УДК 517.927

ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ

А. Ю. Лучка

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул.Терещенківська, 3

We propose and substantiate a new projection-iterative method for differential equations with restrictions.

Запропоновано та обґрунтовано новий варіант проекційно-ітеративного методу для диференціальних рівнянь з обмеженнями.

Проекційно-ітеративні методи розв'язування широких класів лінійних та нелінійних рівнянь, зокрема інтегральних, диференціальних чи інтегро-диференціальних, досить повно вивчені. Теорії цих методів та їх застосуванням присвячено низку наукових праць (див., наприклад, [1–3]).

Дослідження диференціальних рівнянь та їх систем з параметрами чи імпульсним впливом [4–8] стимулювали створення нових підходів до побудови методів проекційно-ітеративного типу.

Об'єктом дослідження в даній статті є диференціальне рівняння

$$(Lx)(t) = f(t) \tag{1}$$

з обмеженнями

$$\Phi_i(x) = \alpha_i, \quad i = \overline{1, l}, \tag{2}$$

де $t \in [0, T]$, $f \in C[0, T]$,

$$(Lx)(t) := \frac{d^m x}{dt^m} + p_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + p_m(t)x, \tag{3}$$

причому $p_\nu \in C[0, T]$, $\nu = \overline{1, m}$, $\{\Phi_i, 1 \leq i \leq l\}$ — система лінійних обмежених функціоналів, визначених на класі функцій $C^m[0, T]$, і $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, l}$.

Задача (1), (2) вважається сумісною, якщо існує функція $x \in C^m[0, T]$, яка задовольняє диференціальне рівняння (1) та обмеження (2); у противному разі задача несумісна.

Для випадку, коли $l \geq m$, у [9] висвітлено методи встановлення умов сумісності задачі (1), (2) та побудови її наближених розв'язків. Нижче до розглядуваної задачі застосовується новий варіант проекційно-ітеративного методу і дається його обґрунтування.

1. Суть методу. Введемо в розгляд диференціальний вираз

$$(Ax)(t) := \frac{d^m x}{dt^m} + a_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m(t)x, \tag{4}$$

в якому неперервні коефіцієнти $a_i(t)$, $i = \overline{1,m}$, вибрано таким чином, щоб фундаментальну систему рівняння $(Ax)(t) = 0$ можна було побудувати в явному вигляді порівняно легко. Тоді диференціальний вираз (3) можна зобразити у вигляді

$$(Lx)(t) = (Ax)(t) - (Bx)(t), \tag{5}$$

де, очевидно,

$$(Bx)(t) := b_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m(t)x, \tag{6}$$

причому

$$b_\nu(t) = a_\nu(t) - p_\nu(t), \nu = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Суть нового варіанта проекційно-ітеративного методу полягає в тому, що наближені розв'язки задачі (1), (2) визначаються із допоміжної задачі

$$(Ax_k)(t) = u_k(t) + y_k(t), \quad \Phi_i(x_k) = \alpha_i, \quad i = \overline{1,l}, \tag{8}$$

$$\int_0^T \psi_\nu(t)((Lx_k)(t) - f(t))dt = 0, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{9}$$

в якій

$$y_k(t) = f(t) + (Bx_{k-1})(t), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j(t). \tag{11}$$

Початкове наближення $x_0(t)$ визначаємо із задачі (8), (9) при $k = 0$ і заданій функції $y_0 \in C[0,T]$.

Тут і в подальшому лінійно незалежні система неперервних функцій $\{\varphi_j(t), \quad 1 \leq j \leq \leq n\}$ та система сумовних функцій $\{\psi_\nu(t), 1 \leq \nu \leq r\}$ задані і $m + n = l + r$.

Частинним випадком методу (8) – (11), коли немає обмежень (9), тобто $r = 0$, є ітераційний метод, досліджений в [6 – 9], а початкове наближення $x_0(t)$ можна трактувати як наближення, одержане за проекційним методом.

2. Допоміжна задача з керуванням. Для встановлення умов сумісності задачі (1), (2) і обґрунтування методу (8) – (11) важливу роль відіграватиме допоміжна задача

$$(Az)(t) = u(t) + y(t), \quad \Phi_i(z) = \alpha_i, \quad i = \overline{1,l}, \tag{12}$$

$$\int_0^T \psi_\nu(t)((Lz)(t) - f(t))dt = 0, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{13}$$

в якій диференціальний вираз $(Az)(t)$ визначається за формулою (4), $y \in C[0,T]$ — відома функція і керування має вигляд

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j(t), \tag{14}$$

де $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$, — шукані параметри.

Щоб побудувати розв'язок вказаної задачі з керуванням, будемо вважати, що існує функція $H(t,s)$, за допомогою якої частинний розв'язок рівняння

$$(Av)(t) = y(t) \tag{15}$$

можна знайти за формулою

$$v(t) = \int_0^T H(t,s)y(s)ds. \tag{16}$$

За такого припущення розв'язок задачі (12), (13) шукаємо у вигляді (14) та

$$z(t) = v(t) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \eta_j(t), \tag{17}$$

де $p = n + m$, функція $v(t)$ визначається за формулою (16) і $\{\eta_j(t), 1 \le j \le p\}$ — система лінійно незалежних розв'язків рівнянь

$$(A\eta_j)(t) = \varphi_j(t), \quad j = \overline{1,n}, \quad (A_j)(t) = 0, \quad j = \overline{n+1,p}. \tag{18}$$

