

## Нелинейные локализованные моды в пластине слоистого сверхпроводника

С.С. Апостолов<sup>1,2</sup>, Д.В. Кадыгроб<sup>1,2</sup>, З.А. Майзелис<sup>1,2</sup>, А.А. Николаенко<sup>2</sup>,  
В.А. Ямпольский<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины  
ул. Академика Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина*

<sup>2</sup>*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина  
E-mail: stapos@ukr.net*

Статья поступила в редакцию 14 ноября 2017 г., опубликована онлайн 25 января 2018 г.

Теоретически изучены нелинейные локализованные электромагнитные моды в пластине слоистого сверхпроводника. Предполагается, что пластина находится в однородном диэлектрическом окружении, сверхпроводящие слои перпендикулярны поверхности пластины, а моды распространяются поперек слоев. Несмотря на симметрию системы, в пластине могут существовать как симметричные и антисимметричные, так и несимметричные по магнитному полю локализованные моды, что связано с нелинейностью джозефсоновской плазмы. Показано, что при определенных условиях дисперсия локализованных мод может оказаться аномальной, а групповая скорость может обращаться в нуль. Благодаря нелинейности дисперсионные соотношения содержат амплитуду локализованной моды, что открывает возможность для наблюдения явления остановки света локализованных мод в пластине слоистого сверхпроводника.

Теоретично вивчено нелінійні локалізовані електромагнітні моди у пластині шаруватого надпровідника. Передбачається, що пластина знаходиться в однорідному діелектричному оточенні, надпровідні шари перпендикулярні поверхні пластини, а моди розповсюджуються поперек шарів. Незважаючи на симетрію системи, у пластині можуть існувати як симетричні й антисиметричні, так і несиметричні по магнітному полю локалізовані моди, що пов'язано з нелінійністю джозефсонівської плазми. Показано, що при певних умовах дисперсія локалізованих мод може виявитися аномальною, а групова швидкість може обернутися в нуль. Завдяки нелінійності дисперсійні співвідношення містять амплітуду локалізованої моди, що відкриває можливість для спостереження явища зупинки світла локалізованих мод в пластині шаруватого надпровідника.

PACS: 74.72.-h Купратные сверхпроводники;

73.20.Mf Коллективные возбуждения (включая экситоны, поляроны, плазмоны и другие возбуждения зарядовой плотности);

52.35.Mw Нелинейные явления: волны, распространение волн и другие взаимодействия.

Ключевые слова: слоистый сверхпроводник, локализованные моды, аномальная дисперсия.

### 1. Введение

Высокотемпературные  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  сверхпроводники и подобные им соединения имеют слоистую структуру, состоящую из сверхпроводящих слоев  $\text{CuO}_2$  с джозефсоновской связью между ними [1,2]. Взаимодействие джозефсоновского туннелирующего тока, текущего поперек слоев, с электромагнитным полем внутри образца приводит к существованию особого вида элементарных возбуждений, так называемых

джозефсоновских плазменных волн (ДПВ) [3]. Эти волны привлекают большой интерес исследователей, так как частота их распространения лежит в терагерцевой частотной области спектра [4,5], которая до сих пор остается трудно достижимой для современных электронных и оптических устройств. Интерес к терагерцевым волнам значительно вырос за последние десятилетия из-за их практической значимости в спектроскопии, томографии, медицинской диагностике и так далее [6,7].

Отметим, что слоистый сверхпроводник представляет собой нелинейную среду благодаря нелинейной связи плотности джозефсоновского тока с разностью фаз параметра порядка между сверхпроводящими берегами. Поэтому можно ожидать, что в таких материалах можно наблюдать эффекты, характерные для нелинейной оптики, такие как самофокусировка электромагнитных волн, стимулированная прозрачность, эффект остановки света и другие [8–10]. Некоторые из нелинейных эффектов в слоистых сверхпроводниках были теоретически предсказаны и исследованы в работах [11–14]. Авторы изучали нелинейные ДПВ, распространяющиеся вдоль сверхпроводящих слоев.

Относительно недавно было установлено [15], что в пластине слоистого сверхпроводника дисперсионные кривые линейных локализованных ДПВ, которые распространяются поперек сверхпроводящих слоев, содержат участки с аномальной дисперсией. Поэтому следует ожидать, что учет нелинейности должен модифицировать эту аномальность, добавив возможные дополнительные особенности. Ниже мы покажем, что в отличие от линейных ДПВ, в нелинейном случае наблюдается неизохорность, когда в дисперсионные уравнения входит амплитуда поля, что дает возможность наблюдать явление остановки света за счет изменения амплитуды локализованной моды.

Кроме того, как было показано [16,17], при  $\omega > \omega_J$  компоненты эффективного тензора диэлектрической проницаемости слоистого сверхпроводника вдоль и поперек слоев имеют разные знаки. Благодаря такой специфической особенности диэлектрической проницаемости в слоистом сверхпроводнике может наблюдаться явление отрицательной рефракции электромагнитных волн. Материалы с отрицательным показателем преломления в последнее время очень активно изучаются после теоретического предсказания возможности так называемой идеальной фокусировки света [18–20]. Таким образом, слоистые сверхпроводники являются очень интересными и перспективными материалами для исследований.

