УДК 517.581

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ЗАСТОСУВАННЯ (τ, β)-УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ЛЕЖАНДРА ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)$

Г. О. Южакова

Нац. техн. ун-т України „КПІ”
Україна, 03056, Київ, пр. Перемоги, 37

We consider the (τ, β)-generalized Legendre function ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)$, formulate and prove a theorem on composition identities and differentiation formulas for this function. In the proof, we use known and new properties of the Wright (τ, β)-generalized Gaussian hypergeometric function ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; \xi)$ and the relation between the functions ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu$ and ${}_2F_1^{\tau,\beta}$.

Рассмотрена (τ, β)-обобщенная (по Райту) функция Лежандра ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)$, сформулированы и доказаны теоремы о композиционных соотношениях и формулах дифференцирования для этой функции. При доказательстве использованы известные и новые свойства (τ, β)-обобщенной (по Райту) гипергеометрической функции Гаусса ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; \xi)$ и связь функций ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu$ и ${}_2F_1^{\tau,\beta}$.

Вступ. У зв’язку з широкими потребами практичного застосування диференціальних та інтегральних рівнянь у різноманітних областях теоретичних і прикладних наук за останнє півстоліття різко зріс інтерес до спеціальних функцій різної природи та складності (див., наприклад, [1 – 3]). Особливо важливим є використання спеціальних функцій при розв’язанні крайових задач у багатьох галузях прикладної математики та фізики, дослідженні рядів та ін. Спеціальні функції містяться в ядрах різноманітних інтегральних перетворень, які є ефективним інструментом розв’язання як теоретичних, так і практичних задач, зокрема, у теорії ймовірності та математичній статистиці, теорії моделювання, астрофізиці, квантовій механіці, біомедицині та ін.

Із великої низки спеціальних функцій особливо важливу роль відіграють гіпергеометрична функція Гаусса та її частинні випадки (функції Бесселя, Лежандра, класичні ортогональні многочлени та ін.).

Одним із найпоширеніших частинних випадків гіпергеометричної функції є функції Лежандра, що виникають при розв’язанні граничних задач у сферичних, тороїдальних та інших координатах.

У XX ст. значно розширилось вивчення, дослідження та узагальнення гіпергеометричних функцій, а також функцій, що через них виражаються. Зокрема, за останні десятиліття активізувалося вивчення та використання узагальнених спеціальних функцій за Райтом (див., наприклад, [2, 4 – 6]) з метою подальшого їх застосування в теорії та на практиці.

У даній роботі розглянуто деякі властивості та застосування (τ, β)-узагальнених приєднаних функцій Лежандра першого роду.

Постановка задачі. Розглянемо (τ, β)-узагальнену (за Райтом) приєднану функцію Лежандра першого роду у вигляді

$$ {}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right), \tag{1} $$

де $|1-z| < 2, \mu \neq 1,2,\ldots, {}_2F_1^{\tau,\beta}$ — (τ,β)-узагальнена гіпергеометрична функція Гаусса [6]

$$ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\xi) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}{}_2\Psi_1\left[\begin{array}{l}(a,1),(c,\tau);\\ (c,\beta);\end{array}\Big|\xi\, t^\tau\right]dt. \tag{2} $$

В (2) $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, b > 0$; $\tau\in\mathbb{R}, \tau > 0$; $\beta\in\mathbb{R}, \beta>0$; $\tau-\beta\le 1$; $a,b,c\in\mathbb{C}$, $\Gamma(c)$ — класична гамма-функція [7]; ${}_2\Psi_1$ — функція Фокса – Райта [2]. Якщо в (1) і (2) покласти $\beta=\tau$, то одержимо функцію ${}^\tau P_\nu^\mu(z)$ [8]; при $\beta=\tau=1$ маємо класичну приєднану функцію Лежандра першого роду $P_\nu^\mu(z)$ [1].

Використовуючи властивості (τ,β)-узагальненої функції Гаусса, будемо вивчати композиційні співвідношення для (τ,β)-узагальнених приєднаних функцій Лежандра ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)$.

Серед відомих [6] властивостей (τ,β)-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\xi)$ відзначимо її зображення у вигляді ряду

$$ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\xi) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\beta)}\frac{\xi^n}{n!} \tag{3} $$

та співвідношення

$$ (c-a\beta-1)\,{}_2F_1^{\tau,\beta} = (c-1)\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(c-1) - a\beta\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1), \tag{4} $$

$$ (b-a\tau)\,{}_2F_1^{\tau,\beta} = b\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(b+1) - a\tau\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1), \tag{5} $$

$$ \begin{aligned} \Gamma(b)\Gamma(c+\beta)\,{}_2F_1^{\tau,\beta} &= \Gamma(b)\Gamma(c+\beta)\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1) - \\ &- \xi\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,b+\tau;c+\beta;\xi), \end{aligned} \tag{6} $$

де

$$ {}_2F_1^{\tau,\beta} = {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\xi), $$

$$ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1) = {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,b;c;\xi), $$

$$ {}_2F_1^{\tau,\beta}(b+1) = {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b+1;c;\xi), $$

$$ {}_2F_1^{\tau,\beta}(c-1) = {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c-1;\xi). $$

Крім того, справедливою є така лема.