На підставі співвідношень (15), (18) неважко впевнитись у тому, що функції $z(t)$ та $u(t)$, які визначаються формулами (17), (14), задовольняють рівняння (12). Залишилось визначити параметри λ_j, $j = \overline{1,p}$, таким чином, щоб виконувались обмеження. Для цього підставимо зображення (17) в обмеження (12), (13) і виконаємо нескладні перетворення. В результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{p} c_{ij}\lambda_j = d_i, \quad i = \overline{1,p}, \tag{19}$$

в якій

$$c_{ij} = \begin{cases} \Phi_i(\eta_j), \quad i = \overline{1,l},\ j = \overline{1,p}; \\ \int_0^T \psi_\nu(t)(L\eta_j)(t)dt, \quad i = l+\nu,\ \nu = \overline{1,r},\ j = \overline{1,p}, \end{cases} \tag{20}$$

$$d_i = \begin{cases} \alpha_i - \Phi_i(v), \quad i = \overline{1,l}; \\ \varepsilon_\nu, \quad i = l+\nu, \nu = \overline{1,r}, \end{cases} \tag{21}$$

де

$$\varepsilon_\nu = \int_0^T \psi_\nu(t)(f(t) - (Lv)(t))dt, \quad \nu = \overline{1,r}. \tag{22}$$

Припустимо, що однорідна допоміжна задача з керуванням

$$(Az)(t) = u(t), \quad \Phi_i(z) = 0, \quad i = \overline{1,l}, \tag{23}$$

$$\int_0^T \psi_\nu(t)(Lz)(t)dt = 0, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{24}$$

має тільки тривіальний розв'язок $z(t) = 0, u(t) = 0.$ У цьому випадку, очевидно, система лінійних алгебраїчних рівнянь (19) має єдиний розв'язок

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} d_j, \quad i = \overline{1,p}. \tag{25}$$

Підставивши цей розв'язок у співвідношення (14), (17), отримаємо єдиний розв'язок допоміжної задачі (12), (13).

Лема 1. *Якщо однорідна задача (23), (24) має тільки тривіальний розв'язок і справджується співвідношення*

$$\Phi_i(v) = \int_0^T \Phi_i(H(\cdot,s))y(s)ds, \qquad i = \overline{1,l}, \quad \forall y \in C[0,T], \tag{26}$$

в якому функція $v(t)$ зображається формулою (16), то існують функції $h(t), w(t)$ та $G(t,s)$, $R(t,s)$ такі, що, по-перше, єдиний розв'язок неоднорідної задачі (12), (13) зображається формулами

$$z(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)y(s)ds, \tag{27}$$

$$u(t) = w(t) + \int_0^T R(t,s)y(s)ds, \tag{28}$$

і, по-друге, справджуються рівності

$$\int\limits_0^T G(t,s)\varphi_j(s)ds = 0, \quad \varphi_j(t) + \int\limits_0^T R(t,s)\varphi_j(s)ds = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{29}$$

$$(Ah)(t) = w(t), \quad \Phi_i(h) = \alpha_i, \quad i = \overline{1,l}, \tag{30}$$

$$\left(A\int\limits_0^T G(\cdot,s)y(s)ds \right)(t) = y(t) + \int\limits_0^T R(t,s)y(s)ds, \tag{31}$$

$$\Phi_i\left(\int\limits_0^T G(\cdot,s)y(s)ds \right) = 0, \quad i = \overline{1,l}, \quad \forall y \in C[0,T]. \tag{32}$$

Доведення. За умови леми задача (12), (13) має єдиний розв’язок, який, врахувавши формули (17), (14), (25), (21) та (22), можна записати у вигляді

$$z(t) = v(t) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\beta_{ij}(a_j - b_j)\eta_i(t), \tag{33}$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\beta_{ij}(a_j - b_j)\varphi_i(t), \tag{34}$$

де

$$a_j = \begin{cases} \alpha_j, \quad j = \overline{1,l}; \\ \int\limits_0^T \psi_\nu(t)f(t)dt, \quad j = l+\nu, \nu = \overline{1,r}, \end{cases} \tag{35}$$

$$b_j = \begin{cases} \Phi_j(v), \quad j = \overline{1,l}; \\ \int\limits_0^T \psi_\nu(Lv)(t)dt, \quad j = l+\nu, \nu = \overline{1,r}. \end{cases} \tag{36}$$

Використавши співвідношення (5), (15), (16), (6), будемо мати

$$(Lv)(t) = (Av)(t) - (Bv)(t) = y(t) - \left(B\int\limits_0^T H(\cdot,s)y(s)ds\right)(t) =$$

$$= y(t) - \int\limits_0^T \left(b_1(t)\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \ldots + b_m(t)\right) H(t,s)y(s)ds,$$

або, ввівши позначення

$$K(t,s) = \left(b_1(t)\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \ldots + b_m(t)\right) H(t,s), \tag{37}$$

одержимо

$$(Lv)(t) = y(t) - \int\limits_0^T K(t,s)y(s)ds \quad \forall y \in C[0,T]. \tag{38}$$

Нехай

$$\Psi_\nu(s) = \psi_\nu(s) - \int\limits_0^T \psi_\nu(t)K(t,s)dt, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{39}$$

тоді за допомогою формул (38) та (39) легко отримати співвідношення

$$\int\limits_0^T \psi_\nu(t)(Lv)(t)dt = \int\limits_0^T \Psi_\nu(s)y(s)ds, \quad \nu = \overline{1,r}. \tag{40}$$

Тепер на підставі умови (26) та рівності (40) співвідношення (36) можна зобразити у вигляді

$$b_j = \int\limits_0^T \xi_j(s)y(s)ds, \quad j = \overline{1,p}, \tag{41}$$

де

$$\xi_j(s) = \begin{cases} \Phi_j(H(\cdot,s)), \quad j = \overline{1,l}; \\ \Psi_\nu(s), \quad j = l+\nu, \nu = \overline{1,r}, \end{cases}$$

систему функцій $\{\Psi_\nu(s), 1 \le \nu \le r\}$ можна обчислити за допомогою формул (39), (37) та (7).