В данной работе изучены сильно нелинейные локализованные электромагнитные моды в пластине слоистого сверхпроводника, слои которого перпендикулярны поверхности пластины. Предполагается, что образец находится в однородном диэлектрическом окружении, а моды распространяются поперек сверхпроводящих слоев. Найдены неизохорные дисперсионные соотношения для локализованных мод, содержащие амплитуду моды. За счет изменения амплитуды, например уменьшения вследствие диссипации или увеличения при внешней накачке, можно наблюдать явление остановки света локализованных мод в пластине слоистого сверхпроводника.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе представлена постановка задачи, описана гео-

метрия системы, определены электромагнитные поля в диэлектрике, а также получено уравнение для нахождения электромагнитных полей в слоистом сверхпроводнике, которое имеет вид уравнения для осциллятора с кубической нелинейностью. Третий раздел посвящен анализу фазовых траекторий полученного уравнения и выводу дисперсионных соотношений для симметричных, антисимметричных и несимметричных по магнитному полю мод в нелинейном режиме. В третьем разделе представлен численный анализ полученных дисперсионных соотношений. Приложение содержит краткий справочный материал об эллиптических функциях, которые используются в статье.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим пластину слоистого сверхпроводника толщиной  $L$ , которая находится в диэлектрическом окружении с проницаемостью  $\epsilon_d$ , см. рис. 1. Систему координат выберем таким образом, чтобы оси  $x$  и  $y$  лежали в плоскости слоев  $ab$ , а ось  $z$  совпадала с кристаллографической осью  $c$ . Пластина граничит с диэлектриком при  $x = \pm L/2$  и не ограничена по  $y$  и  $z$ .

Мы будем изучать собственные локализованные электромагнитные моды ТМ поляризации с частотой  $\omega$ , распространяющиеся с волновым вектором  $\mathbf{q}$  поперек сверхпроводящих плоскостей в пластине слоистого сверхпроводника. Магнитное и электрическое поля в такой волне могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, y, z, t) &= \{0, H_y(x) \cos(qz - \omega t), 0\}, \\ \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \{E_x(x) \cos(qz - \omega t), 0, E_z(x) \sin(qz - \omega t)\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Электромагнитное поле локализованных мод, согласно уравнениям Максвелла, должно экспоненциально ослабляться при удалении от границы пластины. Таким образом, в полубесконечном образце на границе раздела «диэлектрик–слоистый сверхпроводник» возникают поверхностные моды [21]. Поля таких поверхностных

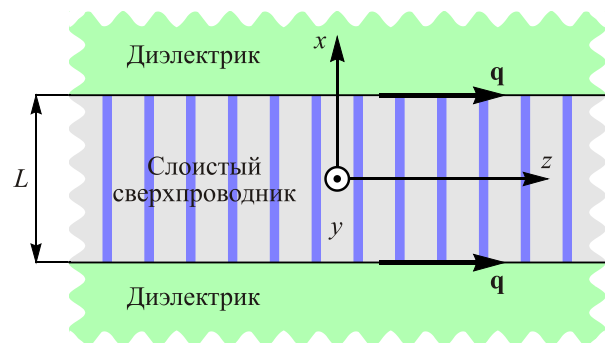


Рис. 1. (Онлайн в цвете) Геометрия задачи — волна с продольной компонентой волнового вектора  $\mathbf{q}$  распространяется вдоль пластины слоистого сверхпроводника толщины  $L$ , помещенной в диэлектрик с проницаемостью  $\epsilon_d$ .

мод экспоненциально затухают в обеих средах. В данной геометрии наличие второй границы приводит к тому, что в линейном режиме электромагнитное поле в слоистом сверхпроводнике может как экспоненциально затухать, так и осциллировать поперек пластины [15]. Как будет показано ниже, в сильно нелинейном режиме поперечное распределение поля в слоистом сверхпроводнике описывается не тригонометрическими функциями, а эллиптическими функциями Якоби (см. разд. 3 и Приложение). Более того, несмотря на симметрию задачи относительно плоскости  $x = 0$ , нелинейность приводит к тому, что решение может быть не только симметричным либо антисимметричным, но и несимметричным по магнитному полю.

### 2.1. Поля в диэлектрике

Как уже упоминалось выше, электромагнитное поле искомой волны экспоненциально затухает в диэлектрике при удалении от поверхности пластины, поэтому выражение для  $y$ -компоненты магнитного поля можно записать в следующем виде:

$$H_y^\pm(x) = H^\pm \exp[k_d(\mp x + L/2)], \quad (2)$$

где  $H^\pm$  — амплитуда волны; верхний индекс + и — соответствует полупространствам  $x > L/2$  и  $x < -L/2$ .

Из уравнений Максвелла находим  $z$ -компоненту электрического поля в диэлектрике

$$E_z^\pm(x) = \pm \frac{ck_d}{\omega \epsilon_d} H^\pm \exp[k_d(\mp x + L/2)], \quad (3)$$

и выражение для декремента затухания  $k_d$  электромагнитных волн в диэлектрическом полупространстве:

$$k_d = \sqrt{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_d}. \quad (4)$$

### 2.2. Поля в пластине слоистого сверхпроводника

Слоистые сверхпроводники имеют сильную токопроводящую анизотропию. Токи в плоскости слоев (в  $\mathbf{ab}$ -плоскости) существенно превышают токи вдоль кристаллографической оси  $c$ . Физическая природа этих токов также различна. В плоскости сверхпроводящих слоев ток  $J_x$  имеет ту же природу, что и токи в объемных сверхпроводниках:

$$J_x = -\frac{c}{4\pi\lambda_{ab}^2} A_x, \quad (5)$$

где  $\lambda_{ab}$  — лондоновская глубина проникновения магнитного поля перпендикулярно сверхпроводящим слоям,  $A_x$  — компонента векторного потенциала  $\mathbf{A}$  в  $x$ -направлении,  $c$  — скорость света.

Плотность тока поперек слоев (вдоль оси  $z$ ) является джозефсоновской:

$$J_z = J_c \sin \varphi, \quad (6)$$

где  $J_c$  — максимальная плотность джозефсоновского тока,  $\varphi$  — межслойная калибровочно-инвариантная разность фаз параметра порядка. Здесь мы предполагаем, что квазичастичные проводимости вдоль и поперек слоев малы и не будем их учитывать.

