УДК 517.9

ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ КЕРУВАНЬ НА НЕСКІНЧЕННИХ ЧАСОВИХ ПРОМІЖКАХ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. О. Самойленко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: anelka.s@mail.ru

We prove that there exists an optimal control for a differential system by using direct methods for solving extremum equations and without solving the Bellman dynamic programming equation.

Доказано существование оптимального управления для систем дифференциальных уравнений без решения уравнения динамического программирования Беллмана с использованием прямых методов решения экстремальных уравнений.

1. Вступ. У даній роботі розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + f_1(t,x) + f_2(t,x)u(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int\limits_0^\infty L(t, x(t),\ u(t))\, dt \to \inf, \tag{2}$$

де $t \in [0,\infty)$, $x \in D$, D — деяка область у $\mathbb{R}^d$.

Більш точну постановку задачі наведено в основній частині роботи.

У статті доведено теорему існування оптимального керування задачею (1), (2) у термінах правої частини системи (1) та функції $L(t,x,u)$, що входить у критерій якості. Раніше подібні задачі розглядалися, наприклад, у роботах [1–6] (див. також наведену в них бібліографію). Для їх дослідження, як правило, використовується метод динамічного програмування Беллмана або принцип максимуму Понтрягіна.

Використання методу динамічного програмування пов'язане з необхідністю розв'язання відповідного рівняння Беллмана, яке є нелінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку, і це є досить складною задачею. Умови принципу максимуму Понтрягіна дозволяють звести знаходження оптимального керування до розв'язку деякої двоточкової крайової задачі. Принцип максимуму надає можливість знаходити оптимальне керування для багатьох важливих прикладних задач. Однак часто розв'язання двоточкової крайової задачі може виявитись досить складним. Тому важливо отримати умови існування оптимального керування в термінах коефіцієнтів вихідної системи та функції $L(t,x,u)$, що входить у критерій якості.

Такі умови можна отримати, використовуючи прямі методи дослідження екстремальних задач.

Даним способом у роботах [1, 2] доведено існування оптимального керування для задач Майєра та Больца на фіксованому проміжку часу без обмежень на керування.

У даній роботі розглядається більш загальний випадок.

Інший підхід до питань існування оптимальних керувань із застосуванням методу усереднення можна знайти, наприклад, у роботах [10 – 12].

2. Постановка задачі. Розглянемо задачу оптимального керування (1), (2), де $x_0 \in D$ — фіксований вектор, $t \in [0, \infty)$, $x \in D$ — фазовий вектор, D — область із $\mathbb{R}^d$ така, що містить в собі замкнену кулю деякого радіуса R, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ — вектор керування, U — опукла замкнена множина, що містить 0, вектор-функція $f_1(t, x) : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}^d$ та матриці $A(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $f_2(t, x) : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ є неперервними за сукупністю змінних.

Позначимо через $|.|$ евклідову норму d-вимірного вектора, через $\|.\|$ норму матриці, узгоджену з нормою вектора.

Будемо вважати, що для функцій $f_1(t, x)$ та $f_2(t, x)$ виконується умова лінійного зростання, тобто існує стала $L_1 > 0$ така, що

$$|f_1(t, x)| \leq L_1|x|, \quad \|f_2(t, x)\| \leq L_1|x| \quad \text{при} \quad x \in D, \quad t \in [0, \infty), \tag{3}$$

та умова Ліпшиця по змінній $x \in D$.

Функції $L(t, x, u)$, $L_x(t, x, u)$ та $L_u(t, x, u)$ є неперервними для будь-яких $t \in [0, \infty)$, $x \in D$, $u \in U$ і задовольняють наступні умови:

1) існують такі сталі $k > 0$ та $p > 2$, що виконується нерівність

$$L(t, x, u) \geq k|u|^p \tag{4}$$

для $t \in [0, \infty)$, $x \in D$, $u \in U$;

2) існують такі сталі $C > 0$ та $a > 1$, що виконується нерівність

$$L(t, x, u) \leq C(|x|^a + |u|^p); \tag{5}$$

3) існує таке $K > 0$, що

$$|L_x(t, x, u)| + |L_u(t, x, u)| \leq K(|x|^{a-1} + |u|^{p-1}); \tag{6}$$

4) $L(t, x, u)$ є опуклою по u для будь-яких фіксованих $t \in [0, \infty)$, $x \in D$.