Оскільки згідно із співвідношенням (41)

$$\sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} b_j = \int_0^T \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} \xi_j(s) y(s) ds, \tag{42}$$

то, поклавши

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} a_j, \quad \Gamma_i(s) = \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} \xi_j(s), \tag{43}$$

формулам (33) та (34) можна надати вигляду

$$z(t) = v(t) + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \eta_i(t) - \int_0^T \sum_{i=1}^{p} \eta_i(t) \Gamma_i(s) y(s) ds,$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \varphi_i(t) - \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \Gamma_i(s) y(s) ds,$$

або, ввівши позначення

$$h(t) = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \eta_i(t), \quad w(t) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \varphi_i(t), \tag{44}$$

$$G(t,s) = H(t,s) - \sum_{i=1}^{p} \eta_i(t) \Gamma_i(s), \tag{45}$$

$$R(t,s) = -\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \Gamma_i(s), \tag{46}$$

де $H(t,s)$ — функція, що фігурує у формулі (16), — вигляду (27) та (28).

Для встановлення правильності важливих властивостей (29) розглянемо задачу

$$(Az)(t) = u(t) + \varphi_j(t), \quad \Phi_i(z) = 0, \quad i = \overline{1,l},$$

$$\int_0^T \psi_\nu(t)(Lz)(t) dt = 0, \quad \nu = \overline{1,r}, \quad j = \overline{1,n},$$

яка має очевидний розв'язок $z(t) = 0, u(t) = -\varphi_j(t)$, а за умови леми цей розв'язок єдиний і задається формулами (27), (28), в яких, як це безпосередньо випливає із (35), (43) та (44), $h(t) = w(t) = 0$, тобто

$$z(t) = \int_0^T G(t,s)\varphi_j(s)ds, \quad u(t) = \int_0^T R(t,s)\varphi_j(s)ds.$$

Звідси очевидним чином випливає правильність рівностей (29).

Далі, використовуючи формули (18), (44), (20), (43), (35) та властивість елементів матриць, даної та оберненої до неї, маємо

$$(Ah)(t) = \sum_{i=1}^p \sigma_i (A\eta_i)(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \varphi_i(t) = w(t),$$

$$\Phi_i(h) = \sum_{\nu=1}^p \sigma_\nu \Phi_i(\eta_\nu) = \sum_{j=1}^p \sum_{\nu=1}^p c_{i\nu}\beta_{\nu j} a_j = \alpha_i, \quad i = \overline{1,l}.$$

Отже, співвідношення (30) виконується.

Нарешті, оскільки для будь-якої функції вигляду

$$z(t) = \int_0^T G(t,s)y(s)ds \quad \forall y \in C[0,T] \tag{47}$$

згідно з формулами (45), (16) має місце зображення

$$z(t) = v(t) - \sum_{j=1}^p \eta_j(t) \int_0^T \Gamma_j(s)y(s)ds, \tag{48}$$

на підставі співвідношень (48), (15), (18), (46) та (36), (20), (43), (41) маємо

$$(Az)(t) = (Av)(t) - \sum_{j=1}^p (A\eta_j)(t) \int_0^T \Gamma_j(s)y(s)ds =$$

$$= y(t) - \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \int_0^T \Gamma_j(s)y(s)ds = y(t) + \int_0^T R(t,s)y(s)ds,$$

$$\Phi_i(z) = \Phi_i(v) - \sum_{\nu=1}^{p} \Phi_i(\eta_\nu) \int_0^T \Gamma_\nu(s) y(s) ds =$$

$$= b_i - \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{\nu=1}^{p} c_{i\nu} \beta_{\nu j} \right) \int_0^T \xi_j(s) y(s) ds = b_i - \int_0^T \xi_i(s) y(s) ds = 0.$$

Звідси, а також із (47) випливає правильність рівностей (31) та (32).

Лема 2. *Якщо однорідна задача (23), (24) має тільки тривіальний розв'язок, то для довільної функції* $x \in C[0,T]$*, яка задовольняє обмеження*

$$\Phi_i(x) = \alpha_i, \quad i = \overline{1,l}, \quad \int_0^T \psi_\nu(t)((Lx)(t) - f(t))dt = 0, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{49}$$

справджуються співвідношення

$$x(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)(Ax)(s)ds, \tag{50}$$

$$w(t) + \int_0^T R(t,s)(Ax)(s)ds = 0, \tag{51}$$

де функції h(t) та w(t) визначаються формулами (44).