Также отметим, что компонента  $E_z$  электрического поля может вызывать нарушение электронейтральности сверхпроводящих слоев, что приводит к возникновению дополнительной связи электромагнитных полей между соседними слоями (к так называемой емкостной связи). Однако эта связь не влияет существенно на свойства ДПВ из-за малости дебаевского радиуса  $R_D$  для зарядов в сверхпроводнике, и ею можно пренебречь, если мал параметр емкостной связи,  $\eta = R_D^2 \epsilon_s / sd \ll 1$ . Здесь  $\epsilon_s$  — межслойная диэлектрическая проницаемость, а  $s$  и  $d$  — толщины сверхпроводящего и диэлектрического слоев, соответственно,  $D = s + d$  (см. работу [23], в которой получено дисперсионное уравнение для джозефсоновских плазменных волн с учетом емкостной связи). Например, согласно теоретическим оценкам для кристаллов  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  величина  $\eta \sim 0,05 - 0,1$ .

Здесь мы также считаем, что характерные пространственные масштабы изменения электромагнитного поля вдоль оси  $z$  велики по сравнению с межслойным расстоянием  $D$ , что позволяет перейти к континуальному пределу. Если пренебречь нарушением электронейтральности, калибровку векторного потенциала можно выбрать так, чтобы параметр порядка был вещественным и разность фаз  $\varphi$  связана с  $z$ -компонентой векторного потенциала простым соотношением (см., например, [3]):

$$A_z = -\frac{\Phi_0}{2\pi D} \varphi, \quad (7)$$

где  $\Phi_0 = \pi\hbar / e$  — квант магнитного потока.

Векторный потенциал связан с электрическим  $\mathbf{E}$  и магнитным  $\mathbf{H}$  полями стандартными соотношениями:

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (8)$$

скалярный потенциал предполагается равным нулю.

Электродинамическое описание слоистых сверхпроводников мы будем строить на основе уравнения для векторного потенциала  $\mathbf{A}$  в следующей форме:

$$\text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = -\frac{\epsilon_s}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (9)$$

Расписав более подробно уравнение (9), используя выражения (5)–(7), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} &= -\frac{\varepsilon_s}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} - \frac{A_x}{\lambda_{ab}^2}, \\ \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} &= -\frac{\varepsilon_s}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c} J_c \sin(A_z) \frac{2\pi D}{\Phi_0}. \end{aligned} \quad (10)$$

В нашей задаче мы предполагаем, что амплитуда магнитного поля волны существенно меньше критического значения  $\mathcal{H}_0 = \Phi_0 / (2\pi D \lambda_c)$ , при котором возможно проникновение джозефсоновского вихря в контакт. Здесь  $\lambda_c = c / (\omega_J \sqrt{\varepsilon_s})$  — лондоновская глубина проникновения магнитного поля вдоль слоев,  $\omega_J = \sqrt{8\pi e D J_c / \hbar \varepsilon_s}$  — джозефсоновская плазменная частота. Поскольку калибровочно-инвариантная разность фаз  $\varphi(x, z, t)$  связана с компонентой электромагнитного поля посредством уравнения (7), а амплитуды полей (8) предполагаются малыми, то можно считать, что разность фаз также мала,  $|\varphi| \ll 1$ . Тогда слагаемое  $\sin \varphi$  во втором уравнении из системы (10) можно приближенно аппроксимировать кубической зависимостью  $\varphi - \varphi^3/6$ . Как было показано в работе [11], нелинейный член  $\varphi^3$  существенно влияет на распространение ДПВ, если частота волны близка к джозефсоновской плазменной  $\omega_J$ .

Учитывая линейную связь между фазой параметра порядка и векторным потенциалом (7) и действуя аналогично работе [11], будем искать решение системы уравнений (10) в виде

$$A_z(x, z, t) = A_0 a(\xi) \cos(qz - \omega t), \quad (11)$$

где для удобства дальнейшего изложения введены безразмерная амплитуда  $a(\xi)$ , безразмерная координата  $\xi$ , представляющая собой поперечную координату  $x$ , нормированную на модуль  $x$ -проекции  $k_s$  волнового вектора линейной волны в слоистом сверхпроводнике [15],

$$\xi = |k_s| x,$$

$$k_s^2 = \frac{1}{\lambda_c^2} (\Omega^2 - 1) [1 + q^2 \lambda_{ab}^2 / (1 - \Omega^2 / \gamma^2)], \quad (12)$$

и безразмерная частота  $\Omega = \omega / \omega_J$ , нормированная на джозефсоновскую плазменную частоту  $\omega_J$ , а  $\gamma = \lambda_c / \lambda_{ab} \gg 1$ .

Как показано в [11], потерями на переизлучение, т.е. генерацией волн более высоких частот  $3\omega, 5\omega, 7\omega, \dots$ , для малых амплитуд можно пренебречь. Это позволяет заменить нелинейный член  $A_z^3 \propto \cos^3(qz - \omega t)$  на

$$A_z^3 = (3/4) A_0^3 a^3(\xi) \cos(qz - \omega t), \quad (13)$$

отбрасывая слагаемые, содержащие более высокие частоты.

Обратим внимание на то, что параметр анизотропии  $\gamma = \lambda_c / \lambda_{ab} \gg 1$ , и выражением  $\Omega^2 / \gamma^2$  в знаменателе (12) можно пренебречь. Тем не менее, если нормированная частота  $\Omega$  окажется сравнима по величине с  $\gamma$ , то этот вклад необходимо учитывать. Для висмутового

сверхпроводника  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  параметр анизотропии  $\gamma$  достигает значений порядка 100, однако в соединениях  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}$  — не более 10. Следует также указать на существование еще одной группы слоистых сверхпроводников — искусственно созданных слоистых структур на основе джозефсоновских контактов  $\text{Nb-A-AlO}_x\text{-Nb}$  (см. например, работу [16] и ссылки в ней), у которых степень анизотропии и другие свойства можно задать с заранее требуемыми параметрами.

Подставляя (11) и (13) в (10), исключая  $A_x$  и выбирая  $A_0 = \mathcal{H}_0 \lambda_c \sqrt{8|\Omega^2 - 1|^{1/2}}$ , получаем уравнение для безразмерной амплитуды  $a(\xi)$ :

$$a''(\xi) + \sigma a(\xi) + a^3(\xi) = 0, \quad (14)$$

где штрих обозначает производную по  $\xi$ , а  $\sigma = \text{sign}(\Omega - 1)$  принимает значения +1 или -1 в соответствии со знаком выражения  $(\Omega - 1)$ .