Керування $u(t)$ вважатимемо допустимим, якщо:

a$_1$) $u(t) \in L_p([0, \infty))$ для p з умови 1;

a$_2$) $u(t) \in U$ для будь-якого $t \geq 0$;

a$_3$) для керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші (1) визначений і належить множині D при $t \geq 0$;

a$_4$) $J(u) < \infty$.

Множину допустимих керувань, що задовольняють умови a$_1$) – a$_4$), будемо називати допустимою для задачі (1), (2) і позначатимемо через V.

Будемо також вважати, що матрицант $X(t,s)$ системи

$$\dot{x} = A(t)\,x \tag{7}$$

задовольняє наступну умову:

існують такі сталі $K_1 > 0$ і $\gamma > 0$, що має місце оцінка

$$|X(t,s)| \le K_1 e^{-\gamma(t-s)}, \quad t \ge s. \tag{8}$$

Як відомо, умова (8) рівносильна експоненціальній стійкості нульового розв'язку системи (7). Умови такої стійкості є добре вивченими (див. [8, 9]).

3. Основний результат. Основним результатом даної работи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай для системи (1) з критерієм якості (2) виконуються умови пункту 2. Тоді якщо*

$$3^{q-1}K_1^q L_1^q \left(\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p} + M^q \right) - \gamma \le 0, \tag{9}$$

де $q = p/(p-1)$ *і*

$$M = \left(\frac{6^{a/p} R^a C q}{ak(\gamma - 2^{(q-1)} L_1^q K_1^q \gamma^{1/(1-p)})} + \frac{1}{k} \right) \frac{1}{p},$$

то задача (1), (2) з початковими даними x_0, *що задовольняють умову*

$$|x_0| \le \frac{R\sqrt[p]{3}}{K_1}, \tag{10}$$

має розв'язок у класі допустимих керувань V, *тобто існує допустиме керування* $u^*(t) \in \in V$, *що мінімізує критерій якості (2).*

Доведення. Спочатку покажемо, що множина допустимих керувань V не є порожньою. Для цього доведемо, що $0 \in V$.

Дійсно, виконання умов a_1) і a_2) є очевидним.

Покажемо виконання умов a_3) та a_4).

Для $u = 0$ система (1) набирає вигляду

$$\dot{x} = A(t)x + f_1(t,x),$$

$$x(0) = x_0.$$

До моменту виходу розв'язку цієї системи із області D має місце інтегральне зображення

$$x(t) = X(t,0)x_0 + \int_0^t X(t,s) f_1(s, x(s))\, ds. \tag{11}$$

Використовуючи нерівності (3), (8) та нерівність Гельдера, отримуємо

$$
\begin{aligned}
|x(t)|^q &= \left| X(t,0)x_0 + \int\limits_0^t X(t,s) f_1(s,x(s))\,ds \right|^q \le \\
&\le 2^{q-1}K_1^q \left(|e^{-\gamma t}x_0|^q + \left| \int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)} f_1(s,x(s))\,ds \right|^q \right) \le \\
&\le 2^{q-1}K_1^q L_1^q \left(e^{-\gamma q t} L_1^{-q}|x_0|^q + \left(\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}|x(s)|\,ds \right)^q \right) \le \\
&\le 2^{q-1}K_1^q L_1^q \left(e^{-\gamma q t} L_1^{-q}|x_0|^q + e^{-\gamma q t}\left(\int\limits_0^t e^{\gamma s/p} e^{\gamma s/q}|x(s)|\,ds \right)^q \right) \le \\
&\le 2^{q-1}K_1^q L_1^q \left(e^{-\gamma q t} L_1^{-q}|x_0|^q + e^{-\gamma q t}\left(\int\limits_0^t e^{\gamma s}\,ds \right)^{q/p} \int\limits_0^t e^{\gamma s}|x(s)|^q\,ds \right) \le \\
&\le 2^{q-1}K_1^q L_1^q \left(e^{-\gamma q t} L_1^{-q}|x_0|^q + e^{-\gamma q t}\left(\int\limits_0^t e^{\gamma s}\,ds \right)^{q/p} \int\limits_0^t e^{\gamma s}|x(s)|^q\,ds \right) \le \\
&\le 2^{q-1}K_1^q L_1^q \left(e^{-\gamma q t} L_1^{-q}|x_0|^q + \left(\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}\,ds \right)^{q/p} e^{-\gamma t}\int\limits_0^t e^{\gamma s}|x(s)|^q\,ds \right),
\end{aligned}
$$