Доведення. Покладемо в задачі (12), (13) $y(t) = (Ax)(t)$, в результаті чого матимемо задачу

$$(Az)(t) = u(t) + (Ax)(t), \tag{52}$$

$$\Phi_i(z) = \alpha_i, \quad i = \overline{1,l}, \quad \int_0^T \psi_\nu(t)((Lz)(t) - f(t))dt = 0, \quad \nu = \overline{1,r}. \tag{53}$$

За умови леми задача (52), (53) має єдиний розв'язок, який з урахуванням формул (27), (28), набирає вигляду

$$z(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)(Ax)(t)dt, \tag{54}$$

$$u(t) = w(t) + \int_0^T R(t,s)(Ax)(t)dt. \tag{55}$$

Нехай $v(t) = z(t) - x(t)$, тоді, по-перше, враховуючи обмеження (49), (53), маємо

$$\Phi_i(v) = 0, \quad i = \overline{1,l}, \quad \int_0^T \psi_\nu(t)(Lv)(t)dt = 0, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{56}$$

і, по-друге, рівняння (52) можна записати у вигляді

$$(Av)(t(= u(t). \tag{57}$$

Але згідно з умовою леми однорідна задача (57), (56) має лише тривіальний розв'язок $v(t) = 0, u(t) = 0$. Із останніх рівностей і формул (54), (55) правильність співвідношень (50), (51) випливає очевидним чином.

3. Умови сумісності задачі. За допомогою лем 1 та 2 можна встановити умови сумісності задачі (1), (2). Для цього поряд із досліджуваною задачею розглянемо інтегральне рівняння

$$y(t) = g(t) + \int_0^T M(t,s)y(s)ds, \tag{58}$$

в якому

$$g(t) = f(t) + (Bh)(t), \tag{59}$$

$$\int_0^T M(t,s)y(s)ds = \left(B\int_0^T G(\cdot,s)y(s)ds\right)(t). \tag{60}$$

Його можна формально отримати на основі формул (27) і

$$y(t) = f(t) + (Bz)(t), \tag{61}$$

де диференціальний вираз має вигляд (6). Справді, використовуючи формули (61), (27), (59) та (60), маємо

$$y(t) = f(t) + (Bh)(t) + \left(B\int_0^T G(\cdot,s)y(s)ds\right)(t) = g(t) + \int_0^T M(t,s)y(s)ds.$$

Теорема 1. *Якщо існує єдиний розв'язок допоміжної задачі з керуванням (12), (13), то задача (1), (2) сумісна лише тоді, коли виконується умова*

$$w(t) + \int_0^T R(t,s)y(s)ds = 0, \tag{62}$$

в якій $y \in C[0,T]$ — розв'язок інтегрального рівняння (58).

Доведення. Нехай задача (1), (2) сумісна, тобто існує функція $x^* \in C^m[0,T]$ така, що правильні рівності

$$(Lx^*)(t) = f(t), \quad \Phi_i(x^\star) = \alpha_i, \quad i = \overline{1,l}. \tag{63}$$

Оскільки обмеження

$$\int_0^T \psi_\nu(t)((Lx^*)(t) - f(t))dt = 0, \quad \nu = \overline{1,r},$$

справджуються очевидним чином, то виконуються всі умови леми 2, згідно з якою правильні співвідношення

$$x^*(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)(Ax^*)(s)ds, \tag{64}$$

$$w(t) + \int_0^T R(t,s)(Ax^\star)(s)ds = 0. \tag{65}$$

Нехай

$$y^*(t) = (Ax^*)(t), \tag{66}$$

тоді згідно з формулами (59), (60), (66), (64), (5) та (63) маємо

$$g(t) + \int\limits_0^T M(t,s)y^*(s)ds - y^*(t) =$$

$$= f(t) + (Bh)(t) + \left(B\int\limits_0^T G(\cdot,s)y^*(s)ds\right)(t) - y^*(t) =$$

$$= f(t) + (Bh)(t) + \left(B\int\limits_0^T G(\cdot,s)(Ax^\star)(s)ds\right)(t) - (Ax^*)(t) =$$

$$= f(t) + (Bx^*)(t) - (Ax^*)(t) = f(t) - (Lx^*)(t) = 0.$$

Отже, функція $y^* \in C[0,T]$, що визначається формулою (66), є розв'язком інтегрального рівняння (58), причому цей розв'язок, як випливає із рівності (65), задовольняє умову (62).

Нехай тепер існує розв'язок $y^* \in C[0,T]$ рівняння (58), який задовольняє умову (62), тобто правильні рівності

$$y^*(t) = g(t) + \int\limits_0^T M(t,s)y^*(s)ds, \tag{67}$$

$$w(t) + \int\limits_0^T R(t,s)y^*(s)ds = 0. \tag{68}$$

Побудуємо функцію

$$x^*(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)y^*(s)ds \tag{69}$$

і встановимо, що вона є розв'язком задачі (1), (2). Для цього використаємо формули (30), (32), за допомогою яких легко встановити, що виконуються обмеження (2), і формули

(5), (69), (59), (60), (30), (31), (67) та (68), на підставі яких маємо

$$f(t)-(Lx^*)(t) = f(t)+(Bx^*)(t)-(Ax^*)(t) =$$

$$= f(t)+(Bh)(t)+\left(B\int\limits_0^T G(\cdot,s)y^*(s)ds\right)(t)-$$

$$-(Ah)(t)-\left(A\int\limits_0^T G(\cdot,s)y^*(s)ds\right)(t) =$$

$$= g(t)+\int\limits_0^T M(t,s)y^*(s)ds - w(t) - y^*(t) - \int\limits_0^T R(t,s)y^*(s)ds = 0.$$

Отже, функція $x^* \in C^m[0,T]$, що визначається формулою (69), дійсно задовольняє рівняння (1) та обмеження (2), тобто задача (1), (2) сумісна.