Компоненты электромагнитного поля могут быть найдены из уравнений Максвелла (8):

$$\begin{aligned} H_y^s(x) &= -\mathcal{H}_0 \frac{\sqrt{8|\Omega^2 - 1|^{3/2}}}{\lambda_c |k_s|} a'(\xi), \\ E_z^s(x) &= -\mathcal{H}_0 \frac{\sqrt{8|\Omega^2 - 1|^{1/2}}}{\sqrt{\varepsilon_s}} a(\xi). \end{aligned} \quad (15)$$

Решения уравнения (14) могут быть найдены в аналитической форме в терминах эллиптических функций Якоби (см. Приложение А). На основе этих решений в следующем разделе будут выведены дисперсионные соотношения для локализованных мод.

### 3. Дисперсионные соотношения

Для получения дисперсионных соотношений для локализованных мод следует использовать условие непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля на границах пластины:

$$\left. \frac{E_z^\pm}{H_y^\pm} \right|_{x=\pm L/2} = \left. \frac{E_z^s}{H_y^s} \right|_{x=\pm L/2}. \quad (16)$$

Перепишем граничные условия в терминах функции  $a(\xi)$ , используя выражения для электромагнитных полей (2) и (3) в диэлектрике и (15) в пластине слоистого сверхпроводника:

$$\left. \frac{a'(\xi)}{a(\xi)} \right|_{\xi=\pm\xi_b} = \pm\beta, \quad (17)$$

где

$$\xi_b = |k_s| L/2, \quad \beta = \frac{\varepsilon_d |k_s| \Omega^2}{\varepsilon_s k_d |\Omega^2 - 1|}. \quad (18)$$

Обратим внимание на то, что рассматриваемая система обладает симметрией относительно плоскости  $x = 0$  (или в безразмерных переменных  $\xi = 0$ ), что в

линейном случае приводит к наличию симметрии у локализованных мод: моды являются симметричными либо антисимметричными по магнитному полю. Однако в нелинейном режиме могут существовать несимметричные локализованные моды. В следующем подразделе мы проанализируем различные типы фазовых траекторий уравнения (14), т.е. кривые на фазовой плоскости  $(a, a')$ , соответствующие распределению электромагнитного поля в пластине сверхпроводника, и обоснуем наличие таких несимметричных мод.

### 3.1. Анализ фазовых траекторий

Проинтегрируем один раз уравнение (14) и получим уравнение фазовых траекторий, т.е. кривых на плоскости  $(a, a')$ , в неявном виде:

$$2(a')^2 + 2\sigma a^2 + a^4 = (2\alpha + 1)^2 - 1. \quad (19)$$

Константа интегрирования в правой части уравнения выбрана в таком виде, который упростит дальнейшее изложение.

Вид фазовых траекторий зависит от значения  $\sigma$ . В случае  $\sigma = 1$  (т.е.  $\Omega > 1$ ) единственная особая точка  $(a, a') = (0, 0)$  имеет тип «центр» и фазовые траектории представляют собой концентрические циклы, изображенные тонкими сплошными линиями на вставке рис. 2, при этом параметр  $\alpha > 0$ .

В случае  $\sigma = -1$  (т.е.  $\Omega < 1$ ) имеются три особые точки: точка  $(a, a') = (0, 0)$  имеет тип «седло», а точки  $(a, a') = (\pm 1, 0)$  — тип «центр». Исходя из этого можно выделить два типа фазовых траекторий, изображенных тонкими сплошными линиями на основной панели рис. 2: малые циклы при  $-1/2 < \alpha < 0$ , охватывающие одну из точек  $(a, a') = (\pm 1, 0)$ , и большие циклы при  $\alpha > 0$ , охватывающие все три особые точки. Области, содержащие разные типы фазовых траекторий, разделены между собой сепаратрисой  $2(a')^2 - 2a^2 + a^4 = 0$  при  $\alpha = 0$ , изображенной тонкой штриховой линией на основной панели рис. 2.

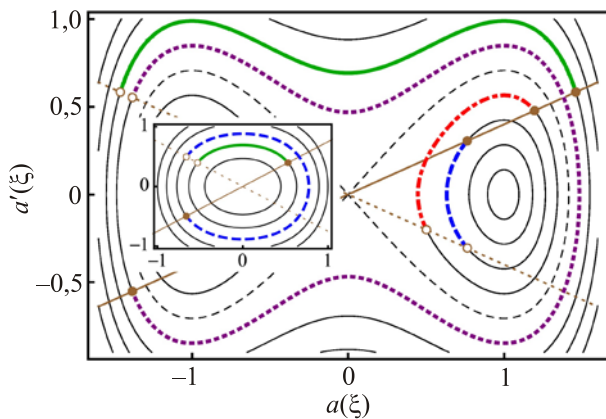


Рис. 2. (Онлайн в цвете) Фазовые траектории для уравнения (14) при  $\sigma = -1$  (основная панель) и  $\sigma = 1$  (вставка).

Рассмотрим теперь различные типы решений уравнения (12) при наложении граничных условий (17). На рис. 2 сплошной и пунктирной прямыми линиями изображены прямые  $a' = +\beta a$  и  $a' = -\beta a$  соответственно. Поперечному распределению поля в пластине слоистого сверхпроводника соответствует участок фазовой траектории, начало которого при  $x = -L/2$  расположено на пунктирной прямой и отмечено полым кружком, а конец при  $x = +L/2$  расположен на сплошной прямой и отмечен сплошным кружком. При этом движение вдоль фазовой траектории должно происходить по часовой стрелке, что соответствует увеличению координаты  $x$  (или безразмерной координаты  $\xi$ ).