Лема. *При умовах існування функції* ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,\ b;\ c;\ \xi)$ *мають місце такі співвідношення:*

$$c\ {}_2F_1^{\tau,\beta} = (c-b+a(\tau-\beta))\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(c+1)+$$
$$+\,b\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(b+1,\ c+1)-a(\tau-\beta)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,\ c+1), \tag{7}$$

$$(c-b-1+a(\tau-\beta))\ {}_2F_1^{\tau,\beta} = (c-1)\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(c-1)-$$
$$-\,b\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(b+1)+a(\tau-\beta)\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1), \tag{8}$$

де

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,\ c+1) = {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,\ b;\ c+1;\ \xi),$$
$${}_2F_1^{\tau,\beta}(b+1,\ c+1) = {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,\ b+1;\ c+1;\ \xi).$$

Доведення. Формули (7) і (8) встановимо за допомогою використання зображення (3) функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,\ b;\ c;\ \xi)$ у вигляді ряду та властивості (6).

Так, для співвідношення (7) виконаємо низку перетворень суми $(c-b)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(c+1)+$ $+b\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(b+1,\ c+1)$:

$$(c-b)\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(c+1)+b\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(b+1,\ c+1) =$$
$$= (c-b)\,\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+1+n\beta)}\,\frac{\xi^n}{n!}+$$
$$+\,b\,\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\ \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+1+n\tau)}{\Gamma(c+1+n\beta)}\frac{\xi^n}{n!} =$$
$$= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+1+n\beta)}\,\frac{\xi^n}{n!}\,[(c-b)\Gamma(b+n\tau)+\Gamma(b+1+n\tau)] =$$
$$= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+1+n\beta)}\frac{\xi^n}{n!}\,[(c-b)\Gamma(b+n\tau)+(b+n\tau)\Gamma(b+n\tau)] =$$
$$= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+1+n\beta)}(c+n\tau)\frac{\xi^n}{n!} =$$
$$= \frac{c\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{(c+n\beta)\Gamma(c+n\beta)}(c+n\tau)\frac{\xi^n}{n!} =$$
$$= \frac{c\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\beta)}\left(1+\frac{n(\tau-\beta)}{c+n\beta}\right)\frac{\xi^n}{n!} =$$

$$= \frac{c\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\beta)}\,\frac{\xi^n}{n!}+$$

$$+\frac{c\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{(c+n\beta)\Gamma(c+n\beta)}\,(\tau-\beta)\frac{\xi^n}{n!}\,n=$$

$$= c\,{}_2F_1^{\tau,\beta}+(\tau-\beta)\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+1+n\beta)}\,\frac{\xi^n}{n!}=$$

$$= c\,{}_2F_1^{\tau,\beta}+(\tau-\beta)\,\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+1+k)\Gamma(b+(k+1)\tau)}{\Gamma(c+1+(k+1)\beta)}\,\frac{\xi^{k+1}}{k!}=$$

$$= c\,{}_2F_1^{\tau,\beta}+(\tau-\beta)\xi\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(c+1+\beta)}\,\frac{\Gamma(c+1+\beta)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+\tau)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+1+n)\Gamma(b+\tau+n\tau)}{\Gamma(c+1+\beta+n\beta)}\,\frac{\xi^n}{n!}=$$

$$= c\,{}_2F_1^{\tau,\beta}+(\tau-\beta)\xi\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}\,\frac{\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b)}\,\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+1+\beta)}\times$$

$$\times\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,\ b+\tau;\ c+1+\beta;\ \xi)=$$

$$= c\,{}_2F_1^{\tau,\beta}+a\xi(\tau-\beta)\,\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+1+\beta)}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,\ b+\tau;\ c+1+\beta;\ \xi).$$

Тут при перетвореннях виразів було використано властивість гамма-функції $\Gamma(a+1)=$ $=a\Gamma(a)$ [7]. Отже, маємо

$$(c-b)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(c+1)+b\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(b+1,\ c+1)=$$

$$= c\,{}_2F_1^{\tau,\beta}+a\xi(\tau-\beta)\,\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+1+\beta)}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,\ b+\tau;\ c+1+\beta;\ \xi). \tag{9}$$

З властивості (6) знаходимо

$$\xi\,\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c+1+\beta)}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,\ b+\tau;\ c+1+\beta;\ \xi)={}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,\ c+1)-{}_2F_1^{\tau,\beta}(c+1). \tag{10}$$

Підставивши (10) у вираз (9), після спрощення отримаємо формулу (7).