Висновок 1. *Якщо виконується умова теореми 1, то однорідна задача*

$$(Lx)(t) = 0, \quad \Phi_i(x) = 0 \quad i = \overline{1,l},$$

має нетривіальний розв'язок тільки тоді, коли існує нетривіальний розв'язок однорідного рівняння

$$y(t) = \int\limits_0^T M(t,s)y(s)ds,$$

який задовольняє умову

$$\int\limits_0^T R(t,s)y(s)ds = 0.$$

Зауваження 1. Із формул (21), (35), (36), (42) та (43) безпосередньо випливає, що розв'язок рівняння (19) можна зобразити у вигляді

$$\lambda_i = \sigma_i - \int\limits_0^T \Gamma_i(s)y(s)ds, \quad i = \overline{1,p}. \tag{70}$$

Зауваження 2. На основі аналізу формул (44), (46) та (62) приходимо до висновку, що умова сумісності задачі (1), (2) рівносильна правильності рівностей

$$\int\limits_0^T \Gamma_i(s)y^*(s)ds = \sigma_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{71}$$

в яких $y^*(t)$ — розв'язок інтегрального рівняння (58).

Зауваження 3. Функцію $v(t)$, що фігурує в зображенні (17) і є частинним розв'язком рівняння (15), інколи доцільно визначати таким чином, щоб вона задовольняла частину або всі обмеження (2).

Приклад. Встановимо умови сумісності задачі

$$x'' + (1 - \cos 2t)x = f(t), \quad x(0) = x(2\pi) = 4, \quad x'(0) + x'(2\pi) = 0. \tag{72}$$

Для цього розглянемо допоміжну задачу

$$z'' + z = u(t) + y(t), \quad u(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t, \tag{73}$$

$$z(0) = z(2\pi) = 4, \quad z'(0) + z'(2\pi) = 0, \tag{74}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} (z'' + z - \cos 2t \cdot z)dt = 2\pi a, \quad a = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(s)ds, \tag{75}$$

тобто задачу (12) – (14), у якій $m = 2, n = 2, l = 3, r = 1, \varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = t, \psi_1(t) = 1$ і

$$(Az)(t) := z'' + z, \quad (Lz)(t) := z'' + z - \cos 2t \cdot z. \tag{76}$$

Невідому функцію $z(t)$ задачі (73) – (75) шукатимемо у вигляді

$$z(t) = \lambda_1\eta_1(t) + \lambda_2\eta_2(t) + \lambda_3\eta_3(t) + \lambda_4\eta_4(t) + v(t), \tag{77}$$

де покладемо

$$v(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin|t - s| \cdot y(s)ds, \tag{78}$$

і, врахувавши формули (18) та (76), візьмемо

$$\eta_1(t) = 1, \quad \eta_2(t) = t, \quad \eta_3(t) = \cos t, \quad \eta_4(t) = \sin t. \tag{79}$$

Для визначення невідомих параметрів підставимо функцію $z(t)$, яка визначається формулою (77), в обмеження (74), (75) і виконаємо відповідні обчислення. В результаті отримаємо систему рівнянь

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 4 - \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin s \cdot y(s)ds,$$

$$\lambda_1 + 2\pi\lambda_2 + \lambda_3 = 4 + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin s \cdot y(s)ds,$$

$$\lambda_1 + \lambda_4 = 0,$$

$$2\pi\lambda_1 + 2\pi^2\lambda_2 = 2\pi a - \int\limits_0^{2\pi} \Psi_1(s)y(s)ds,$$

де $\Psi_1(s) = 1 - \frac{1}{3}\cos s + \frac{1}{3}\cos 2s$, яка має єдиний розв'язок

$$\lambda_1 = a - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (\pi \sin s + \Psi_1(s))y(s)ds, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin s \cdot y(s)ds, \tag{80}$$

$$\lambda_3 = 4 - a + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Psi_1(s)y(s)ds, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin s \cdot y(s)ds. \tag{81}$$

Якщо тепер підставити розв'язок (80), (81) у співвідношення (77) і виконати елементарні перетворення з урахуванням явного вигляду функцій (78) та (79), то отримаємо зображення

$$z(t) = h(t) + \int\limits_0^{2\pi} G(t,s)y(s)ds, \tag{82}$$

де $h(t) = a + (4-a)\cos t$ і

$$G(t,s) = \frac{1}{2}\sin|t-s| + \frac{t - \pi - \sin t}{2\pi}\sin s + \frac{\cos t - 1}{2\pi}\Psi_1(s). \tag{83}$$

За теоремою 1 задача (72) буде сумісною лише при таких функціях $f(t)$, при яких інтегральне рівняння

$$y(t) = g(t) + \int\limits_0^{2\pi} \cos 2t \cdot G(t,s)y(s)ds, \tag{84}$$

яке отримується при підстановці зображення функції $z(t)$ (82) у співвідношення $y(t) = f(t) + \cos 2t \cdot z$, де

$$g(t) = f(t) + a\cos 2t + (4-a)\cos 2t \cos t, \tag{85}$$

має розв'язок $y^*(t)$, який згідно із зауваженням 2 справджує умови (71), тобто з урахуванням формул (70), (80) умови

$$\int_0^{2\pi} (3 - \cos s + \cos 2s) y^*(s) ds = 6\pi a, \quad \int_0^{2\pi} \sin s \cdot y^*(s) ds = 0. \tag{86}$$