Можно выделить следующие основные типы решений уравнения (14) с граничными условиями (17), которые изображены толстыми кривыми на рис. 2. Для  $\sigma = 1$  (т.е.  $\Omega > 1$ ) имеется два типа решений: симметричное и антисимметричное по магнитному полю  $H_y \propto a'(\xi)$ , изображенные на вставке рис. 2 сплошной и штриховой толстыми кривыми соответственно. Такие типы нелинейных решений качественно похожи на соответствующие линейные решения, лишь количественно модифицированные за счет нелинейности, поэтому мы не будем их подробно анализировать.

Для  $\sigma = -1$  (т.е.  $\Omega < 1$ ) имеется четыре типа решений: симметричное, антисимметричное высоко- и низко-амплитудное, и несимметричное по магнитному полю  $H_y \propto a'(\xi)$ , изображенные на основной панели рис. 2 сплошной, пунктирной, штриховой и штрихпунктирной толстыми кривыми соответственно. Аналитический вид решений представлен в следующих подразделах. Здесь мы обсудим качественное отличие этих типов. Два первых типа, симметричное и высоко-амплитудное антисимметричное решения, соответствуют большим циклам на фазовой диаграмме при  $\alpha > 0$ . Два остальных типа, антисимметричное низкоамплитудное и несимметричное, соответствуют малым циклам при  $-1/2 < \alpha < 0$ . Обратим внимание на то, как построено несимметричное решение. Пусть прямые  $a' = \pm\beta a$  пересекают некий малый цикл в точках  $(a, a') = (a_1, \pm a'_1)$  и  $(a, a') = (a_2, \pm a'_2)$ . Тогда в качестве начальной и конечной точек фазовой траектории можно выбрать, например  $(a, a') = (a_1, -a'_1)$  и  $(a, a') = (a_2, +a'_2)$  соответственно. Такое решение, очевидно, не является ни симметричным, ни антисимметричным.

На рис. 3 представлены распределения  $a'(\xi)$  и  $a(\xi)$ , соответствующие отмеченным фазовым траекториям на основной панели рис. 2. Поскольку  $H_y(x)$  и  $E_z(x)$  пропорциональны этим распределениям,  $H_y(x) \propto a'(\xi)$  и  $E_z(x) \propto a(\xi)$ , см. уравнения (15), то рис. 3 демонстрирует распределение электромагнитных полей в сверхпроводнике.

В следующих подразделах будут представлены аналитические решения уравнения (14), выраженные через эллиптические функции Якоби (см. [27] и Приложение).

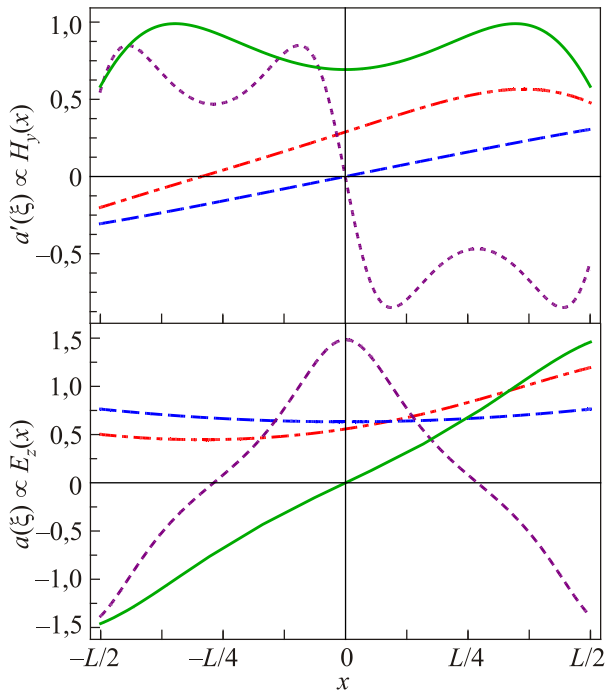


Рис. 3. (Онлайн в цвете) Функции  $a'(\xi)$  и  $a(\xi)$ , соответствующие пространственным распределениям компонент электромагнитного поля  $H_y(x)$  и  $E_z(x)$  в слоистом сверхпроводнике, изображенные сплошной, штриховой, пунктирной и штрихпунктирной линиями, в согласии с фазовыми траекториями на основной панели рис. 2.

### 3.2. Высокочастотные моды, $\Omega > 1$

Соответствующие фазовые траектории изображены на вставке рис. 2 толстой сплошной и штриховой линиями. В этом случае решения уравнения (14) с  $\sigma = 1$  выражаются через эллиптические функции  $\text{sn}(u; m)$  и  $\text{cd}(u; m)$ , см. Приложение, для симметричной и антисимметричной по магнитному полю моды соответственно,

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \sqrt{2\alpha} \text{sn}[\sqrt{1+\alpha}\xi; -\alpha(1+\alpha)^{-1}], \\ a(\xi) &= \sqrt{2\alpha} \text{cd}[\sqrt{1+\alpha}\xi; -\alpha(1+\alpha)^{-1}], \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\alpha > 0$ .

Подставляя  $a(\xi)$  в условие (17) на верхней границе (в силу симметричности решения на нижней границе условие (17) выполнится автоматически), получаем дисперсионные соотношения для симметричных и антисимметричных мод,

$$\sqrt{1+\alpha} \text{dt}[\sqrt{1+\alpha}\xi_b; -\alpha(1+\alpha)^{-1}] = \beta, \quad (21)$$

$$\frac{1+2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} \text{td}[\sqrt{1+\alpha}\xi_b; -\alpha(1+\alpha)^{-1}] = -\beta. \quad (22)$$

Здесь  $\alpha > 0$ , а  $\xi_b$  и  $\beta$  определены уравнениями (18).

Отметим, что эллиптические функции  $\text{dt}(u; m)$  и  $\text{td}(u; m)$  превращаются при  $m \rightarrow 0$  в  $\text{ctg}(u)$  и  $\text{tg}(u)$  соответственно. Таким образом, при  $\alpha \rightarrow 0$  мы приходим к дисперсионным соотношениям для линейных [15] симметричных и антисимметричных мод,

$$\text{ctg}(\xi_b) = \beta, \quad \text{tg}(\xi_b) = -\beta. \quad (23)$$

### 3.3. Низкочастотные моды, $\Omega < 1$

Соответствующие фазовые траектории обозначены на основной панели рис. 2 толстыми линиями: сплошная — для симметричных, штриховая и пунктирная — для низко- и высокоамплитудных, штрихпунктирная — для несимметричных по магнитному полю мод.

