Для этого нужно использовать предположения i), iii) и iv).

Зафиксировав некоторое произвольное σ из $(-\infty,\infty)$, введем в рассмотрение отображение $\Lambda_\sigma : C_T^n \to C_T^n$, для каждого $u \in C_T^n$ положив

$$[\Lambda_\sigma u](t) := \int\limits_{\sigma}^{t} u(s)ds - \frac{t-\sigma}{T}\int\limits_{\sigma}^{T+\sigma} u(s)ds, \qquad t \in (-\infty,\infty). \tag{6.4}$$

Формула (6.4), очевидно, задает ограниченный линейный оператор в C_T^n.

Лемма 6.3. *При любых неотрицательном u из C_T^n и произвольном $t \in [\sigma, T+\sigma]$ выполняется покоординатное неравенство*

$$\left|(\Lambda_\sigma u)(t)\right| \leq (H_\sigma u)(t), \tag{6.5}$$

в котором H_σ является оператором в C_T^n, определенным равенством (5.1).

Доказательство. Пусть $u \geq 0$. Согласно (6.4), для $t \in [\sigma, T+\sigma]$ имеем

$$(\Lambda_\sigma u)(t) = \left(1 - \frac{t-\sigma}{T}\right) \int\limits_\sigma^t u(s)ds + \frac{t-\sigma}{T} \int\limits_t^{T+\sigma} u(s)ds,$$

откуда

$$\left|(\Lambda_\sigma u)(t)\right| \leq \left(1 - \frac{t-\sigma}{T}\right) \int\limits_\sigma^t u(s)ds + \frac{t-\sigma}{T} \int\limits_t^{T+\sigma} u(s)ds.$$

Отсюда с учетом определения (5.1) оператора H_σ получаем (6.5).

Лемма 6.4. *При всех $z \in D_M$, $t \in (-\infty, \infty)$ и $m = 1, 2, \ldots$ справедлива оценка*

$$\rho_m(t,z) \leq \left[H_\sigma K \rho_{m-1}(\cdot, z)\right](t), \tag{6.6}$$

где

$$\rho_m(t,z) := |x_m(t,z) - x_{m-1}(t,z)|, \tag{6.7}$$

а функции $x_m(\cdot, z)$, $m \geq 1$, заданы рекуррентной формулой (6.1).

Доказательство. Согласно лемме 6.2, при всех $z \in D_M$, $t \in (-\infty, \infty)$ и $m = 1, 2, \ldots$ имеем

$$x_m(t,z) \in D.$$

Следовательно, в оценке

$$r_{m+1}(t) \leq \left(1 - \frac{t-\sigma}{T}\right) \int\limits_\sigma^t \left[f(s, x_m(s,z)) - f(s, x_{m-1}(s,z))\right] ds +$$

$$+ \frac{t-\sigma}{T} \int\limits_t^{T+\sigma} \left[f(s, x_m(s,z)) - f(s, x_{m-1}(s,z))\right] ds, \qquad t \in [\sigma, T+\sigma],$$

которая является простым следствием (6.1), можно воспользоваться неравенством (4.1) из предположения ii):

$$r_{m+1}(t) \leq \left(1 - \frac{t-\sigma}{T}\right) \int\limits_{\sigma}^{t} K(s)\big|x_m(s,z) - x_{m-1}(s,z)\big|ds +$$

$$+ \; \frac{t-\sigma}{T} \int\limits_{t}^{T+\sigma} K(s)\big|x_m(s,z) - x_{m-1}(s,z)\big|ds.$$

Учитывая обозначение (6.7) и определение (5.1) оператора H_σ, отсюда непосредственно получаем (6.6). Лемма доказана.

Лемма 6.5. *При выполнении неравенства*

$$R_{K,T} < 1 \tag{6.8}$$

заданная формулой (6.1) последовательность $\{x_m(\cdot,z) \mid m \geq 0\}$ для всех $z \in D_M$ равномерно сходится к некоторой функции $x(\cdot,z) \in C_T^n$, причем на $[\sigma, T+\sigma]$ справедлива поточечная и покоординатная оценка

$$|x_m(\cdot,z) - x(\cdot,z)| \leq \frac{1}{2}(H_\sigma K)^m (I - H_\sigma K)^{-1} \alpha(\cdot - \sigma)\Big[\max_{s\in(-\infty,\infty)} f(s,z) - \min_{s\in(-\infty,\infty)} f(s,z)\Big], \tag{6.9}$$

в которой функция $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена формулой (6.3).