або

$$
e^{\gamma t}|x(t)|^q \le 2^{q-1}K_1^q|x_0|^q + 2^{q-1}K_1^q L_1^q \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p} \int\limits_0^t e^{\gamma s}|x(s)|^q\,ds.
$$

Тоді за лемою Гронуолла – Беллмана маємо

$$
e^{\gamma t}|x(t)|^q \le 2^{q-1}K_1^q|x_0|^q e^{2^{q-1}K_1^q L_1^q\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p} t} \quad \text{або} \quad |x(t)|^q \le 2^{q-1}K_1^q|x_0|^q e^{(2^{q-1}K_1^q L_1^q\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p} - \gamma)t}
$$

і

$$
|x(t)| \le 2^{1/p}K_1|x_0| e^{\frac{\left(2^{q-1}K_1^q L_1^q\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p} - \gamma\right)t}{q}} \le R.
$$

Останнє випливає з (10).

Отже, розв'язок $x(t)$ лежить в області D при всіх $t \ge 0$.

Покажемо виконання умови a_4). Використовуючи нерівність (5), отримуємо

$$J(0) = \int\limits_0^\infty L(t, x(t), 0)\, dt \le C \int\limits_0^\infty |x(t)|^a\, dt \le C 2^{a/p} K_1^a |x_0|^a \int\limits_0^\infty e^{\frac{(2^{q-1} K_1^q L_1^q \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p} - \gamma) t a}{q}}\, dt =$$

$$= C 2^{a/p} K_1^a |x_0|^a q \frac{1}{(\gamma - 2^{q-1} K_1^q L_1^q \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p}) a} \le \frac{C 6^{a/p} R^a q}{(\gamma - 2^{q-1} K_1^q L_1^q \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p}) a} < \infty.$$

Отже, керування $u(t) \equiv 0 \in V$.

Оскільки критерій якості є невід'ємною величиною, то існує невід'ємна нижня границя m значень $J(u)$, а тому існує послідовність допустимих керувань $\{u_n(t), n \ge 1\}$ таких, що $J(u_n) \to m$ при $n \to \infty$ монотонно, тобто

$$J(u_n) = \int\limits_0^\infty L(t, x_n(t), u_n(t))\, dt \to m \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

де $x_n(t)$ — розв'язки системи (1), що відповідають керуванням $u_n(t)$.

Значення m можна оцінити таким чином:

$$m \le J(0) \le \frac{C 6^{a/p} R^a q}{(\gamma - 2^{q-1} K_1^q L_1^q \left(\frac{1}{\gamma})^{q/p}\right) a}.$$

Зауважимо, що для достатньо великих n

$$J(u_n) \le m + 1.$$

Використовуючи умову (4), маємо

$$k \int\limits_0^\infty |u_n(t)|^p\, dt \le \int\limits_0^\infty L(t, x_n(t),\ u_n(t))\, dt \le m + 1, \quad \int\limits_0^\infty |u_n(t)|^p\, dt \le \frac{m+1}{k},$$

$$\|u_n(\cdot)\|_p \le \left(\frac{m+1}{k}\right)^{1/p} \le \left(\frac{C 6^{a/p} R^a q}{k(\gamma - 2^{q-1} K_1^q L_1^q (\frac{1}{\gamma})^{q/p}) a} + \frac{1}{k}\right)^{1/p}, \tag{12}$$