Так, якщо $f(t) = 7 + \cos 4t$, то задача сумісна. Справді, у цьому випадку в обмеженні (75) $a = 7$ і $h(t) = 7 - 3\cos t$, а згідно з формулою (85)

$$g(t) = 7 + 7\cos 2t + \cos 4t - 3\cos 2t \cos t.$$

При такому вільному члені рівняння (84) має розв'язок $y^*(t) = 6 + 6\cos 2t$. В цьому можна впевнитись, якщо цю функцію підставити в рівняння (84) і виконати нескладні обчислення з урахуванням зображення (83). Оскільки

$$\int_0^{2\pi} (3 - \cos s + \cos 2s)(6 + 6\cos 2s) ds = 42\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin s \cdot (6 + 6\cos 2s) ds = 0$$

і $a = 7$, умови (86) виконуються. Отже, задача (72) сумісна і її розв'язок можна знайти за формулою

$$x^*(t) = h(t) + \int_0^{2\pi} G(t,s) y^*(s) ds = 7 - 3\cos t + \int_0^{2\pi} G(t,s)(6 + 6\cos 2s) ds = 6 - 2\cos 2t.$$

Якщо ж $f(t) = \frac{7}{\pi} t + \cos 4t$, то, виконавши аналогічні обчислення, по-перше, отримаємо також $a = 7$, $h(t) = 7 - 3\cos t$, але тепер

$$g(t) = \frac{7}{\pi} t + 7\cos 2t + \cos 4t - 3\cos 2t \cos t,$$

а по-друге, переконаємося в тому, що функція $\overline{y}(t) = \dfrac{7}{\pi}t-1+6\cos 2t$ — розв'язок рівняння (84). Оскільки

$$\int\limits_0^{2\pi}(3-\cos s+\cos 2s)\left(\frac{7}{\pi}s-1+6\cos 2s\right)ds = 42\pi,$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin s\cdot\left(\frac{7}{\pi}s-1+6\cos 2s\right)ds = -14,$$

то, очевидно, умови (86) не виконуються, а тому задача (72) несумісна. Зазначимо, що для цього випадку також

$$\overline{x}(t) = h(t)+\int\limits_0^{2\pi}G(t,s)\overline{y}(s)ds = 6-2\cos 2t,$$

але ця функція хоча і задовольняє обмеження (74), (75), не є розв'язком рівняння (72) при $f(t) = \dfrac{7}{\pi}t+\cos 4t$.

4. Умови збіжності методу. Встановимо умови збіжності методу (8)–(11). Для цього відмітимо, що вказаний метод зводиться до методу послідовних наближень

$$y_k(t) = g(t)+\int\limits_0^T M(t,s)y_{k-1}(s)ds \tag{87}$$

для інтегрального рівняння (58). Справді, за умови леми 1 задача (8), (9) має єдиний розв'язок, який зображається формулами

$$x_k(t) = h(t)+\int\limits_0^T G(t,s)y_k(s)ds, \tag{88}$$

$$u_k(t) = w(t)+\int\limits_0^T R(t,s)y_k(s)ds. \tag{89}$$

Якщо тепер підставити зображення (88), замінивши в ньому індекс k на $k-1$, у співвідношення (10) і врахувати позначення (59), (60), то отримаємо формулу (87).

Нехай

$$p_k(t) = \int\limits_0^T P(t,s)y_k(s)ds, \tag{90}$$

де ядро оператора ортогонального проектування на підпростір, породжений системою лінійно незалежних функцій $\{\varphi_j, 1 \leq j \leq n\}$, тобто функція $p_k(t)$, має вигляд

$$p_k(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j^k \varphi_j(t), \tag{91}$$

в якому невідомі параметри визначаються з умови

$$\int_0^T \varphi_i(t)(y_k(t) - p_k(t))dt = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді на підставі першої властивості (29) та формул (60), (91) неважко помітити, що

$$\int_0^T M(t, s)p_k(s)ds = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{92}$$

Нехай тепер

$$v_k(t) = y_k(t) - \int_0^T P(t, s)y_k(s)ds, \tag{93}$$

тоді, використавши рівності (90), (92), (93) з індексом $k-1$, співвідношенню (87) можна надати вигляду

$$y_k(t) = g(t) + \int_0^T M(t, s)v_{k-1}(s)ds. \tag{94}$$

Якщо у формулу (93) підставити зображення (94), то остаточно отримаємо

$$v_k(t) = q(t) + \int_0^T S(t, s)v_{k-1}(s)ds, \tag{95}$$

де

$$q(t) = g(t) - \int_0^T P(t, s)g(s)ds, \tag{96}$$

$$S(t, s) = M(t, s) - \int_0^T P(t, \xi)M(\xi, s)d\xi. \tag{97}$$

Таким чином, питання збіжності методу (8) – (11) звелось до питання збіжності методу послідовних наближень для інтегрального рівняння

$$v(t) = q(t) + \int_0^T S(t,s)v(s)ds, \tag{98}$$

збіжність якого, як відомо, залежить від величини спектрального радіуса оператора

$$(Sv)(t) := \int_0^T S(t,s)v(s)ds. \tag{99}$$

Зауваження 4. Рівняння (98) можна безпосередньо отримати із рівняння (58).

Для цього досить ввести функцію

$$v(t) = y(t) - \int_0^T P(t,s)y(s)ds, \tag{100}$$

використати співвідношення

$$\int_0^T G(t,s)y(s)ds = \int_0^T G(t,s)v(s)ds, \tag{101}$$

яке випливає із властивості (29), врахувати той факт, що на підставі формул (60), (101) рівність (58) запишеться у вигляді

$$y(t) = g(t) + \int_0^T M(t,s)v(t)ds, \tag{102}$$

підставити (102) у (100) та взяти до уваги позначення (96), (97).