#### 3.3.1. Симметричные и низкоамплитудные антисимметричные моды

Для таких решений уравнения (14) результаты аналогичны подразделу 3:

$$a(\xi) = \sqrt{2\alpha} \text{snh}[\sqrt{1+\alpha}\xi; -\alpha(1+\alpha)^{-1}], \quad (24)$$

при  $\alpha > 0$  для симметричных и

$$a(\xi) = \sqrt{2|\alpha|} \text{cdh}[\sqrt{1+\alpha}\xi; |\alpha|(1+\alpha)^{-1}], \quad (25)$$

при  $-1/2 < \alpha < 0$  для низкоамплитудных антисимметричных по магнитному полю мод. Здесь  $\text{snh}(u; m)$  и  $\text{cdh}(u; m)$  — «гиперболические» эллиптические функции, см. Приложение.

Подставляя  $a(\xi)$  в условие (17) на верхней границе, получаем дисперсионные соотношения:

$$\sqrt{1+\alpha} \text{dth}[\sqrt{1+\alpha}\xi_b; -\alpha(1+\alpha)^{-1}] = \beta, \quad (26)$$

при  $\alpha > 0$  для симметричных и

$$\frac{1+2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} \text{tdh}[\sqrt{1+\alpha}\xi_b; |\alpha|(1+\alpha)^{-1}] = \beta, \quad (27)$$

при  $-1/2 < \alpha < 0$  для низкоамплитудных антисимметричных по магнитному полю мод. Здесь  $\xi_b$  и  $\beta$  определены уравнениями (18).

Отметим, что эллиптические функции  $\text{dth}(u; m)$  и  $\text{tdh}(u; m)$  превращаются при  $m \rightarrow 0$  в  $\text{ctg}(u)$  и  $\text{tg}(u)$  соответственно. Таким образом, при  $\alpha \rightarrow 0$  мы приходим к дисперсионным соотношениям для линейных [15] симметричных и антисимметричных мод:

$$\text{cth}(\xi_b) = \beta, \quad \text{th}(\xi_b) = \beta. \quad (28)$$

#### 3.3.2. Высокоамплитудные антисимметричные моды

Решение уравнения (14) для высокоамплитудных антисимметричных мод имеет вид

$$a(\xi) = \sqrt{2(1+\alpha)} \text{cd}[\sqrt{\alpha}\xi; -\alpha^{-1}(1+\alpha)], \quad (29)$$

при  $\alpha > 0$ . Отметим, что такие моды не имеют линейного аналога, поскольку амплитуда этих мод может достигать максимума  $a_{\max} = \sqrt{2(1+\alpha)} \geq \sqrt{2}$ , который может быть реализован только вблизи  $\Omega = 1$ , поскольку  $|a(\xi)| \ll |\Omega^2 - 1|^{-1/2}$ .

Подставляя  $a(\xi)$  в условие (17) на верхней границе пластины, получаем дисперсионное соотношение для высокоамплитудных антисимметричных мод:

$$\frac{1+2\alpha}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{td} \left[ \sqrt{\alpha} \xi_b; -\alpha^{-1}(1+\alpha) \right] = -\beta, \quad (30)$$

при  $\alpha > 0$ . Здесь  $\xi_b$  и  $\beta$  определены уравнениями (18).

### 3.3.3. Несимметричные моды

Решение уравнения (14) для этого случая совпадает с решением (25) для низкоамплитудных мод с той разницей, что мы вводим в эллиптическую функцию сдвиг  $\xi_0$ :

$$a(\xi) = \sqrt{2|\alpha|} \operatorname{cdh}[\sqrt{1+\alpha}(\xi_0 + \xi); |\alpha|(1+\alpha)^{-1}], \quad (31)$$

при  $-1/2 < \alpha < 0$ .

Подставляя  $a(\xi)$  в условие (17) на верхней и нижней границах пластины, получаем дисперсионное соотношение в виде пары связанных уравнений:

$$\frac{1+2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} \operatorname{tdh}[\sqrt{1+\alpha}(\xi_0 \pm \xi_b); |\alpha|(1+\alpha)^{-1}] = \pm\beta, \quad (32)$$

при  $-1/2 < \alpha < 0$ . Здесь  $\xi_b$  и  $\beta$  определены уравнениями (18). Обратим внимание на то, что такие моды не имеют линейного аналога, несмотря на то, что решение (31) по структуре совпадает с решением (25) для низкоамплитудных мод. Дело в том, что при переходе в линейный режим,  $\alpha \rightarrow 0$ , мы получаем пару уравнений:

$$\tanh(\xi_0 \pm \xi_b) = \pm\beta, \quad (33)$$

которые, в силу монотонности и нечетности функции  $\tanh(\xi)$ , имеют решение только при  $\xi_0 = 0$ , т.е. мы возвращаемся к низкоамплитудным антисимметричным модам.

Для вывода дисперсионного соотношения в замкнутой форме необходимо исключить неизвестный сдвиг  $\xi_0$  из этой пары уравнений. Для этого используем следующие свойства функции  $\operatorname{tdh}(u; m)$ , см. рис. 4. Ее период равен  $2K(1-m)$ , где  $K(m)$  — полный эллиптический интеграл 1-го рода (см. Приложение). Пусть известен  $u_0$  — корень уравнения  $\operatorname{tdh}(u; m) = v$ , удовлетворяющий условию  $0 < u_0 < K(1-m)/2$ . Тогда остальные корни этого уравнения могут быть найдены в виде  $u = (-1)^n u_0 + nK(1-m)$ , а корни уравнения  $\operatorname{tdh}(u; m) = -v$  — в виде  $u = -(-1)^n u_0 + nK(1-m)$ , где  $n$  — произвольное целое число.