що означає слабку компактність сім'ї керувань $\{u_n(\cdot)\}$. Тому можна вибрати підпослідовність (яку також будемо позначати через $u_n(t)$), що слабко збігається до границі $u^*(t) \in L_p([0,\infty))$, що задовольняє умову (12). Тоді за лемою Мазура [4, с. 173] знайдеться опукла комбінація $b_k(t) = \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) u_i(t)$ елементів $u_i(t) \in U \left(\alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i = 1\right)$ така, що $b_k \to u^*$, $k \to \infty$, за нормою L_p. Отже, існує збіжна майже скрізь на $[0,\infty)$ за мірою Лебега підпослідовність b_{k_l} така, що $b_{k_l}(t) \to u^*(t)$, $l \to \infty$, для майже всіх t. Оскільки

U — опукла і замкнена множина, то $\sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i u_i(t) \in U$. Тоді із замкненості множини U випливає, що $u^*(t) \in U$ майже для всіх $t \in [0, \infty)$.

Розглянемо тепер послідовність розв'язків системи (1), що відповідають послідовності керувань $\{u_n(t), n \geq 1\}$ при $t \in [0, \infty)$.

Доведемо рівномірну обмеженість функцій $x_n(t)$ при $t \geq 0$.

З інтегрального зображення

$$x_n(t) = X(t,0)x_0 + \int_0^t X(t,s) f_1(s, x_n(s))\, ds + \int_0^t X(t,s) f_2(s, x_n(s)) u(t)\, ds,$$

використовуючи нерівності (3), (8) та нерівність Гельдера, отримуємо

$$|x_n(t)|^q = \left| X(t,0)x_0 + \int_0^t X(t,s) f_1(s, x_n(s))\, ds + \int_0^t X(t,s) f_2(s, x_n(s)) u_n(s)\, ds \right|^q \leq$$

$$\leq 3^{q-1} K_1^q \left(|e^{-\gamma t} x_0|^q + \left| \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} f_1(s, x_n(s))\, ds \right|^q + \right.$$

$$\left. + \left| \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} f_2(s, x_n(s)) u_n(s)\, ds \right|^q \right) \leq$$

$$\leq 3^{q-1} K_1^q L_1^q \left(e^{-\gamma q t} L_1^{-q} |x_0|^q + \left(\int_0^t e^{-\gamma(t-s)} |x_n(s)|\, ds \right)^q + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^t e^{-\gamma(t-s)} |x_n(s)| |u_n(s)|\, ds \right)^q \right) \leq$$

$$\leq 3^{q-1} K_1^q L_1^q \left(e^{-\gamma q t} L_1^{-q} |x_0|^q + e^{-\gamma q t} \left(\int_0^t e^{\gamma s/p} e^{\gamma s/q} |x_n(s)|\, ds \right)^q + \right.$$

$$\left. + e^{-\gamma q t} \left(\int_0^t e^{\gamma s} |x_n(s)| |u_n(s)|\, ds \right)^q \right) \leq$$

$$\leq 3^{q-1} K_1^q L_1^q \left(e^{-\gamma q t} L_1^{-q} |x_0|^q + e^{-\gamma q t} \left(\int_0^t e^{\gamma s}\, ds \right)^{q/p} \int_0^t e^{\gamma s} |x_n(s)|^q\, ds + \right.$$

$$\left. + e^{-\gamma q t} \|u_n(t)\|_p^q \int_0^t e^{\gamma q s} |x_n(s)|^q\, ds \right) \leq$$

$$\leq 3^{q-1}K_1^qL_1^q\left(e^{-\gamma qt}L_1^{-q}|x_0|^q + e^{-\gamma qt}\left(\int\limits_0^t e^{\gamma s}\,ds\right)^{q/p}\int\limits_0^t e^{\gamma s}|x_n(s)|^q\,ds + \right.$$

$$\left. + e^{-\gamma qt}\|u_n(t)\|_p^q\int\limits_0^t e^{\gamma qs}|x_n(s)|^q\,ds\right) \leq$$

$$\leq 3^{q-1}K_1^qL_1^q\left(e^{-\gamma qt}L_1^{-q}|x_0|^q + \left(\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}\,ds\right)^{q/p} e^{-\gamma t}\int\limits_0^t e^{\gamma s}|x_n(s)|^q\,ds + \right.$$

$$\left. + e^{-\gamma t}\|u_n(t)\|_p^q\int\limits_0^t e^{\gamma s}|x_n(s)|^q\,ds\right)$$