Теорема 2. *Якщо спектральний радіус оператора (99)*

$$\rho(S) < 1 \tag{103}$$

і виконується співвідношення

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} u_k(t) = 0, \tag{104}$$

то існує єдиний розв'язок $x^* \in C^m[0,T]$ задачі (1), (2) і послідовність $\{x_k(t),\ k \geq 1\}$, побудована за методом (8) – (11), рівномірно збігається до цього розв'язку.

Доведення. Відмітимо, що, по-перше, за умов, накладених на коефіцієнти операторів (3), (4), (6) та праву частину рівняння (1), і властивостей функції $G(t,s)$ рівняння (58) або (98) можна розглядати у просторі $C[0,T]$, а по-друге, за умови (103), як відомо, існує єдиний розв'язок $v^* \in C[0,T]$ рівняння (98) і послідовність $\{v_k(t),\, k \geq t\}$, побудована за методом (95), рівномірно збігається до цього розв'язку, тобто

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} v_k(t) = v^*(t). \tag{105}$$

Виконавши граничний перехід у рівностях (94), (93) із урахуванням (105), отримаємо

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} y_k(t) y^*(t), \quad y^*(t) = g(t) + \int\limits_0^T M(t,s)v^*(s)ds, \tag{106}$$

$$v^*(t) = y^*(t) - \int\limits_0^T P(t,s)y^*(s)ds, \tag{107}$$

а перейшовши до границі в рівностях (87) – (89) і використавши (106), будемо мати

$$y^*(t) = g(t) + \int\limits_0^T M(t,s)y^*(s)ds, \tag{108}$$

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} x_k(t) = x^*(t), \quad x^*(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)y^*(s)ds, \tag{109}$$

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} u_k(t) = u^*(t), \quad u^*(t) = w(t) + \int\limits_0^T R(t,s)y^*(s)ds. \tag{110}$$

Оскільки за умови (104) $u^*(t) = 0$, із аналізу співвідношень (108), (110) випливає, що $y^*(t)$ — розв'язок рівняння (58) і справджується умова (62). Отже, згідно з теоремою 1 задача (1), (2) сумісна і її розв'язком є функція $x^*(t)$, яка визначається формулою (109).

За умови (103) задача (1), (2) має тільки єдиний розв'язок. Справді, якщо припустити існування крім розв'язку $x^*(t)$ розв'язку $\overline{x}(t)$ такого, що $\overline{x}(t) \neq x^*(t)$, то, поклавши $z(t) = x^*(t) - \overline{x}(t)$, ми отримали б, що однорідна задача

$$(Lz)(t) = 0, \quad \Phi_i(z) = 0, \quad i = \overline{1,l},$$

має нетривіальний розв'язок. Отже, згідно з висновком 1 однорідне рівняння

$$y(t) = \int\limits_0^T M(t,s)y(s)ds \tag{111}$$

також мало б нетривіальний розв'язок. Тоді, використавши формули (100), (101), (111), (60), (97), ми прийшли б до висновку, що однорідне рівняння

$$v(t) = \int_0^T S(t,s)v(s)ds$$

має нетривіальний розв'язок. Але цього не може бути за умови (103). Отже, розв'язок задачі (1), (2) єдиний.

Зауваження 5. Спектральні радіуси оператора S, що визначається формулою (99), та оператора

$$(My)(t) := \int_0^T M(t,s)y(s)ds \tag{112}$$

рівні, тобто правильна рівність

$$\rho(M) = \rho(S). \tag{113}$$

Справді, на основі формул (112), (92), (100), (97) та (99) неважко встановити, що

$$(M^{n+1}y)(t) = (MS^n v)(t) \qquad \forall y \in C[0,T]. \tag{114}$$

Так, для $n = 1$ маємо

$$(M^2y)(t) = \int_0^T M(t,\xi)\int_0^T M(\xi,s)y(s)dsd\xi =$$

$$= \int_0^T M(t,\xi)\left\{\int_0^T M(\xi,s)v(s)ds - \int_0^T P(\xi,\eta)\int_0^T M(\eta,s)v(s)dsd\eta\right\}d\xi =$$

$$= \int_0^T M(t,\xi)\int_0^T S(\xi,s)v(s)dsd\xi = (MSv)(t).$$

Продовжуючи цей процес далі, отримуємо рівність (114), на основі якої легко встановити правильність рівності (113).

Висновок 2. *Якщо $\rho(S) < 1$ і задача (1), (2) сумісна, то умова (104) теореми 2 виконується.*

Справді, якщо вихідна задача сумісна, то згідно з теоремою 1 існує розв'язок $y^*(t)$ інтегрального рівняння (58) і справджується умова

$$w(t) + \int_0^T R(t,s)y^*(s)ds = 0. \tag{115}$$

Далі, за умови $\rho(S) < 1$ цей розв'язок єдиний, оскільки згідно з рівністю (113) $\rho(M) < 1$, і, як встановлено при доведенні теореми 2, правильна рівність

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} u_k(t) = w(t) + \int_0^T R(t,s)y^*(s)ds. \tag{116}$$

Із співвідношень (115) та (116) очевидним чином випливає

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} u_k(t) = 0.$$

Отже, умова (104) виконується.

Зауваження 6. Збільшення числа координатних функцій $\{\varphi_i(t), 1 \le i \le n\}$ та $\{\psi_\nu(t), 1 \le \nu \le n+m-l\}$, тобто число n, істотно впливає на зменшення спектрального радіуса $\rho(S)$.