Для доведення співвідношення (8) розглянемо різницю $(c-1)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(c-1)-b\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(b+$ $+1)$:

$$(c-1)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(c-1)-b\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(b+1)=$$

$$=\frac{(c-1)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c-1+n\beta)}\frac{\xi^n}{n!}-\frac{b\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}\times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+1+n\tau)}{\Gamma(c+n\beta)} \frac{\xi^n}{n!} =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a+n) \frac{\xi^n}{n!} \left[\frac{\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c-1+n\beta)} - \frac{\Gamma(b+1+n\tau)}{\Gamma(c+n\beta)} \right] =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a+n) \frac{\xi^n}{n!} \left[\frac{(c-1+n\beta)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\beta)} - \frac{(b+n\tau)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\beta)} \right] =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\beta)} (c-b-1+n(\beta-\tau)) \frac{\xi^n}{n!} =$$

$$= \frac{(c-b-1)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\beta)} \frac{\xi^n}{n!} +$$

$$+ \frac{(\beta-\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\beta)} \frac{\xi^n}{n!} n =$$

$$= (c-b-1)\, {}_2F_1^{\tau,\beta} + (\beta-\tau) \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\beta)} \frac{\xi^n}{(n-1)!} =$$

$$= (c-b-1)\, {}_2F_1^{\tau,\beta} + (\beta-\tau) \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1+k)\Gamma(b+(k+1)\tau)}{\Gamma(c+(k+1)\beta)} \frac{\xi^{k+1}}{k!} =$$

$$= (c-b-1)\, {}_2F_1^{\tau,\beta} + (\beta-\tau)\xi \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+\beta)} \frac{\Gamma(c+\beta)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+\tau)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1+k)\Gamma(b+\tau+k\tau)}{\Gamma(c+\beta+k\beta)} \frac{\xi^k}{k!} =$$

$$= (c-b-1)\, {}_2F_1^{\tau,\beta} + (\beta-\tau)\xi a \frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\beta)}\, {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,\; b+\tau;\; c+\beta;\; \xi).$$

Тут при перетвореннях виразів також було використано вже згадувану властивість гамма-функції $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ [7]. Таким чином,

$$(c-1)\; {}_2F_1^{\tau,\beta}(c-1) - b\; {}_2F_1^{\tau,\beta}(b+1) = (c-b-1)\, {}_2F_1^{\tau,\beta} +$$
$$+ a\xi(\beta-\tau) \frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\beta)}\, {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,\; b+\tau;\; c+\beta;\; \xi). \qquad (11)$$

На підставі властивості (6) можна записати

$$\xi\,\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\beta)}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,\ b+\tau;\ c+\beta;\ \xi) = {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1) - {}_2F_1^{\tau,\beta}. \tag{12}$$

Переписавши (11) з урахуванням (12), після спрощення дістанемо формулу (8).

Зауважимо, що при $\beta=\tau$ співвідношення (7) і (8) збігаються з відомими властивостями функції ${}_2F_1^{\tau}(a,\ b;\ c;\ \xi)$ [9].

Розглянемо тепер композиційні співвідношення для (τ,β)-узагальненої (за Райтом) приєднаної функції Лежандра першого роду ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)$.

Теорема 1. *При умовах існування (τ,β)-узагальненої (за Райтом) приєднаної функції Лежандра першого роду ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)$ мають місце такі співвідношення:*