або

$$e^{\gamma t}|x_n(t)|^q \leq 3^{q-1}K_1^q|x_0|^q + 3^{q-1}K_1^qL_1^q\left(\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p} + M^q\right)\int\limits_0^t e^{\gamma s}|x_n(s)|^q\,ds.$$

Тоді за лемою Гронуолла – Беллмана маємо

$$e^{\gamma t}|x_n(t)|^q \leq 3^{q-1}K_1^q|x_0|^q e^{3^{q-1}K_1^qL_1^q\left(\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p}+M^q\right)t}$$

або

$$|x_n(t)|^q \leq 3^{q-1}K_1^q|x_0|^q e^{\left(3^{q-1}K_1^qL_1^q\left(\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p}+M^q\right)-\gamma\right)t} < R \qquad (13)$$

на підставі умов (9) та (10). Звідки й випливає рівномірна обмеженість функцій $x_n(t)$ при $t \geq 0$.

Виберемо довільний момент T, що належить півосі $[0, \infty)$.

Доведемо рівностепеневу неперервність розв'язків $x_n(t)$, $n \geq 1$, $t \in [0, T]$. Використовуючи інтегральне зображення

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_0^t [A(t)x_n(t) + f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u_n(s)]\,ds$$

та нерівність Гельдера для будь-яких $s_1, s_2 \in [0, T]$ таких, що $s_1 < s_2$, маємо

$$|x_n(s_1) - x_n(s_2)| = \left|\int\limits_{s_1}^{s_2} A(t)x_n(t)\,dt + \int\limits_{s_1}^{s_2} f_1(t, x_n(t))\,dt + \int\limits_{s_1}^{s_2} f_2(t, x_n(t))u_n(t)\,dt\right| \leq$$

$$\le L_1 \int_{s_1}^{s_2} |A(t)|\,|x_n(t)|\,dt + L_1 \int_{s_1}^{s_2} |x_n(t)|\,dt + L_1 \int_{s_1}^{s_2} |x_n(t)|\,|u_n(t)|\,dt \le$$

$$\le L_1 R |A(t)|(s_2 - s_1) + L_1 R (s_2 - s_1) +$$

$$+ L_1 R (s_2 - s_1)^{1/q} |\|u_n(t)\|_p \to 0 \ \text{ при } \ s_2 - s_1 \to 0.$$

Отже, сім’я функцій $\{x_n(t), n \ge 1\}$, $t \in [0,T]$, рівностепенево неперервна та рівномірно обмежена. Тоді за теоремою Асколлі на кожному обмеженому відрізку часу $[0,T]$ можна виділити рівномірно збіжну підпослідовність (яку також будемо позначати через $\{x_n(t), n \ge 1\}$) таку, що $x_n(t) \Rightarrow x^*(t)$ при $n \to \infty$ на відрізку $t \in [0,T]$. Оскільки $x_n(t)$ лежать у замкненій кулі радіуса R, яка в свою чергу лежить в області D, то і $x^*(t)$ також лежить у даній кулі.

Покажемо, що функція $x^*(t)$ є розв’язком системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ на $[0,T]$. Оскільки $x_n(t)$ — розв’язки системи (1), то

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t [A(s)x_n(s) + f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u_n(s)]\,ds \pm \int_0^t A(s)x^*(s)\,ds \pm$$

$$\pm \int_0^t f_2(s, x_n(s))u^*(s)\,ds \pm \int_0^t f_2(s, x^*(s))u_n(s)\,ds \pm \int_0^t f_2(s, x^*(s))u^*(s)\,ds = x_0 +$$

$$+ \int_0^t A(s)(x_n(s) - x^*(s))\,ds + \int_0^t A(s)x^*(s)\,ds + \int_0^t [f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u^*(s)]\,ds +$$

