Low Temperature Physics/Фізика низьких температур, 2019, т. 45, № 5, с. 673–676

Краткие сообщения

О функции отклика вырожденного бозе-газа

В.Б. Бобров

Объединенный институт высоких температур РАН, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2, г. Москва, 125412, Россия

Национальный исследовательский университет «МЭИ», ул. Красноказарменная, д. 14, г. Москва, 111250, Россия
E-mail: vic5907@mail.ru

Статья поступила в редакцию 27 ноября 2018 г., опубликована онлайн 26 марта 2019 г.

Рассмотрена пространственно-временная функция отклика плотность–плотность для вырожденного идеального бозе-газа. На этой основе показано, что при воздействии слабого внешнего поля в идеальном бозе-газе в пределе сильного вырождения образуется пространственно-временная волна флуктуации средней неоднородной плотности, затухающая только во времени степенным образом.

Ключевые слова: вырожденный бозе-газ, функция отклика, неоднородная плотность, конденсат Бозе–Эйнштейна.

Теоретическим исследованиям квантовых газов в области сверхнизких температур уделяется большое внимание, что обусловлено экспериментальными достижениями в этой области температур (см. [1,2] и цитированную литературу). В частности, в экспериментах [3,4] при температурах, близких к абсолютному нулю, были обнаружены почти незатухающие колебания конденсата Бозе–Эйнштейна (БЭК). До последнего времени теоретическое описание подобных экспериментов было связано с применением временного уравнения Гросса–Питаевского [5,6]. Такое описание, как и теория Боголюбова для однородного газа с БЭК [7], основано на использовании «аномальных» средних [1,6]. Однако в настоящее время имеются обоснованные сомнения в справедливости гипотезы о существовании аномальных средних. Строгое математическое доказательство этой гипотезы отсутствует (см. [8–15] и цитированную литературу). С другой стороны, описание неравновесных явлений в квантовых средах может быть основано на теории линейного отклика, в рамках которой источником неравновесности среды является слабое внешнее поле.

Согласно теории линейного отклика (см., например, [16]), флуктуация средней плотности $\delta\langle\hat{n}(\mathbf{r},t)\rangle$ квантово-статистической системы тождественных частиц, вызванная воздействием слабого внешнего скалярного поля $\varphi^{(\text{ext})}(\mathbf{r},t)$, при последовательном учете эффектов временного и пространственного запаздывания определяется следующими соотношениями:

$$\delta\langle\hat{n}(\mathbf{r},t)\rangle \equiv \langle\hat{n}(\mathbf{r},t)\rangle - \langle\hat{n}(\mathbf{r},t)\rangle^{(\text{eq})} =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} dt' \int_V d^3r'' \chi_V(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\varphi^{(\text{ext})}(\mathbf{r}',t'), \qquad (1)$$

$$\chi_V(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = -\frac{i}{\hbar}\langle[\hat{n}(\mathbf{r},t),\ \hat{n}(\mathbf{r}',t')]\rangle^{(\text{eq})}, \qquad (2)$$

$$\hat{n}(\mathbf{r},t) = \exp\left(i\hat{H}t/\hbar\right)\hat{n}(\mathbf{r})\exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right),$$

$$\hat{n}(\mathbf{r}) = \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}). \qquad (3)$$

Здесь $\langle\hat{n}(\mathbf{r},t)\rangle$ — неравновесная средняя плотность числа частиц, находящихся в макроскопическом объеме V; $\langle\hat{n}(\mathbf{r},t)\rangle^{(\text{eq})}$ — плотность числа частиц с массой m и спином s в системе, находящейся в состоянии термодинамического равновесия. Угловые скобки с индексом (eq) обозначают усреднение с большим каноническим распределением Гиббса с точным гамильтонианом $\hat{H}$ в отсутствие внешнего поля, химическим потенциалом μ при температуре T; $[\hat{A},\hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ — коммутатор двух операторов; $\hat{n}(\mathbf{r},t)$ — оператор плотности числа частиц в представлении Гейзенберга; $\hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})$ и $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ — полевые операторы рождения и уничтожения частиц соответственно.