5. Оцінки похибки. Нехай для довільної функції $y \in C[0,T]$ виконуються нерівності

$$\left|\int_0^T G(t,s)y(s)ds\right|^2 \le \beta^2(t)\int_0^T |v(s)|^2ds, \tag{117}$$

$$\int_0^T \left|\int_0^T S(t,s)v(s)ds\right|^2 dt \le q^2 \int_0^T |v(s)|^2ds, \tag{118}$$

де функція $v(t)$ має вигляд (100). Зазначимо, що з урахуванням співвідношення (101) вказані нерівності будуть виконуватись, якщо в них покласти

$$\beta^2(t) = \int_0^T |G(t,s)|^2ds, \quad q^2 = \int_0^T\int_0^T |S(t,s)|^2dtds.$$

Теорема 3. *Якщо задача (1), (2) сумісна і в нерівності (118) $q < 1$, то ця задача має тільки єдиний розв'язок $x^*(t)$ і справедливі оцінки похибки*

$$|x^*(t) - x_k(t)| \le \beta(t)q^k\|v^* - v_0\|, \tag{119}$$

$$|x^{\bullet}(t) - x_k(t)| \leq \frac{\beta(t)q^{k-\nu}}{1-q}\|v_{\nu+1} - v_\nu\|, \quad 0 \leq \nu \leq k-1, \tag{120}$$

де $v^*(t)$ *та* $v_k(t)$ *— точний та наближений, отриманий за методом (95), розв'язки рівняння (98),* $x_k(t)$ *— функція, знайдена за методом (8)–(11), а* $\|\cdot\|$ *— норма в* $L_2[0,T]$.

Доведення. Оскільки рівняння можна розглядати в просторі $L_2[0,T]$, то, як відомо, за умови $q < 1$ послідовність $\{v_k(t),\, k \geq 1\}$, побудована за методом (95), збігається до єдиного розв'язку $v^*(t)$ рівняння (98) і справедливі оцінка

$$\|v^* - v_k\| \leq q^k\|v^* - v_0\|, \tag{121}$$

що характеризує швидкість збіжності методу, та конструктивна оцінка

$$\|v^* - v_k\| \leq \frac{q^{k-\nu}}{1-q}\|v_{\nu+1} - v_\nu\|, \quad 0 \leq \nu \leq k-1. \tag{122}$$

За умови теореми, очевидно, $\rho(S) \leq q < 1$, отже, враховуючи висновок 2, бачимо, що виконуються всі умови теореми 2, згідно з якою існує єдиний розв'язок $x^*(t)$ задачі (1), (2) і правильне співвідношення (109), на основі якого та формули (88) маємо

$$x^*(t) - x_k(t) = \int\limits_0^T G(t,s)(y^*(s) - y_k(s))ds. \tag{123}$$

Використаємо тепер співвідношення (123), (93) та (107), за допомогою яких і нерівності (117) отримаємо оцінку

$$|x^{\star}(t) - x_k(t)| \leq \beta(t)\|v^* - v_k\|. \tag{124}$$

Із нерівностей (124) та (121), (122) очевидним чином випливає правильність оцінок (119) та (120).

Зауваження 7. За умови теореми 3 правильна оцінка

$$|u_k(t)| \leq c(t)q^{k-1}\|v^* - v_0\|, \quad c(t) > 0, \tag{125}$$

яка характеризує швидкість збіжності послідовності $\{u_k(t),\, k \geq 1\}$ до нуля.

Справді, із формул (89), (115) та (87), (108) легко отримати співвідношення

$$u_k(t) = \int\limits_0^T R(t,\xi)\int\limits_0^T M(\xi,s)(y_{k-1}(s) - y^*(s))dsd\xi,$$

яке запишемо у вигляді

$$u_k(t) = \int\limits_0^T W(t,s)(y_{k-1}(s) - y^*(s))ds, \tag{126}$$

де

$$W(t,s) = \int_0^T R(t,\xi)M(\xi,s)d\xi.$$

Нехай $c(t)$ — функція така, що для довільної функції $y(t)$ справджується нерівність

$$\left|\int_0^T W(t,s)y(s)ds\right|^2 \le c^2(t)\int_0^T |v(s)|^2 ds, \tag{127}$$

де функція $v(t)$ має вигляд (100). Тоді на підставі співвідношень (126), (127), (93) та (107) маємо

$$|u_k(t)| \le c(t)\|v^* - v_{k-1}\|,$$

або, підсиливши цю нерівність за допомогою оцінки (121), отримаємо

$$|u_k(t)| \le c(t)q^{k-1}\|v^* - v_0\|.$$

Отже, оцінка (125) правильна.

Зауваження 8. Запропонований метод без істотних змін можна застосувати до диференціальних рівнянь з обмеженнями, коефіцієнти яких належать простору $L_p(0,T)$, а також до інтегральних, інтегро-диференціальних чи диференціально-функціональних рівнянь та їх систем з обмеженнями.

1. *Соколов Ю. Д.* Метод осреднения функциональных поправок. — Киев: Наук. думка, 1967. — 336 с.
2. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1968. — 224 с.
3. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Выща шк., 1987. — 288 с.
5. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.
6. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 82 – 96.
7. *Лучка А. Ю.* Методи розв'язання рівнянь з обмеженнями і проекційно-ітеративний метод Ю. Д. Соколова // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1501 – 1509.
8. *Лучка А. Ю.* Методи дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом // Там же. — 1998. — **50**, № 2. — С. 189 – 194.
9. *Лучка А. Ю.* Диференціальні рівняння з обмеженнями // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці: Прут, 2002. — Вип. 8. — С. 97 – 112.

Одержано 20.04.2002