$$+ \int_0^t [f_2(s, x_n(s)) - f_2(s, x^*(s))](u_n(s) - u^*(s))\,ds + \int_0^t f_2(s, x^*(s))[u_n(s) - u^*(s)]ds \le$$

$$\le x_0 + \int_0^t A(s)(x_n(s) - x^*(s))\,ds + \int_0^t A(s)x^*(s)\,ds +$$

$$+ \int_0^t [f_1(t, x_n(s)) + f_2(t, x_n(s))u^*(s)]\,ds + \left(\int_0^t [f_2(t, x_n(s)) - f_2(t, x^*(s))]^q\,ds \right)^{1/q} \times$$

$$\times \left(\int_0^t (u_n(s) - u^*(s))^p\,ds \right)^{1/p} + \int_0^t f_2(t, x^*(s))(u_n(s) - u^*(s))\,ds \le$$

$$\le x_0 + \int_0^t A(s)(x_n(s) - x^*(s))\,ds + \int_0^t A(s)x^*(s)\,ds +$$

$$+ \int_0^t [f_1(t, x_n(s)) + f_2(t, x_n(s))u^*(s)]\, ds +$$

$$+ \left(\int_0^t [L_1 |x_n(s) - x^*(s)|]^q\, ds \right)^{1/q} (\|u_n(s)\|_p + \|u^*(s)\|_p) +$$

$$+ \int_0^t L_1 |x^*(s)| (u_n(s) - u^*(s))\, ds.$$

Третій, п'ятий та шостий інтеграли прямують до 0 при $n \to \infty$. Це випливає з рівномірної збіжності $x_n(t)$ до $x^*(t)$ та слабкої збіжності послідовності керувань $u_n(t)$ до $u^*(t)$ при $n \to \infty$ на відрізку $t \in [0, T]$. Тому

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t A(s) x^*(s)\, ds + \int_0^t [f_1(s, x^*(s))\, dt + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, ds$$

для будь-якого $t \in [0, T]$.

Оскільки розв'язок задачі Коші (1) єдиний і момент T вибрано довільним чином, то $x^*(t)$ є розв'язком системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ при $t \geq 0$.

Очевидно, що для $x^*(t)$ виконується нерівність

$$|x^*(t)|^q \leq 3^{q-1} K_1^q |x_0|^q e^{\left(3^{q-1} K_1^q L_1^q \left(\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p} + M^q\right) - \gamma\right)t} \leq R. \tag{14}$$

Залишилось довести, що керування $u^*(t)$ є оптимальним.

Спочатку покажемо, що функція $L(t, x^*(t), u_n(t))$ інтегровна на $[0, \infty]$:

$$|L(t, x^*(t), u_n(t))| \leq |L(t, x^*(t), u_n(t)) - L(t, x^*(t), u^*(t))| + |L(t, x^*(t), u^*(t))| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^1 L_u(t, x^*(t), (1-\lambda)u^*(t) + \lambda u_n(t))(u_n(t) - u^*(t))\, d\lambda \right| + |L(t, x^*(t), u^*(t))| \leq$$

$$\leq K \int_0^1 \left(|x^*(t)|^{a-1} + |(1-\lambda)u^*(t) + \lambda u_n(t)|^{p-1} \right) |u_n(t) - u^*(t)| d\lambda + |L(t, x^*(t), u^*(t))| \leq$$

$$\leq K|x^*(t)|^{a-1} |u_n(t) - u^*(t)| + K \int_0^1 ((1-\lambda)|u^*(t)|^{p-1} + \lambda |u_n(t)|^{p-1}) |u_n(t) - u^*(t)|\, d\lambda +$$

$$+ |L(t, x^*(t), u^*(t))| \leq K|x^*(t)|^{a-1}|u_n(t) - u^*(t)| + K(|u^*(t)|^{p-1} +$$

$$+ |u_n(t)|^{p-1})(|u_n(t)| + |u^*(t)|) + |L(t, x^*(t), u^*(t))| \leq K|x^*(t)|^{a-1}|u_n(t) - u^*(t)| +$$

$$+ K|u^*(t)|^p + K|u_n(t)|^p + K|u_n(t)|\, |u^*(t)|^{p-1} + K|u^*(t)|\, |u_n(t)|^{p-1} + |L(t, x^*(t), u^*(t))|.$$