Из спектрального представления (разложения по собственным функциям и собственным значениям гамильтониана системы $\hat{H}$) для пространственно-временной функции отклика плотность–плотность $\chi_V\left(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t'\right)$ (2) непосредственно следует, что

$$\chi_V\left(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t'\right)\equiv\chi_V\left(\mathbf{r},t-t';\mathbf{r}',0\right). \qquad (4)$$

Как и при рассмотрении термодинамических свойств (подробнее см. [17]), функция отклика плотность–плотность χ_V имеет физический смысл только после перехода к термодинамическому пределу

$$\mathrm{Lim}_T:\langle\hat{N}\rangle^{(\mathrm{eq})}\to\infty,\quad V\to\infty,$$

$$\bar{n}\equiv\mathrm{Lim}_T\langle\hat{N}\rangle^{(\mathrm{eq})}/V=\mathrm{Lim}_T\langle\hat{N}\rangle/V=\mathrm{const}, \qquad (5)$$

где $\bar{n}=\bar{n}(T,\mu)$ — средняя равновесная плотность числа частиц в рассматриваемой системе,

$$\hat{N}=\int_V d^3r\,\hat{n}\left(\mathbf{r}\right)$$

— оператор полного числа частиц в рассматриваемой системе.

Следовательно, для пространственно однородной системы имеем

$$\mathrm{Lim}_T\langle\hat{n}\left(\mathbf{r},t\right)\rangle^{(\mathrm{eq})}=\bar{n},$$

$$\mathrm{Lim}_T\chi_V\left(\mathbf{r},t-t';\mathbf{r}',0\right)==\chi\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right). \qquad (6)$$

Таким образом, флуктуация средней плотности $\delta\langle\hat{n}(\mathbf{r},t)\rangle$ (1) показывает отклонение средней плотности от ее среднего равновесного значения $\bar{n}$ (6) в однородной системе под влиянием внешнего поля. В специальном случае, когда внешнее поле задается как $\varphi^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{r},t)=\varphi_0\delta(\mathbf{r})\delta(t)$, функция отклика $\chi(\mathbf{r},t)$ полностью определяет величину $\delta\langle\hat{n}(\mathbf{r},t)\rangle$ при достаточно больших значениях пространственной и временной переменной.

Отметим, что при усреднении с большим каноническим распределением Гиббса используются периодические граничные условия для одночастичных волновых функций [18]. Это позволяет представить полевые операторы $\hat{\Psi}^+(\mathbf{r})$ и $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ в виде ряда по «плоским» волнам:

$$\hat{\Psi}^+\left(\mathbf{r}\right)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}_n,\sigma}\hat{a}^+_{\mathbf{p}_n,\sigma}\exp\left(-i\mathbf{p}_n\cdot\mathbf{r}\right),$$
$$\hat{\Psi}^+\left(\mathbf{r}\right)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}_n,\sigma}\hat{a}_{\mathbf{p}_n,\sigma}\exp\left(i\mathbf{p}_n\cdot\mathbf{r}\right), \qquad (7)$$

где $\hat{a}^+_{\mathbf{p}_n,\sigma}$ и $\hat{a}_{\mathbf{p}_n,\sigma}$ — соответственно операторы рождения и уничтожения частиц в состоянии с импульсом $\hbar\mathbf{p}_n$ и проекцией спина $\sigma\,(\sigma=-s,\,-s+1,\ldots,s-1,s)$, $\mathbf{p}_n=2\pi\mathbf{n}/L$, $n_\alpha=0,\,\pm1,\,\pm2,\ldots,\ \ \alpha=x,y,z$.

Здесь учтено, что итоговый результат рассмотрения не должен зависеть от геометрической формы поверхности, ограничивающей объем V, поэтому для простоты предполагается, что рассматриваемая система размещена в мысленно выделенном кубе, сторона которого равна L, а объем $V=L^3$ [19].

Согласно (4)–(7), в термодинамическом пределе можно применить фурье-преобразование для функции отклика:

$$\chi\left(\mathbf{r},t\right)=\int\frac{d^3q}{\left(2\pi\right)^3}\exp\left(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}\right)\chi\left(\mathbf{q},t\right),$$

$$\chi\left(\mathbf{q},t\right)=\mathrm{Lim}_T\chi_V\left(\mathbf{q},t\right), \qquad (8)$$

$$\chi_V\left(\mathbf{q},t\right)=-\frac{i}{\hbar V}\langle[\hat{n}_{\mathbf{q}}\left(t\right),\,\hat{n}_{-\mathbf{q}}\left(0\right)]\rangle^{(\mathrm{eq})},$$

$$\hat{n}_{\mathbf{q}}=\sum_{\mathbf{p},\sigma}\hat{a}^+_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2,\,\sigma}\hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2,\,\sigma}\,. \qquad (9)$$