$$\begin{aligned}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac12}\,{}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z) &= -(\mu+\nu+\nu(\tau-\beta))\,{}^{\tau,\beta}P_\nu^{\mu-1}(z)-\\ &-\frac{1}{\beta}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac12}\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu+1}^{\mu}(z)+\left(\nu+1+\frac{1-\mu}{\beta}\right)\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu+1}^{\mu-1}(z)+\\ &+(\tau-\beta)\left[\left(\nu+\frac{(\mu-1)\tau}{\beta}\right)\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu-1}^{\mu-1}(z)+\frac{\tau}{\beta}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac12}\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu-1}^{\mu}(z)\right],\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}(\mu+\nu+1+\nu(\tau-\beta))\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac12}\,{}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z) &= -{}^{\tau,\beta}P_\nu^{\mu+1}(z)-\\ &-\frac{1}{\beta}\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu+1}^{\mu+1}(z)+\left(\nu+1-\frac{\mu}{\beta}\right)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac12}\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu+1}^{\mu}(z)+\\ &+(\tau-\beta)\left[\frac{\tau}{\beta}\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu-1}^{\mu+1}(z)+\left(\nu+\frac{\mu\tau}{\beta}\right)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac12}\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu-1}^{\mu}(z)\right],\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}(\nu+1+\nu\tau)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac12}\,{}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z) &= -\frac{1}{\beta}\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu+1}^{\mu+1}(z)+\left(\nu+1-\frac{\mu}{\beta}\right)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac12}\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu+1}^{\mu}(z)+\\ &+\tau\left(\nu+\frac{\mu\tau}{\beta}\right)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac12}\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu-1}^{\mu}(z)+\frac{\tau^2}{\beta}\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu-1}^{\mu+1}(z),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}(\nu\beta-\mu)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac12}\,{}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z) &= {}^{\tau,\beta}P_\nu^{\mu+1}(z)+\\ &+(\nu\beta+\mu\tau)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac12}\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu-1}^{\mu}(z)+\tau\,{}^{\tau,\beta}P_{\nu-1}^{\mu+1}(z).\end{aligned} \tag{16}$$

Доведення. 1. Використаємо властивість (7) (τ, β)-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,\ b;\ c;\ \xi)$ при $a = -\nu$, $b = \nu + 1$, $c = 1 - \mu$ та $\xi = \dfrac{1-z}{2}$. Дістанемо

$$(1-\mu)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) =$$

$$= (-\mu - \nu - \nu(\tau - \beta))\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +$$

$$+ (\nu+1)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+2;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +$$

$$+ \nu(\tau - \beta)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{17}$$

Співвідношення (4) запишемо у вигляді

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1) = \frac{c-1}{a\beta}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(c-1) - \frac{c - a\beta - 1}{a\beta}\,{}_2F_1^{\tau,\beta} \tag{18}$$

і скористаємось формулою (18) для функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+2;\ 2-\mu;\ \dfrac{1-z}{2}\right)$ із (17) при $a = -\nu - 1$, $b = \nu + 2$, $c = 2 - \mu$, $\xi = \dfrac{1-z}{2}$:

$${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+2;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) = \frac{1-\mu}{-(\nu+1)\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1-\mu+(\nu+1)\beta}{(\nu+1)\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{19}$$

Зі співвідношення (5) дістанемо

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(b+1) = \frac{b - a\tau}{b}\,{}_2F_1^{\tau,\beta} + \frac{a\tau}{\beta}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1). \tag{20}$$

Тоді, поклавши у (20) $a = -\nu + 1$, $b = \nu$, $c = 2 - \mu$, $\xi = \dfrac{1-z}{2}$, функцію

$${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)$$

із (17) можемо записати так:

$${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) = \frac{\nu+(\nu-1)\tau}{\nu}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) -$$

$$- \frac{(\nu-1)\tau}{\nu}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+2,\ \nu;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{21}$$

Підставимо вирази (19) та (21) у (17) і після спрощення отримаємо

$$
\begin{aligned}
(1-\mu)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) = \\
&= (-\mu-\nu-\nu(\tau-\beta))\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) - \\
&- \frac{1-\mu}{\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) + \\
&+ \frac{1-\mu+(\nu+1)\beta}{\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) + \\
&+ (\tau-\beta)(\nu+(\nu-1)\tau)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) - \\
&- (\tau-\beta)(\nu-1)\tau\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+2,\ \nu;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right).
\end{aligned} \tag{22}
$$

Із (18) при $a = -\nu+1,\ b=\nu,\ c = 2-\mu,\ \xi = \dfrac{1-z}{2}$ одержимо зображення функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+2,\ \nu;\ 2-\mu;\ \dfrac{1-z}{2}\right)$ із (22) у вигляді

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+2,\ \nu;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) = \\
&= \frac{1-\mu}{(-\nu+1)\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) - \\
&- \frac{1-\mu-(-\nu+1)\beta}{(-\nu+1)\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right).
\end{aligned} \tag{23}
$$

Підставивши (23) у (22) і спростивши одержаний вираз, дістанемо

$$
\begin{aligned}
(1-\mu)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) = \\
&= -(\mu+\nu+\nu(\tau-\beta))\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) - \\
&- \frac{1-\mu}{\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) + \\
&+ \left(\nu+1+\frac{1-\mu}{\beta}\right)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +
\end{aligned}
$$

$$+ (\tau - \beta)\left(\nu + \frac{(\mu-1)\tau}{\beta}\right)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +$$

$$+ (\tau - \beta)\frac{(1-\mu)\tau}{\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{24}$$

Помножимо обидві частини рівності (24) на вираз $\dfrac{1}{\Gamma(2-\mu)}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu-1}{2}}$ і врахуємо, що $\Gamma(2-\mu) = (1-\mu)\Gamma(1-\mu)$ [7]. Тоді, використовуючи зв'язок (1) функцій ${}_2F_1^{\tau,\beta}$ і ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu$, після перетворень отримаємо композиційне співвідношення (13).