Другий, третій та шостий доданки інтегровні. Розглянемо окремо перший, четвертий та п'ятий доданки. Маємо

$$\int_0^\infty |x^*(t)|^{a-1}|u_n(t)-u^*(t)|\,dt \le \left(\int_0^\infty |x^*(t)|^{(a-1)q}\,dt\right)^{1/q}\left(\int_0^\infty |u_n(t)-u^*(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \le$$

$$\le 3^{(a-1)/p}K_1^{a-1}|x_0|^{a-1}\left(\int_0^\infty e^{(a-1)\left(3^{q-1}K_1^qL_1^q\left(\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p}+M^q\right)-\gamma\right)t}\,dt\right)^{1/q}2^{p-1}\times$$

$$\times\left(\int_0^\infty |u_n(t)|^p\,dt+\int_0^\infty |u^*(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{2^{p-1}3^{(a-1)/p}K_1^{a-1}|x_0|^{a-1}}{(a-1)^{1/q}\left(3^{q-1}K_1^qL_1^q\left(\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{q/p}+M^q\right)-\gamma\right)^{1/q}}\,2^{1/p}M<\infty.$$

Отже, перший доданок інтегровний. Розглянемо четвертий доданок:

$$\int_0^\infty |u^*(t)|^{p-1}|u_n(t)|\,dt \le \left(\int_0^\infty |u^*(t)|^p\,dt\right)^{1/q}\left(\int_0^\infty |u_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p} =$$

$$= \|u^*(t)\|_p^{q/p}\|u_n(t)\|_p<\infty.$$

Аналогічно доводиться й інтегровність п'ятого доданка.

Отже, функція $L(t,x^*(t),u_n(t))$ є інтегровною на $[0,\infty]$.

Нехай $\chi_R(t)$ — характеристична функція множини $\{t:|u^*(t)|<R_1\}$. Оскільки $L(t,x,\cdot)$ є опуклою, то виконується нерівність

$$L(t,x^*(t),v(t))\chi_{R_1}(t) \ge L(t,x^*(t),u^*(t))\chi_{R_1}(t)+$$
$$+(v(t)-u^*(t))L_v(t,x^*(t),u^*(t))\chi_{R_1}(t)\quad \forall v(t)\in V,\quad t\in[0,\infty).$$

Покладемо $v(t)=u_n(t)$, тоді

$$\int_0^\infty L(t,x^*(t),u_n(t))\chi_{R_1}(t)\,dt \ge \int_0^\infty L(t,x^*(t),u^*(t))\chi_{R_1}(t)\,dt+$$
$$+\int_0^\infty (u_n(t)-u^*(t))L_u(t,x^*(t),u^*(t))\chi_{R_1}(t)\,dt. \qquad (15)$$

З умови (6) маємо

$$|L_u(t,x^*(t),u^*(t))\chi_{R_1}(t)| \le K(|x^*(t)|^{a-1}+|u^*(t)|^{p-1}) \le K(R^{a-1}+R_1^{p-1}).$$

Тому другий інтеграл в нерівності (15) прямує до 0 при $n \to \infty$ внаслідок слабкої збіжності $u_n(t)$ до $u^*(t)$. Отже,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty L(t, x^*(t), u_n(t))\chi_{R_1}(t)\,dt \geq \int_0^\infty L(t, x^*(t), u^*(t))\chi_{R_1}(t)\,dt.$$

Оскільки

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty L(t, x^*(t), u_n(t))\,dt \geq \liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty L(t, x^*(t), u_n(t))\chi_{R_1}(t)\,dt$$

та

$$L(t,x,u) \geq 0, \quad \chi_{R_1}(t) \leq 1 \quad \text{і} \quad \chi_{R_1}(t) \to 1 \quad \text{при} \quad R_1 \to \infty,$$

то згідно з теоремою Лебега маємо

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty L(t, x^*(t), u_n(t))\,dt \geq \int_0^\infty L(t, x^*(t), u^*(t))\,dt. \tag{16}$$