Функция $\chi(\mathbf{q},t)$ задана только при $\mathbf{q}\neq0$ (см. (6)). Кроме того, переход от ряда Фурье к интегралу Фурье (9) по волновым векторам осуществляется по правилу [18]

$$\mathrm{Lim}_T\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}}\ldots\to\int\frac{d^3q}{\left(2\pi\right)^3}\ldots. \qquad (10)$$

Из спектрального представления нетрудно убедиться, что функции отклика $\chi(\mathbf{r},t)$ и $\chi(\mathbf{q},t)$ — действительные функции. Однако явное вычисление этих функций при учете взаимодействия между частицами не представляется возможным.

Поэтому далее ограничимся вычислением функции отклика $\chi(\mathbf{q},t)$ (8), (9) для идеального квантового газа, гамильтониан которого равен

$$\hat{H}_{\mathrm{id}}=\sum_{\mathbf{p},\sigma}\varepsilon\left(p\right)\hat{N}_{\mathbf{p},\sigma},\quad \hat{N}_{\mathbf{p},\sigma}=\hat{a}^+_{\mathbf{p},\sigma}\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma},\quad \varepsilon\left(p\right)=\frac{\hbar^2p^2}{2m}. \qquad (11)$$

В этом случае

$$\frac{d\hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma}\left(t\right)}{dt}=\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left(p\right)\hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma}\left(t\right),\quad \frac{d\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}\left(t\right)}{dt}=-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left(p\right)\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}\left(t\right). \qquad (12)$$

Следовательно,

$$\hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma}\left(t\right)=\hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma}\exp\left(i\varepsilon\left(p\right)t/\hbar\right),$$

$$\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}\left(t\right)=\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}\exp\left(-i\varepsilon\left(p\right)t/\hbar\right). \qquad (13)$$

Подставляя (13) в (9) и учитывая коммутационные соотношения для операторов $\hat{a}^+_{\mathbf{p}_n,\sigma}$ и $\hat{a}_{\mathbf{p}_n,\sigma}$, находим

$$\chi^{(\mathrm{id})}_V\left(\mathbf{q},t\right)=-\frac{2}{\hbar V}\sin\left(\frac{\varepsilon\left(q\right)t}{\hbar}\right)\sum_{\mathbf{p}\sigma}f_{\mathrm{id}}\left(\mathbf{p},\sigma\right)\exp\left(i\frac{\hbar\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}t}{m}\right), \qquad (14)$$

где $f_{\rm id}(\mathbf{p},\sigma)=\langle\hat{N}_{\mathbf{p},\sigma}\rangle_{\rm id}^{\rm (eq)}$ — одночастичная функция распределения (среднее число заполнения) по импульсам $\hbar\mathbf{p}$ и проекциям спина σ для идеального равновесного газа с химическим потенциалом $\mu_{\rm id}$ при температуре T.

Учтем, что в рассматриваемом нерелятивистском приближении функция $f_{\rm id}(\mathbf{p},\sigma)$ не зависит явно от проекции спина σ (ее вид определяется только значением спина s для бозонов или фермионов): $f_{\rm id}(\mathbf{p},\sigma)=$ $=f_{\rm id}(\mathbf{p})$, причем для однородной системы $f_{\rm id}(\mathbf{p})=$ $=f_{\rm id}(-\mathbf{p})$. Следовательно,

$$\chi_V^{\rm (id)}(\mathbf{q},t)=-\frac{2(2s+1)}{\hbar V}\sin\left(\frac{\varepsilon(q)t}{\hbar}\right)\times$$

$$\times\sum_{\mathbf{p}}f_{\rm id}(\mathbf{p})\cos\left(\frac{\hbar\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}t}{m}\right). \qquad (15)$$

При этом химический потенциал $\mu_{\rm id}(T,\overline{n})$ определяется из уравнения

$$\overline{n}(T,\mu_{\rm id})=\mathrm{Lim}_T\,\frac{(2s+1)}{V}\sum_{\mathbf{p}}f_{\rm id}(\mathbf{p}). \qquad (16)$$