2. Покладемо у формулі (8) $a = -\nu$, $b = \nu+1$, $c = 1-\mu$, $\xi = \dfrac{1-z}{2}$ і після спрощення будемо мати

$$(\mu+\nu+1+\nu(\tau-\beta))\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) =$$

$$= \mu\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +$$

$$+ (\nu+1)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +$$

$$+ \nu(\tau-\beta)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{25}$$

Запишемо функцію ${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \dfrac{1-z}{2}\right)$ із (25) у вигляді

$${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) = {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1+1,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right), \tag{26}$$

тоді згідно з (18) для $a = -\nu-1$, $b = \nu+2$, $c = 1-\mu$, $\xi = \dfrac{1-z}{2}$ із (26) одержимо

$${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) =$$

$$= \frac{\mu}{(\nu+1)\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +$$

$$+ \frac{-\mu+(\nu+1)\beta}{(\nu+1)\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{27}$$

Функцію ${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \dfrac{1-z}{2}\right)$ із (25) подамо за формулою (20), поклавши в ній $a = -\nu + 1, b = \nu, c = 1 - \mu, \xi = \dfrac{1-z}{2}$:

$$
{}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) =
$$

$$
= \frac{\nu+(\nu-1)\tau}{\nu}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) -
$$

$$
- \frac{(\nu-1)\tau}{\nu}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+2,\ \nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{28}
$$

Перепишемо співвідношення (25) з урахуванням виразів (27) і (28):

$$
(\mu+\nu+1+\nu(\tau-\beta))\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) =
$$

$$
= \mu\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +
$$

$$
+ \frac{\mu}{\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +
$$

$$
+ \frac{-\mu+(\nu+1)\beta}{\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +
$$

$$
+ (\tau-\beta)(\nu+(\nu-1)\tau)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) -
$$

$$
- (\tau-\beta)(\nu-1)\tau\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+2,\ \nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{29}
$$

Функцію ${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+2,\ \nu;\ 1-\mu;\ \dfrac{1-z}{2}\right)$ із (29) за допомогою формули (18) при $a = -\nu + 1, b = \nu, c = 1 - \mu, \xi = \dfrac{1-z}{2}$ запишемо у вигляді

$$
{}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+2,\ \nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) = \frac{-\mu}{(-\nu+1)\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +
$$

$$
+ \frac{-\mu+(\nu-1)\beta}{(\nu-1)\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{30}
$$

Підставимо вираз (30) у співвідношення (29) і після спрощень дістанемо

$$(\mu+\nu+1+\nu(\tau-\beta))\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)=$$

$$=\mu\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)+$$

$$+\frac{\mu}{\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)+$$

$$+\left(\nu+1-\frac{\mu}{\beta}\right)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)-$$

$$-(\tau-\beta)\frac{\tau\mu}{\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)+$$

$$+(\tau-\beta)\left(\nu+\frac{\tau\mu}{\beta}\right)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{31}$$

Помноживши вираз (31) на $\dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu+1}{2}}$ і врахувавши властивість гамма-функції $\Gamma(1-\mu)=-\mu\Gamma(-\mu)$ [7] та зв'язок (1) функцій ${}_2F_1^{\tau,\beta}$ і ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu$, після спрощень отримаємо композиційне співвідношення (14).

3. Скористаємось відомою [6] властивістю (5) функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,\ b;\ c;\ \xi)$ для $a=-\nu$, $b=\nu+1$, $c=1-\mu$, $\xi=\dfrac{1-z}{2}$:

$$(\nu+1+\nu\tau)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)=$$

$$=(\nu+1)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)+$$

$$+\nu\tau\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{32}$$

Функцію ${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \dfrac{1-z}{2}\right)$ із (32) подамо за формулою (28) з урахуванням виразу (30) для функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+2,\ \nu;\ 1-\mu;\ \dfrac{1-z}{2}\right)$ із (28). В результаті після спрощень дістанемо

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)=\\
&=\left(1+\frac{\mu\tau}{\nu\beta}\right){}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)-\\
&-\frac{\mu\tau}{\nu\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Використавши співвідношення (18) для $a=-\nu-1$, $b=\nu+2$, $c=1-\mu$, $\xi=\dfrac{1-z}{2}$, отримаємо