На рис. 4 сплошной линией изображена функция  $\operatorname{tdh}(u; m)$ , кружками обозначены точки, в которых

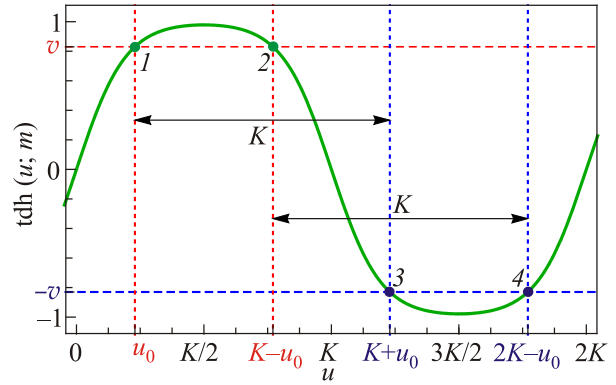


Рис. 4. (Онлайн в цвете) График функции  $\operatorname{tdh}(u; m)$ , где кружками изображены решения уравнения  $\operatorname{tdh}(u; m) = \pm v$ .

$\operatorname{tdh}(u; m) = \pm v$ , вертикальными пунктирными и горизонтальными штриховыми прямыми обозначены координаты этих точек. Точки 1 и 2 с  $u_1 = u_0$  и  $u_2 = K - u_0$  соответствуют решениям уравнения  $\operatorname{tdh}(u; m) = v$ , а точки 3 и 4 с  $u_3 = K + u_0$  и  $u_4 = 2K - u_0$  соответствуют решениям уравнения  $\operatorname{tdh}(u; m) = -v$ .

Из вышесказанного ясно, что разность между двумя «несимметричными» корнями уравнений  $\operatorname{tdh}(u; m) = \pm v$  равна полупериоду, т.е.  $(2n+1)K(1-m)$ , где  $n$  — целое число. Например, на рис. 4 стрелками показано, что  $u_3 - u_1 = u_4 - u_2 = K(1-m)$ .

Окончательно мы можем записать дисперсионное соотношение для несимметричных мод в виде

$$2\sqrt{1+\alpha}\xi_b = (2n+1)K[1-|\alpha|(1+\alpha)^{-1}], \quad (34)$$

где  $n$  — целое число. В случае сильной анизотропии  $\gamma \gg 1$  можем записать дисперсию в явном виде:

$$\omega(q) = \omega_J \sqrt{1 - \frac{K^2[1-|\alpha|(1+\alpha)^{-1}]}{1+\alpha} \frac{(2n+1)^2 \lambda_c^2}{1+q^2 \lambda_{ab}^2 L^2}}. \quad (35)$$

Обратим внимание на то, что полученное дисперсионное соотношение не содержит параметров, характеризующих среду, в которую помещен сверхпроводник. Дисперсионное соотношение лишь указывает на то, что поперек пластины укладывается нечетное число полудлин нелинейных волн. Однако параметры диэлектрического окружения влияют на распределение поля в образце, поскольку определяют значение корней уравнений (32). К тому же для существования таких несимметричных локализованных мод необходимо, чтобы, во-первых, электромагнитное поле в диэлектрике было затухающим, т.е.  $\omega < cq/\sqrt{\epsilon_d}$ , а во-вторых, существовали корни уравнений (32), т.е.

$$\beta < \frac{1+2\alpha}{\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{|\alpha|}}. \quad (36)$$

#### 4. Обсуждение дисперсионных кривых

Начнем рассмотрение с режима слабой нелинейности. При частотах  $\omega$  далеких от джоузефсоновской плазменной частоты  $\omega_J$ , т.е. при  $|\Omega - 1| \gg 1$ , этот режим имеет место для относительно тонких пластин с  $L \ll |\alpha|^{-1} \lambda_c$ , когда параметр нелинейности  $\alpha$  мал,  $|\alpha| \ll 1$ . Ограничение  $L \ll |\alpha|^{-1} \lambda_c$  необходимо для того, чтобы аргумент эллиптических функций, входящих в дисперсионные соотношения, слабо отличался от аргумента соответствующих тригонометрических функций в линейном случае. Сравним эти аргументы в уравнениях (24) и (28). Очевидно, что слабая нелинейность реализуется только в случае, когда  $|\alpha| \xi_b \ll 1$ . Если мы считаем, что  $|\Omega - 1| \sim 1$  и  $q\lambda_{ab} \sim 1$ , то приходим к неравенству  $L \ll |\alpha|^{-1} \lambda_c$ .

На рис. 5 представлены дисперсионные кривые для симметричных (сплошные линии, уравнения (21) и (24)) и низкоамплитудных антисимметричных (штриховые линии, уравнения (22) и (25)) в линейном случае (тонкие линии) и нелинейном режиме при малом значении параметра нелинейности  $|\alpha| = 0,1$  (толстые линии). Другие параметры:  $\varepsilon_s/\varepsilon_d = 4$ ,  $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$ ,  $L = 2\lambda_c$ . Кривые пронумерованы снизу вверх:  $n = 1, 2, \dots$ , причем нечетным номерам  $n = 1, 3, \dots$  соответствуют антисимметричные, а четным номерам  $n = 2, 4, \dots$  — симметричные по магнитному полю моды. На графике видно, что в режиме слабой нелинейности дисперсионные кривые незначительно отличаются от линейного случая, изученного в [15].