При всех указанных z функция $x(\cdot,z)$ является единственным непрерывным решением нелинейного интегрального уравнения

$$x(t) = z + \int\limits_{\sigma}^{t} f\left(s, x(s)\right) ds - \frac{t-\sigma}{T} \int\limits_{0}^{T} f\left(s, x(s)\right) ds, \qquad t \in [\sigma, T+\sigma], \tag{6.10}$$

которое, кроме того, удовлетворяет дифференциальной системе (2.1) тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{0}^{T} f\left(s, x(s,z)\right) ds = 0. \tag{6.11}$$

Символом I в неравенстве (6.9) обозначен тождественный оператор на C_T^n.

Доказательство. Легко видеть, что линейный непрерывный оператор $H_\sigma K : C_T^n \to$ $\to C_T^n$ является положительным в том смысле, что из поточечного и покоординатного неравенства $x \geq 0$ вытекает $H_\sigma K x \geq 0$. Тогда, согласно условию (6.8), существует обратный оператор $(I - H_\sigma K)^{-1}$, который в силу равенства

$$(I - H_\sigma K)^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (H_\sigma K)^m \tag{6.12}$$

положителен в том же смысле. Поскольку, в силу положительности оператора $H_\sigma K$, из леммы 6.4 при любом $m = 1, 2, 3, \ldots$ следует поточечное неравенство

$$\rho_{m+1}(\cdot, z) \leq (H_\sigma K)^m \rho_1(\cdot, z),$$

согласно (6.12) имеем

$$|x_{m+k}(\cdot, z) - x_m(\cdot, z)| \leq (H_\sigma K)^m \sum_{\nu=1}^{k} (H_\sigma K)^\nu \rho_1(\cdot, z) \leq$$

$$\leq (H_\sigma K)^m \sum_{\nu=1}^{+\infty} (H_\sigma K)^\nu \rho_1(\cdot, z) =$$

$$= (H_\sigma K)^m (I - H_\sigma K)^{-1} \rho_1(\cdot, z).$$

Таким образом, определенная рекуррентной формулой (6.1) последовательность непрерывных T-периодических вектор-функций на $(-\infty, \infty)$ фундаментальна в равномерной норме и, следовательно, является равномерно сходящейся.

С другой стороны, из (6.7) ясно, что при всех (t, z) из $[\sigma, T + \sigma] \times D$

$$\rho_1(t, z) \leq \frac{1}{2} \alpha(t - \sigma) \Big[\max_{s \in (-\infty, \infty)} f(s, z) - \min_{s \in (-\infty, \infty)} f(s, z) \Big],$$

откуда непосредственно получаем оценку (6.9).

Переходя в (6.1) к пределу при $m \to +\infty$, легко убеждаемся, что из соотношения

$$\lim_{m \to +\infty} \max_{t \in (-\infty, \infty)} |x_m(t, z) - x(t, z)| = 0$$

вытекает (6.10). Из самого вида равенства (6.10) очевидна непрерывная дифференцируемость функции $x(\cdot, z)$, поэтому, дифференцируя обе части упомянутого соотношения, приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$x'(t, z) = f(t, x(t, z)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s, z)) ds, \qquad t \in (-\infty, \infty). \tag{6.13}$$

Из самого вида системы (6.13) очевидно, что любое удовлетворяющее равенству (6.11) решение $x(\cdot, z)$ системы (6.13) одновременно является решением системы (2.1). Ясно, что верно и обратное утверждение, откуда заключаем о справедливости последнего из перечисленных в формулировке утверждений. Лемма доказана.