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)=\\
&=\frac{\mu}{(\nu+1)\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)+\\
&+\frac{-\mu+(\nu+1)\beta}{(\nu+1)\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Підставимо вирази (33) і (34) в (32):

$$
\begin{aligned}
&(\nu+1+\nu\tau)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)=\\
&=\frac{\mu}{\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)+\\
&+\left(\nu+1-\frac{\mu}{\beta}\right)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)+\\
&+\tau\left(\nu+\frac{\mu\tau}{\beta}\right)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)-\\
&-\frac{\mu\tau^2}{\beta}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Помноживши одержану рівність (35) на $\dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu+1}{2}}$, після врахування властивості $\Gamma(1-\mu)=-\mu\Gamma(-\mu)$ гамма-функції [7] і зв'язку (1) між функціями ${}_2F_1^{\tau,\beta}$ і ${}^{\tau,\beta}P_{\nu}^{\mu}$, отримаємо композиційне співвідношення (15).

4. Використаємо відому [6] властивість (4) функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,\ \ b;\ \ c;\ \ \xi)$ при $a = -\nu$, $b = \nu + 1$, $c = 1 - \mu$, $\xi = \dfrac{1-z}{2}$. Дістанемо

$$(\nu\beta - \mu)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) =$$

$$= -\mu\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +$$

$$+ \nu\beta\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{36}$$

Підставимо в (36) вираз (33) для функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \dfrac{1-z}{2}\right)$:

$$(\nu\beta - \mu)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) = -\mu\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +$$

$$+ (\nu\beta + \mu\tau)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) -$$

$$- \mu\tau\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{37}$$

Тепер, помноживши рівність (37) на вираз

$$\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu+1}{2}},$$

врахувавши властивість $\Gamma(1-\mu) = -\mu\Gamma(-\mu)$ [7] гамма-функції і зображення (1) (τ,β)-узагальненої функції Лежандра ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)$ через (τ,β)-узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,\ b;\ c;\ \xi)$, дістанемо композиційне співвідношення (16).

Зазначимо, що при $\beta = \tau$ формули (13)–(16) збігаються з композиційними співвідношеннями (8)–(11) [8] для τ-узагальненої (за Райтом) функції Лежандра ${}^{\tau}P_\nu^\mu(z)$, яка є окремим випадком (τ,β)-узагальненої функції Лежандра для $\beta = \tau$.

Теорема 2. *Для (τ,β)-узагальненої функції Лежандра ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)$ при умовах $|1-z| < 2$, $\mu \neq 1, 2, \ldots, \mu, \nu \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,(1-\mu) > \mathrm{Re}\,(1+\nu) > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\tau - \beta \leq 1$, мають місце диференціальні формули*

$$(z-1)\frac{d}{dz}\ {}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z) = -\left(\frac{\mu}{z+1} + \nu\right)\ {}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z) +$$

$$+ \left(\frac{\mu\tau}{\beta} + \nu\right)\ {}^{\tau,\beta}P_{\nu-1}^\mu(z) + \frac{\tau}{\beta}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}}\ {}^{\tau,\beta}P_{\nu-1}^{\mu+1}(z), \tag{38}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}-\nu}}{(z+1)^{\frac{\mu}{2}}}\ {}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)\right]=$$
$$=-\frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}-\nu-1}}{(z+1)^{\frac{\mu}{2}}}\left[\left(\nu+\frac{\mu\tau}{\beta}\right){}^{\tau,\beta}P_{\nu-1}^\mu(z)+\frac{\tau}{\beta}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}}\ {}^{\tau,\beta}P_{\nu-1}^{\mu+1}(z)\right]. \quad (39)$$

Доведення. 1. Використовуючи зображення (3) (τ,β)-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,\ b;\ c;\ \xi)$ у вигляді ряду, нескладно пересвідчитись, що для довільних $p,q\in\mathbb{R}$ справджуються формули диференціювання

$$\frac{d}{d\xi}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,\ b;\ c;\ p\xi+q)=pa\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\beta)}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,\ b+\tau;\ c+\beta;\ p\xi+q), \quad (40)$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[(p\xi+q)^a\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,\ b;\ c;\ p\xi+q)\right]=ap(p\xi+q)^{a-1}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,\ b;\ c;\ p\xi+q). \quad (41)$$

Зокрема, для $\xi=z$, $p=-\dfrac{1}{2}$, $q=\dfrac{1}{2}$ формула (40) набирає вигляду

$$\frac{d}{dz}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a,\ b;\ c;\ \frac{1-z}{2}\right)=-\frac{a}{2}\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\beta)}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a+1,\ b+\tau;\ c+\beta;\ \frac{1-z}{2}\right). \quad (42)$$