Далее рассмотрим вырожденный идеальный газ бозонов с нулевым спином ($s=0$) при температуре $T<T_{BEC}$, где $T_{BEC}=2\pi\hbar^2\overline{n}^{2/3}/m(\zeta(3/2))^{2/3}$ — температура перехода в состояние с БЭК, $\zeta(x)$ — ζ-функция Римана [18]. В этом случае химический потенциал $\mu_{\rm id}=0$,

$$f_{\rm id}(\mathbf{p})=N_{BEC}\delta_{\mathbf{p},0}+f_{\rm id}^{\rm (over)}(p)\left(1-\delta_{\mathbf{p},0}\right),$$

$$f_{\rm id}^{\rm (over)}(p)=\left\{\exp\left(\varepsilon(p)/T\right)-1\right\}^{-1}, \qquad (17)$$

$$\overline{n}=\overline{n}_{BEC}+\overline{n}^{\rm (over)},\ \overline{n}_{BEC}\equiv\mathrm{Lim}_T\,\frac{\langle\hat{N}_{\mathbf{p}=0}\rangle_{\rm id}^{\rm (eq)}}{V}=\overline{n}\left(1-\left(\frac{T}{T_{BEC}}\right)^{3/2}\right),$$

$$\overline{n}^{\rm (over)}=\mathrm{Lim}_T\,\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}\neq0}f_{\rm id}^{\rm (over)}(\mathbf{p})=$$

$$=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f_{\rm id}^{\rm (over)}(p)=\overline{n}\left(\frac{T}{T_{BEC}}\right)^{3/2}, \qquad (18)$$

где $N_{BEC}=\langle\hat{N}_{\mathbf{p}=0}\rangle_{\rm id}^{\rm (eq)}=\overline{n}_{BEC}V$ — число частиц в БЭК, $f_{\rm id}^{\rm (over)}(p)$ — одночастичная функция распределения для «надконденсатных» частиц, имеющих ненулевое значение импульса и характеризующихся средней плотностью $\overline{n}^{\rm (over)}$.

Подставляя (16)–(18) в (8), (15), находим

$$\chi^{\rm (id)}(\mathbf{q},t)=\mathrm{Lim}_T\chi_V^{\rm (id)}(\mathbf{q},t)=\chi_{BEC}^{\rm (id)}(\mathbf{q},t)+\chi^{\rm (over)}(\mathbf{q},t), \qquad (19)$$

$$\chi_{BEC}^{\rm (id)}(\mathbf{q},t)=-\frac{2\overline{n}_{BEC}}{\hbar}\sin\left(\frac{\varepsilon(q)t}{\hbar}\right), \qquad (20)$$

$$\chi^{\rm (over)}(\mathbf{q},t)=-\mathrm{Lim}_T\,\frac{2}{\hbar V}\sin\left(\frac{\varepsilon(q)t}{\hbar}\right)\times$$

$$\times\sum_{\mathbf{p}\neq0}f_{\rm id}^{\rm (over)}(p)\cos\left(\frac{\hbar\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}t}{m}\right)=$$

$$=-\frac{m}{\pi^2\hbar^2qt}\sin\left(\frac{\varepsilon(q)t}{\hbar}\right)\int_0^\infty dpp\,f_{\rm id}^{\rm (over)}(p)\sin\left(\frac{\hbar pqt}{m}\right). \qquad (21)$$

Чтобы упростить дальнейшие выкладки, ограничимся при вычислении функции $\chi_V^{\rm (id)}(\mathbf{q},t)$ (15) рассмотрением предела сильного вырождения $T \ll T_{BEC}$. В этом случае, согласно (18)–(21), можно считать, что

$$\chi^{\rm (id)}(q,t)\cong-\frac{2\overline{n}_{BEC}}{\hbar}\sin\left(\frac{\varepsilon(q)t}{\hbar}\right). \qquad (22)$$

Подставляя (22) в (8), находим

$$\chi^{\rm (id)}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\pi^2r}\int_0^\infty dqq\sin(qr)\chi^{\rm (id)}(q,t)\cong$$

$$\cong-\frac{\overline{n}_{BEC}}{\pi^2\hbar r^3}\int_0^\infty dxx\sin(x)\sin\left(\gamma x^2\right),\quad \gamma=\hbar t/2mr^2. \qquad (23)$$