Замечание 6.1. Из предположения iii) вытекает, что в условиях леммы 6.5 при всех $m \geq 1$ на $[\sigma, T+\sigma]$ справедлива более грубая, но и более простая, чем (6.9), оценка

$$|x_m(\cdot, z) - x(\cdot, z)| \leq \frac{1}{2}(H_\sigma K)^m (I - H_\sigma K)^{-1} \alpha(\cdot - \sigma) M. \tag{6.14}$$

Заметим, что в правой части неравенств (6.9) и (6.14) значение оператора

$$(H_\sigma K)^m (I - H_\sigma K)^{-1}$$

вычисляется на функции вида

$$[\sigma, T+\sigma] \ni t \longmapsto \alpha(t-\sigma)c,$$

где α — скалярная функция, заданная формулой (6.3), а $c \in \mathbb{R}^n$ — некоторый постоянный вектор, который не зависит от z.

Замечание 6.2. В случае, когда в условии ii) из п. 4

$$K(t) \equiv K, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

условие (6.8), согласно следствию 5.5, имеет вид

$$r(K) < \frac{3,4161\ldots}{T}, \tag{6.15}$$

где $r(K)$ — наибольшее из положительных собственных значений постоянной матрицы K.

Замечание 6.3. Предположив выполнение глобального условия Липшица ii), что, иными словами, означает справедливость неравенства (4.1) при произвольных x и y из $\mathbb{R}^n$, можно и вовсе отказаться от условия (6.8). Для этого следует модифицировать рекуррентную формулу (6.1) с использованием некоторых рассуждений из работы [8].

7. Симметрии типа (τ, E) решений уравнения (6.10). Опишем некоторые условия, при которых решения определенного (вообще говоря, бесконечного) множества уравнений n-параметрического семейства (6.10) имеют свойство (τ, E). Для этого сначала укажем одно важное свойство заданного формулой (6.4) линейного оператора $\Lambda_\sigma : C_T^n \to C_T^n$.

Лемма 7.1. *Каковы бы ни были точка $\sigma \in (-\infty, \infty)$ и невырожденная n-мерная матрица E, справедливо включение*

$$\Lambda_\sigma C_T^n\left(-2\sigma, -E^{-1}\right) \subset C_T^n\left(-2\sigma, E\right). \tag{7.1}$$

Напомним, что линейное множество $C_T^n(-2\sigma, E)$ определено формулой (3.2).

Доказательство. Для того чтобы установить справедливость включения (7.1), достаточно воспользоваться леммой 6 из работы [9].

Лемма 7.2. *Допустим, что непрерывная функция* $f : (-\infty, \infty) \times D \to \mathbb{R}^n$*, точка* $\tau \in (-\infty, \infty)$ *и невырожденная* n*-мерная матрица* E *таковы, что*

$$-f(-t-\tau, z) = Ef(t, Ez) \tag{7.2}$$

при всех $z \in \mathbb{R}^n$ *и* $t \in (-\infty, \infty)$*. Тогда для любой функции* $x \in C_T^n$ *со свойством* (τ, E) *функция*

$$(-\infty, \infty) \ni t \longmapsto f(t, x(t))$$

имеет свойство $(\tau, -E^{-1})$.

Напомним, что симметрийные свойства (τ, E) и $(\tau, -E^{-1})$ описываются определением 3.1.

Доказательство. Пусть функция $x \in C_T^n$ имеет свойство (τ, E). Согласно определению 3.1, это означает, что для всех t из $(-\infty, \infty)$ выполнено равенство (3.1), откуда

$$x(-t-\tau) = E^{-1}x(t), \qquad t \in (-\infty, \infty). \tag{7.3}$$

Полагая

$$u(t) := f(t, x(t)), \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{7.4}$$

и принимая во внимание соотношение (7.3), получаем

$$\begin{aligned} -E^{-1}u(-t-\tau) &= -E^{-1}f(-t-\tau, x(-t-\tau)) = \\ &= -E^{-1}f\left(-t-\tau, E^{-1}x(t)\right). \end{aligned} \tag{7.5}$$

Используя теперь условие (7.2) и учитывая определение (7.4), из равенства (7.5) находим

$$-E^{-1}u(-t-\tau) = u(t), \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

Последнее равенство означает, что u имеет свойство $(\tau, -E^{-1})$. Поскольку функция u со свойством (τ, E) выбиралась произвольным образом, отсюда получаем доказательство утверждения леммы 7.2.

Замечание 7.1. Условие (7.2) напоминает условие (6.17) из [1]. Первое из них, очевидно, является более общим, поскольку содержит произвольный сдвиг аргумента τ. Кроме того, мы нигде не предполагаем выполнение для матрицы E равенства (3.17) и других условий, используемых в [1].