З урахуванням властивості (6) (τ,β)-узагальненої гіпергеометричної функції співвідношення (42) запишемо у формі

$$\frac{d}{dz}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a,\ b;\ c;\ \frac{1-z}{2}\right)=\frac{a}{z-1}\left[{}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a+1,\ b;\ c;\ \frac{1-z}{2}\right)-{}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a,\ b;\ c;\ \frac{1-z}{2}\right)\right]. \quad (43)$$

Запишемо похідну $\dfrac{d}{dz}\ {}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)$, використавши зв'язок (1) (τ,β)-узагальненої функції Лежандра ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)$ і (τ,β)-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1^{\tau,\beta}$:

$$\frac{d}{dz}\ {}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{d}{dz}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)\right]. \quad (44)$$

Для похідної $\dfrac{d}{dz}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \dfrac{1-z}{2}\right)$ скористаємось формулою (43) при $a=$

$= -\nu$, $b = \nu + 1$, $c = 1 - \mu$, тоді (44) набере вигляду

$$\frac{d}{dz}\ {}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z) = -\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\frac{\mu}{(z-1)^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}-1}{}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) +$$

$$+\frac{\nu}{(z-1)\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\left[{}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)\right]. \tag{45}$$

Після використання формул (1), (33) і нескладних перетворень із (45) отримаємо співвідношення (30).

2. Формула (41) для $\xi = z$, $p = -\dfrac{1}{2}$, $q = \dfrac{1}{2}$, $a = -\nu$, $b = \nu + 1$, $c = 1 - \mu$ матиме вигляд

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z)^{-\nu}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\nu}{(1-z)^{\nu+1}}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{46}$$

Із формули (1) зв'язку функцій ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu$ і ${}_2F_1^{\tau,\beta}$ дістанемо

$$(1-z)^{-\nu}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) = \frac{\Gamma(1-\mu)(-1)^\nu}{(z+1)^{\frac{\mu}{2}}}(z-1)^{\frac{\mu}{2}-\nu}\ {}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z). \tag{47}$$

Функцію ${}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \dfrac{1-z}{2}\right)$ із (46) подамо за формулою (33) і підставимо (47) і (33) у співвідношення (46):

$$\frac{d}{dz}\left[(-1)^\nu\Gamma(1-\mu)\frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}-\nu}}{(z+1)^{\frac{\mu}{2}}}\ {}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)\right] =$$

$$= \frac{\nu}{(1-z)^{\nu+1}}\left(1+\frac{\mu\tau}{\nu\beta}\right)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) -$$

$$- \frac{\mu\tau}{\beta(1-z)^{\nu+1}}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu+1,\ \nu;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{48}$$

Спрощуючи вираз (48) з урахуванням зв'язку (1) функцій ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu$ і ${}_2F_1^{\tau,\beta}$ та властивості $\dfrac{-\mu}{\Gamma(1-\mu)} = \dfrac{1}{\Gamma(-\mu)}$ гамма-функції [7], отримуємо формулу (39).

Як приклад практичного застосування функції ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)$ розглянемо інтеграл $\int_0^1 x^\sigma(1-$ $-x^2)^{-\frac{\mu}{2}}\ {}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(1-(1-x)^\beta)\,dx$. Для його обчислення виконаємо деякі перетворення, використавши зображення функції ${}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z)$ через (τ,β)-узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса при $z = x$, $x \in (-1;\ 1)$:

$$
{}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-x}{2}\right)
$$

та подання (3) функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,\ b;\ c;\ \xi)$ у вигляді ряду. В результаті отримаємо

$$
\int\limits_0^1 x^\sigma(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}}\ {}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(1-(1-x)^\beta)\,dx =
$$

$$
= \int\limits_0^1 x^\sigma(1-x)^{-\mu}\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{(1-x)^\beta}{2}\right)dx =
$$

$$
= \int\limits_0^1 x^\sigma(1-x)^{-\mu}\frac{1}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(-\nu+n)\Gamma(\nu+1+n\tau)}{\Gamma(1-\mu+n\beta)}\frac{(1-x)^{n\beta}}{2^n n!}\,dx =
$$

$$
= \frac{1}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(-\nu+n)\Gamma(\nu+1+n\tau)}{\Gamma(1-\mu+n\beta)\ 2^n n!}\int\limits_0^1 x^\sigma(1-x)^{-\mu+n\beta}\,dx =
$$

$$
= \frac{1}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(-\nu+n)\Gamma(\nu+1+n\tau)}{\Gamma(1-\mu+n\beta)\ 2^n n!}\ \mathrm{B}(\sigma+1,\ -\mu+n\beta+1),
$$