Чтобы вычислить интеграл в (23), учтем [20], что

$$\int_0^\infty dx\cos(\alpha x)\sin\left(\beta^2x^2\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\beta}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right). \qquad (24)$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty dxx\sin(\alpha x)\sin\left(\beta^2x^2\right)=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\beta}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right)\right)=$$

$$=\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{4\beta^3}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right). \qquad (25)$$

Используя (25), определяем пространственно-временную функцию отклика $\chi^{\rm (id)}(\mathbf{r},t)$ для идеального газа бозонов в пределе сильного вырождения

$$\chi^{\rm (id)}(\mathbf{r},t)\cong-\frac{\overline{n}_{BEC}\sqrt{\pi}}{4\pi^2\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar t}\right)^{3/2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{mr^2}{2\hbar t}\right). \qquad (26)$$

В результате приходим к выводу, что при воздействии δ-образного внешнего поля (см. (1)) на идеальный газ бозонов в пределе сильного вырождения образуется пространственно-временная волна флуктуации средней неоднородной плотности, затухающая только во времени степенным образом.

Автор признателен А.Г. Загороднему и С.А. Тригеру за полезное обсуждение работы.

1. S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys*. **80**, 1215 (2008).
2. L. Salasnich and F. Toigo, *Phys. Rep*. **640**, 1 (2016).
3. D.S. Jin, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Phys. Rev. Lett*. **77**, 420 (1996).
4. M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.G. Townsend, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett*. **77**, 988 (1996).
5. K.G. Singh and D.S. Rokhsar, *Phys. Rev. Lett*. **77**, 1667 (1996).
6. L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose–Einstein Condensation and Superfluidity*, Oxford University Press, Oxford (2016).
7. Н.Н. Боголюбов, *Известия АН СССР, сер. физ.* **11**, 77 (1947) [N.N. Bogolyubov, *J. Phys. USSR* **11**, 23 (1947)].
8. C.-H. Zhang and H.A. Fertig, *Phys. Rev. A* **74**, 023613 (2006).
9. P. Navez and K. Bongs, *EPL* **88**, 60008 (2009).
10. V.B. Bobrov, S.A. Trigger, and I.M. Yurin, *Phys. Lett. A* **374**, 1938 (2010).
11. A.M. Ettouhami, *Progr. Theor. Phys*. **127**, 453 (2012).
12. Yu. M. Poluektov, *J. Low Temp. Phys*. **186**, 347 (2017).
13. В.Б. Бобров, А.Г. Загородний, С.А. Тригер, *ФНТ* **43**, 420 (2017) [*Low Temp. Phys*. **43**, 343 (2017)].
14. V.B. Bobrov and S. A. Trigger, *J. Low Temp. Phys*. **186**, 1 (2017).
15. В.Б. Бобров, А.Г. Загородний, С.А. Тригер, *ФНТ* **44**, 1549 (2018) [*Low Temp. Phys.* **44**, 1211 (2018)].
16. А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, Москва (1977).
17. Д.Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика*, Наука, Москва (1971).
18. Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика*, Мир, Москва, 1978 [R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical MECHANICS*, Wiley, New York–London (1975)].
19. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика, часть 1*, Наука, Москва (1976).
20. Г.Б. Двайт, *Таблицы интегралов и другие математические формулы*, Наука, Москва (1978) [H.B. Dwight, *Tables of Integrals and other Mathematical Data*, Macmillian Co, New York (1961)].

Про функції відгуку виродженого бозе-газу

В.Б. Бобров

Розглянуто просторово-часову функцію відгуку густина–густина для виродженого ідеального бозе-газу. На цій основі показано, що при впливі слабкого зовнішнього поля в ідеальному бозе-газі в межі сильного виродження утворюється просторово-часова хвиля флуктуації середньої неоднорідної густини, яка загасає тільки з часом степеневим чином.

Ключові слова: вироджений бозе-газ, функція відгуку, неоднорідна густина, конденсат Бозе–Ейнштейна.

On the response function of a degenerate Bose gas

V.B. Bobrov

The space-time density–density response function for a degenerate ideal Bose gas is considered. On this basis, it is shown that under the influence of a weak external field in an ideal Bose gas, in the limit of strong degeneracy, a spatio-temporal wave of average density fluctuation is formed, which decays only in time in a power-law manner.

Keywords: degenerate Bose gas, response function, inhomogeneous density, Bose–Einstein condensate.