Леммы 6.5, 7.1 и 7.2 позволяют получить следующее утверждение.

Предложение 7.1. *Предположим, что функция* $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *при всех вещественных* t *удовлетворяет условию (7.2) с некоторыми числом* τ *и невырожденной* n*-мерной матрицей* E. *Пусть выполнены условия i) – iv) из п. 4 и, кроме того, выполнено неравенство (6.8). Тогда при всех* $z \in D_M$, *для которых*

$$Ez = z, \tag{7.6}$$

*интегро-функциональное уравнение**

$$x(t) = z + \int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{t} f\left(s, x(s)\right) ds - \frac{2t+\tau}{2T} \int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{T-\frac{\tau}{2}} f\left(s, x(s)\right) ds, \quad t \in \left[-\frac{\tau}{2}, T - \frac{\tau}{2}\right], \tag{7.7}$$

имеет единственное решение $x(\cdot, z)$, *и это решение имеет свойство* (τ, E).

Кроме того, выполнения равенства (6.11) необходимо и достаточно для того, чтобы функция $x(\cdot, z)$ *являлась решением дифференциальной системы (2.1).*

Доказательство. Легко проверить, что уравнение (7.7) можно представить в виде

$$x = z + \Lambda_{-\frac{\tau}{2}} \mathfrak{f} x,$$

где $\mathfrak{f}$ означает оператор Немыцкого, порожденный функцией $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$:

$$C^n \ni u(\cdot) \longmapsto f\left(\cdot, u(\cdot)\right). \tag{7.8}$$

Ясно, что в силу T-периодичности функции $f(\cdot, z)$ при фиксированных z оператор $\mathfrak{f}$ действует в пространстве C^n_T.

Положим

$$x_{m+1} = z + \Lambda_{-\frac{\tau}{2}} \mathfrak{f} x_m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7.9}$$

где $x_0 \equiv z$. Легко видеть, что (7.9) совпадает с (6.1) при $\sigma = -\tau/2$.

Равенство (7.6), которому, по предположению, удовлетворяет z, гарантирует, что постоянная функция x_0 принадлежит $C^n_T(\tau, E)$ (см. определение 3.1). Согласно лемме 7.2, из условия (7.2) вытекает, что функция

$$\mathfrak{f} x_0$$

имеет свойство $(\tau, -E^{-1})$, т. е. $u \in C^n_T(\tau, -E^{-1})$. Отсюда в силу леммы 7.1 следует, что функция

$$\Lambda_{-\frac{\tau}{2}} \mathfrak{f} x_0,$$

как и x_0, принадлежит $C^n_T(\tau, E)$. Поэтому, принимая во внимание равенство (7.9) и лемму 3.1, можем утверждать, что $x_1 \in C^n_T(\tau, E)$.

*Единственность решения уравнения (7.7) имеет место для всех $z \in D_M$, не только тех, которые удовлетворяют условию (7.6). Только для последних, однако, гарантируется выполнение свойства (τ, E).

Рассуждая аналогично, можно показать, что все члены последовательности функций (7.9) имеют свойство (τ, E).

Наконец, лемма 6.5 с $\sigma = -\tau/2$ и условие (6.8) позволяют утверждать, что последовательность (7.9) равномерно сходится к единственному решению интегро-функционального уравнения (7.7). Поскольку, по доказанному, $x_m \in C_T^n(\tau, E)$ при всех $m \geq 0$, то и соответствующая предельная функция также принадлежит подпространству $C_T^n(\tau, E)$, т. е. имеет свойство (τ, E), что и требовалось установить.

Заключительное утверждение предложения вытекает из той же леммы 6.5.

8. Периодические решения со свойством (τ, E). В этом пункте устанавливается основная теорема настоящей статьи. Для ее доказательства, помимо результатов предыдущих пунктов, потребуется следующая лемма.