де $\mathrm{B}(\alpha,\ \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ — бета-функція Ейлера [7]. Врахувавши властивість $\mathrm{B}(\alpha,\ \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ бета-функції, дістанемо

$$
\int\limits_0^1 x^\sigma(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}}\ {}^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(1-(1-x)^\beta)\,dx =
$$

$$
= \frac{1}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(-\nu+n)\Gamma(\nu+1+n\tau)}{\Gamma(\sigma-\mu+2+n\beta)\,2^n n!}\Gamma(\sigma+1) =
$$

$$
= \frac{\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\sigma-\mu+2)}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ \sigma-\mu+2;\ \frac{1}{2}\right).
$$

Використавши формулу подвійного аргументу [7] для гамма-функції

$$
\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) \quad \text{при} \quad 2x = \sigma+1,
$$

одержимо значення розглянутого інтеграла:

$$\int_0^1 x^{\sigma}(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}}\ {}^{\tau,\beta}P_{\nu}^{\mu}(1-(1-x)^{\beta})\,dx =$$

$$= \frac{2^{\sigma}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma(-\mu+\sigma+2)}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ -\mu+\sigma+2;\ \frac{1}{2}\right). \tag{49}$$

Зауважимо, що співвідношення (49) є узагальненням відомого інтеграла для класичної функції $P_{\nu}^{\mu}(x)$ [7]:

$$\int_0^1 x^{\sigma}(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} P_{\nu}^{\mu}(x)\,dx = 2^{\mu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}+\frac{3}{2}\right)}. \tag{50}$$

Дійсно, при $\beta=\tau=1$ (τ,β)-узагальнені функції ${}^{\tau,\beta}P_{\nu}^{\mu}$ і ${}_2F_1^{\tau,\beta}$ збігаються із класичними функціями P_{ν}^{μ} і ${}_2F_1$ відповідно, причому для класичної гіпергеометричної функції Ґаусса є відомим частинне значення [7]:

$$ {}_2F_1\left(a,\ 1-a;\ b;\ \frac{1}{2}\right) = 2^{1-b}\frac{\Gamma(b)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)}. \tag{51}$$

Зокрема, при $a=-\nu$, $b=\sigma-\mu+2$ вираз (51) набирає вигляду

$$ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(-\nu,\ \nu+1;\ \sigma-\mu+2;\ \frac{1}{2}\right) = 2^{\mu-\sigma-1}\frac{\Gamma(\sigma-\mu+2)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}+\frac{\sigma}{2}-\frac{\mu}{2}+1\right)\ \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{2}\right)}. \tag{52}$$

Остаточно, врахувавши, що $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, при $\beta=\tau=1$ із (49) і (52) дістанемо формулу (50).

Висновки. Теореми 1 та 2 доведено за умов існування (τ,β)-узагальненої (за Райтом) приєднаної функції Лежандра першого роду ${}^{\tau,\beta}P_{\nu}^{\mu}$. При доведенні використано відомі [6] та нові властивості (τ,β)-узагальненої (за Райтом) гіпергеометричної функції Ґаусса ${}_2F_1^{\tau,\beta}$ і зв'язок між функціями ${}^{\tau,\beta}P_{\nu}^{\mu}$ та ${}_2F_1^{\tau,\beta}$. Одержані результати є узагальненням співвідношень, отриманих автором у [8] для функції ${}^{\tau}P_{\nu}^{\mu}(z)$, яка є частинним випадком розглянутої функції ${}^{\tau,\beta}P_{\nu}^{\mu}(z)$ при $\beta=\tau$. Як приклад практичного застосування знайдено значення інтеграла, що містить функцію ${}^{\tau,\beta}P_{\nu}^{\mu}$.

1. *Virchenko N., Fedotova I.* Generalized associated Legendre functions and their applications. — Singapore: World Sci., 2001. — 195 p.

2. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-transforms. — Charman and Hall, CRC., 2004. — 390 p.

3. *Andrews L. C., Askey R., Roy R.* Special functions. — New York: Cambridge Univ. Press, 1999.

4. *Wright E. M.* On the coefficient of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. — 1933. — **8**. — P. 71–79.

5. *Вірченко Н. О.* Про гіпергеометричні функції, їх узагальнення та застосування // Наук. зап. АН ВШ України. — 2006. — **1**. — С. 20–25.

6. *Вірченко Н. О., Рум'янцева О. В.* Про узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса та її застосування // Доп. НАН України. — 2008. — № 4. — С. 12–19.

7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1965. — 293 с.

8. *Южакова Г. О.* Рекурентні співвідношення з узагальненими функціями Лежандра // Наук. вісті НТУУ „КПІ". — 2009. — № 6. — С. 148–153.

9. *Virchenko N., Kalla S. L., Al-Zamel A.* Some results on a generalized hypergeometric function // Integr. and Special Functions. — 2001. — **12**, № 1. — P. 89–100.

Отримано 25.10.10