Розглянемо також величину

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^\infty [L(t, x_n(t), u_n(t)) - L(t, x^*(t), u_n(t))]\,dt \right| = \\
&= \left| \int_0^\infty \int_0^1 L_x(t, (1-\lambda)x^*(t) + \lambda x_n(t), u_n(t))(x_n(t) - x^*(t))\,d\lambda\,dt \right| \leq \\
&\leq K \int_0^\infty \int_0^1 |x_n(t) - x^*(t)|\,(|(1-\lambda)x^*(t) + \lambda x_n(t)|^{a-1} + |u_n(t)|^{p-1})\,d\lambda\,dt \leq \\
&\leq K \int_0^\infty \int_0^1 |x_n(t) - x^*(t)|((1-\lambda)|x^*(t)|^{a-1} + \lambda|x_n(t)|^{a-1})\,d\lambda\,dt + \\
&\quad + K \int_0^\infty |x_n(t) - x^*(t)|\,|u_n(t)|^{p-1}\,dt \leq K \int_0^\infty |x_n(t) - x^*(t)|(|x^*(t)|^{a-1} + |x_n(t)|^{a-1})\,dt + \\
&\quad + K \left(\int_0^\infty |x_n(t) - x^*(t)|^p\,dt \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty |u_n(t)|^p \right)^{1/q} \leq 2KR \int_0^\infty |x_n(t) - x^*(t)|\,dt + \\
&\quad + KM^{p/q} \left(\int_0^\infty |x_n(t) - x^*(t)|^p\,dt \right)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Оскільки $x_n(t)$ та $x^*(t)$ згідно з нерівностями (13) та (14) обмежені інтегровною функцією, то за теоремою Лебега права частина нерівності (17) прямує до 0 при $n \to \infty$. Далі маємо

$$J(u_n) = \int_0^\infty L(t, x_n(t), u_n(t))\,dt = \int_0^\infty [L(t, x_n(t), u_n(t)) - L(t, x^*(t), u_n(t))]\,dt +$$
$$+ \int_0^\infty [L(t, x^*(t), u_n(t)) - L(t, x^*(t), u^*(t))]\,dt + \int_0^\infty L(t, x^*(t), u^*(t))\,dt.$$

Використовуючи (16) та (17), з останньої рівності отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \inf J(u_n(t)) \geq J(u^*).$$

Оскільки

$$\inf_{u \in U} J(u) \leq J(u^*) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n) = m,$$

то

$$J(u^*) = m.$$

Отже, $u^*(t)$ — оптимальне керування.

Теорему доведено.

Приклад. Нехай задача оптимального керування (1), (2) має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + \frac{\sin x}{2+t} + \frac{x - \cos^2 x}{2+t^2} u(t), \\ x(0) &= 1, \end{aligned} \tag{18}$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int_0^\infty (x^4 + 2u^6)\,dt \to \inf, \tag{19}$$

де $|x| < 2$, $t \in [0, \infty)$, $u \in U$, U — довільна опукла замкнена множина, що містить 0.

Неважко перевірити, що задача (18), (19) задовольняє всі умови теореми при $p = 6$, $a = 4$, $K = 12$, $k = 2$, $C = 2$, $K_1 = 1$, $L_1 = 0{,}5$, $\gamma = 2$. Отже, задача (18), (19) має розв'язок.

1. *Fleming W. H., Soner H. M.* Controlled Markov processes and viscosity solution. — Springer, 2005. — 448 p.
2. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978.
3. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.

4. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
5. *Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В.* Оптимальное управление: линейная теория и приложения. — М.: Макс Пресс, 2007.
6. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
7. *Асеев С. М., Кряжимский А. В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. — М.: Наука, 2007. — 272 с.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
9. *Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Вища шк., 1974. — 472 с.
10. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах оптимального управления. — Киев, Одесса: Лыбедь, 1992. — 188 с.
11. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальние уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: Астропринт, 1999. — 354 с.
12. *Станжицкий А. Н., Добродзий Т. В.* Исследование задач оптимального управления на полуоси методом усреднения // Дифференц. уравнения. — 2011. — **47**, № 2. — С. 264–277.

Одержано 14.03.12