Лемма 8.1. *Для любой функции $x \in C_T^n$, имеющей свойство (τ, G) с некоторыми числом τ и невырожденной матрицей G, удовлетворяющей условию*

$$\det(1_n - G) \neq 0, \tag{8.1}$$

справедливо равенство

$$\int_0^T x(s)ds = 0. \tag{8.2}$$

Доказательство. Выполним под знаком интеграла в левой части (8.2) замену переменной по формуле

$$s = -\xi - \tau.$$

Учитывая T-периодичность функции $x \in C_T^n(\tau, G)$ и свойство (τ, G), получаем

$$G\int_0^T x(s)ds = -G\int_{-\tau}^{-T-\tau} x(-\xi-\tau)d\xi =$$

$$-G\int_0^{-T} x(-\xi-\tau)d\xi = G\int_0^T x(-\xi-\tau)d\xi =$$

$$= \int_0^T x(\xi)d\xi,$$

т. е.

$$[1_n - G]\int_0^T x(s)ds = 0. \tag{8.3}$$

В силу (8.1) из (8.3) непосредственно вытекает требуемое равенство (8.2). Лемма доказана.

Полученные выше утверждения дают возможность сформулировать следующую теорему.

Теорема 8.1. *Предположим, что для функции $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ выполнены условия i)–iv) из п. 4, справедливо неравенство (6.8), и, кроме того, f удовлетворяет условию (7.2) с некоторыми числом τ и такой невырожденной n-мерной матрицей E, что*

$$\det\bigl(1_n + E\bigr) \neq 0. \tag{8.4}$$

Тогда любое решение x системы дифференциальных уравнений (2.1), для которого значение $x(-\tau/2)$ принадлежит множеству D_M и удовлетворяет соотношению

$$x\left(-\frac{\tau}{2}\right) = Ex\left(-\frac{\tau}{2}\right), \tag{8.5}$$

является T-периодическим решением, имеющим свойство (τ, E).

Доказательство. Согласно предложению 7.1, в принятых условиях интегро-функциональное уравнение (7.7) имеет единственное решение $x(\cdot, z)$ при всех $z \in \mathbb{R}^n$. Для всех z, удовлетворяющих равенству (7.6), это решение, кроме того, имеет свойство (τ, E).

В силу леммы 7.2 наложенное на функцию f условие (7.2) позволяет утверждать, что функция

$$(-\infty, \infty) \ni t \longmapsto f\left(t, x(t, z)\right) \tag{8.6}$$

имеет свойство $(\tau, -E^{-1})$. Поскольку, очевидно,

$$1_n + E^{-1} = E^{-1}\left(1_n + E\right),$$

отсюда, ввиду (8.4), следует, что матрица $G := -E^{-1}$ и принадлежащая подпространству $C_T^n(\tau, G)$ функция (8.6) удовлетворяют условиям леммы 8.1. Из упомянутой леммы вытекает справедливость соотношения

$$\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{T-\frac{\tau}{2}} f\left(s, x(s, z)\right) ds = 0,$$

которое, ввиду T-периодичности рассматриваемых функций, совпадает с равенством (6.11).

Таким образом, для решения $x(\cdot, z)$ уравнения (7.7) при всех вещественных t выполнено соотношение

$$x(t, z) = z + \int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{t} f\left(s, x(s, z)\right) ds,$$

откуда следует, что эта функция является решением начальной задачи

$$x'(t) = f\left(t, x(t)\right), \qquad -\infty < t < \infty,$$

$$x\left(-\frac{\tau}{2}\right) = z.$$

С другой стороны, по доказанному, $x(\cdot, z)$ лежит в $C_T^n(\tau, E)$ и, в частности, является периодической с периодом T. Остается лишь заметить, что все изложенное выше справедливо при произвольном z со свойством (7.6), а это означает, что любое решение системы (2.1), для которого справедливо равенство (8.5), принадлежит подпространству $C_T^n(\tau, E)$. Теорема доказана.

Анализ приведенного выше доказательства теоремы 8.1 позволяет дополнить упомянутую теорему следующим замечанием.

Замечание 8.1. Производная каждого из имеющих свойство (τ, E) решений дифференциальной системы (2.1), о которых идет речь в теореме 8.1, имеет свойство $(\tau, -E^{-1})$.

В случае, когда условие Липшица (4.1) для функции f в правой части системы (2.1) выполнено во всем пространстве и с постоянной матрицей, т. е. при всех $t \in (-\infty, \infty)$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|, \qquad \{x_1, x_2\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{8.7}$$

где $K \in GL_n(\mathbb{R})$, условия теоремы 8.1 несколько упрощаются. А именно, справедливо такое следствие.

Следствие 8.1. *Пусть T-периодическая по первому аргументу и непрерывная функция $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица (8.7) с некоторой n-мерной матрицей K, спектральный радиус которой удовлетворяет неравенству (6.15). Предположим также, что при некоторых вещественных числе τ и невырожденной n-мерной матрице E, удовлетворяющей условию (8.4), функция f имеет свойство (7.2).*

Тогда любое решение x системы дифференциальных уравнений (2.1), значение которого в точке $-\tau/2$ удовлетворяет соотношению (8.5), является периодическим периода T решением, имеющим, кроме того, свойство (τ, E).

Модельным примером невырожденной матрицы E, удовлетворяющей условию (8.4) теоремы 8.1, является единичная матрица $E = 1_n$, при которой справедливость равенства (3.1) означает τ-четность функции x. Напомним, что что τ-четными мы называем функции, о которых идет речь в определении 3.2.

Следствие 8.2. *Если матрица K в условии Липшица (4.1) выбрана постоянной, а T-периодическая по первому аргументу и непрерывная функция $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию*

$$-f\left(-t - \tau, z\right) = f\left(t, z\right), \qquad -\infty < t < \infty, \tag{8.8}$$

то при выполнении неравенства (6.15) все решения дифференциальной системы (2.1), значения которых в точке $-\tau/2$ лежат в множестве D_M, являются τ-четными и периодическими с периодом T.

Доказательство. Согласно замечанию 6.2, неравенство (6.15) обеспечивает выполнение условия (6.8). Ясно также, что (8.8) является частным случаем (7.2) для $E = 1_n$. Таким образом, сформулированное утверждение следует из теоремы 8.1 при $E = 1_n$.

Из следствия 8.2 очевидным образом вытекает такое утверждение.

Следствие 8.3. *Если T-периодическая и нечетная по первому аргументу непрерывная функция $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица (8.7), причем для спектрального радиуса $r(K)$ матрицы K выполнено неравенство (6.15), то все решения дифференциальной системы (2.1) являются четными и периодическими с периодом T.*

Замечание 8.2. Из следствия 8.3, в частности, вытекает теорема 6 из [2, с. 326].

Следствие 8.4. *Если функция f в (2.1) удовлетворяет условию (7.2) с невырожденной матрицей E, то нелинейная дифференциальная система (2.1) допускает тривиальное решение.*

Доказательство. Легко видеть, что в силу (7.2) функция

$$(-\infty, \infty) \ni t \longmapsto f(t, 0)$$

имеет свойство $(\tau, -E)$. Из предложения 3.4 вытекает равенство

$$E^2 f(t, 0) = 0, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

откуда ввиду невырожденности E^2 получаем, что $f(t, 0) = 0$ при всех $t \in (-\infty, \infty)$. Это и означает, что система (2.1) допускает тривиальное решение $x \equiv 0$.

1. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. — М.: Мир, 1966. — 230 с.
2. *Ronto M., Samoilenko A.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. — Singapore: World Sci., 2000. — 455 p.
3. *Ronto N. I., Samoilenko A. M.* Numerical-analytic methods of investigating periodic solutions. — Moscow: Mir, 1979. — 184 p.
4. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье. — 2-е испр. изд. — М.: Наука, 1960. — 390 с.
5. *Ронто А. Н.* К вопросу о периодических решениях систем с максимумами // Допов. НАН України. — 1999. — № 12. — С. 27 – 31.
6. *Ronto A., Ronto M., Samoilenko A., Trofimchuk S.* On periodic solutions of autonomous difference equations // Georgian Math. J. — 2001. — **8**, № 1. — P. 135 – 164.
7. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. — 1948. — **3**, № 1(23). — С. 3 – 95.
8. *Ронто А. Н.* О некоторых краевых задачах для липшицевых дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. — 1998. — **1**, № 1. — С. 74 – 94.
9. *Ronto A., Rontó M.* On the (τ, E) property of periodic solutions. — Miskolc, 2002. — 17 p. — (Preprint / Inst. Math., Univ. Miskolc, № 2002-03).

Получено 30.08.2002