Далее рассмотрим область частот, близких к джоузефсоновской плазменной частоте  $\omega_J$ ,  $|\Omega - 1| \ll 1$ , а также случай сравнительно больших значений толщи-

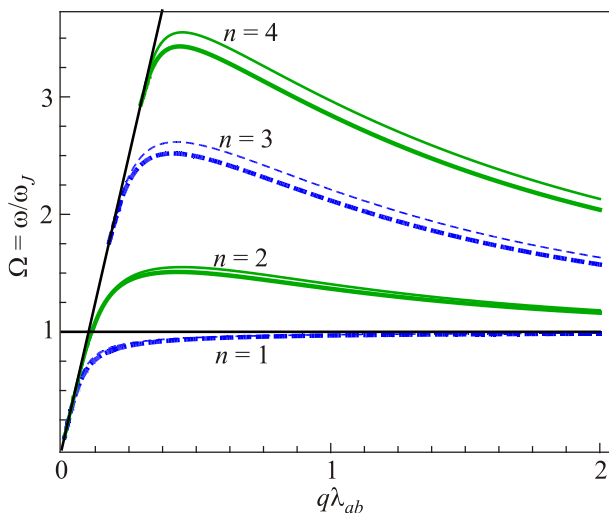


Рис. 5. (Онлайн в цвете) Дисперсионные кривые для симметричных (сплошные линии) и антисимметричных (штриховые линии) в линейном случае (тонкие линии) и нелинейном режиме при  $|\alpha| = 0,1$  (толстые линии). Другие параметры:  $\varepsilon_s/\varepsilon_d = 4$ ,  $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$ ,  $L = 2\lambda_c$ .

ны пластины  $L \sim \lambda_c/|\alpha|$ . Тогда режим сильной нелинейности имеет место, если  $a(\xi) \sim 1 \ll |\Omega - 1|^{-1/2}$ . На рис. 6 представлены дисперсионные кривые для симметричных (сплошные линии), низкоамплитудных (штриховые линии) и высокоамплитудных (пунктирные линии) антисимметричных, а также несимметричных (штрихпунктирные линии) по магнитному полю мод в линейном (тонкие линии) и нелинейном (толстые линии) режимах. Параметры:  $|\alpha| = 0,2$ ,  $\varepsilon_s/\varepsilon_d = 4$ ,  $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$ ,  $L = 4\lambda_c$ . Видим, что имеется семейство дисперсионных кривых при  $\Omega < 1$ , соответствующих сильно нелинейному режиму, тогда как в линейном случае для каждого типа кривой (симметричной и антисимметричной) была только одна кривая. Появление семейства дисперсионных кривых в нелинейном режиме вместо одной кривой в линейном случае связано с тем, что электромагнитное поле затухает поперек пластины, а в нелинейном случае осциллирует благодаря периодичности эллиптических функций. При этом каждая последующая кривая семейства соответствует дополнительной длине нелинейной волны, укладывающейся поперек пластины.

Отметим, что режим сильной нелинейности для низкочастотных кривых при  $\Omega < 1$  может достигаться даже при малых значениях параметра  $\alpha$ , если аргумент эллиптических функций в дисперсионном соотношении оказывается сравним или превосходит период этих функций. С физической точки зрения это означает, что нелинейная волна из линейной затухающей становится нелинейной осциллирующей. Рассмотрим, например, соотношение (27) для низкоамплитудных антисимметричных мод, содержащее эллиптическую функцию  $\text{tdh}(u; m)$ , которая была проанализирована в подразделе

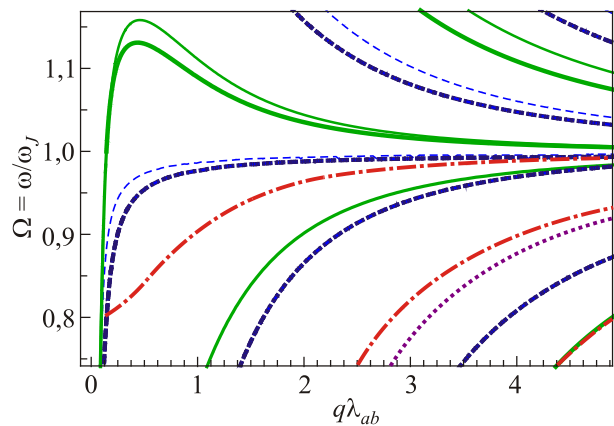


Рис. 6. (Онлайн в цвете) Дисперсионные кривые для симметричных (сплошные линии), низкоамплитудных (штриховые линии) и высокоамплитудных антисимметричных (пунктирные линии), а также несимметричных (штрихпунктирные линии) по магнитному полю мод в линейном (тонкие линии) и нелинейном (толстые линии) режимах. Параметры:  $|\alpha| = 0,2$ ,  $\varepsilon_s/\varepsilon_d = 4$ ,  $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$ ,  $L = 4\lambda_c$ .



ле 3.3.3. Период этой функции, как уже было сказано, равен  $K(1-m)$ . Тогда при малом  $\alpha$  нелинейный режим для низкоамплитудных антисимметричных мод достигается при

$$\xi_b \gtrsim 2K[1-|\alpha|] \approx \ln(2/|\alpha|), \quad |\alpha| \ll 1. \quad (37)$$

В дополнительном предположении  $1-\Omega^2 \ll 1$  и  $\lambda_{ab}q \gg 1$  можно переписать последнее соотношение в виде условия на толщину пластины:

$$L \gtrsim \frac{\lambda_c \ln(2/|\alpha|)}{q\lambda_{ab}\sqrt{1-\Omega^2}}. \quad (38)$$

Покажем, как линейный режим переходит в нелинейный при малом параметре  $\alpha$  и достаточно большой толщине  $L$  на примере дисперсионных кривых с номером  $n=1$  (антисимметричная мода) и  $n=2$  (симметричная мода). В линейном случае в работе [15] показано, что кривая с  $n=1$  всегда монотонна и расположена в области  $\Omega < 1$ . При достаточно малых толщинах,  $L \ll (\epsilon_s \lambda_c^2)/(\epsilon_d \lambda_{ab})$ , кривая с  $n=2$  располагается как в области  $\Omega > 1$ , так и при  $\Omega < 1$ , как на рис. 5. При этом кривая с  $n=2$  немонотонна и имеет точку максимума. Если же толщина становится достаточно большой,  $L \sim (\epsilon_s \lambda_c^2)/(\epsilon_d \lambda_{ab})$ , то дисперсионная кривая с  $n=2$  опускается полностью в область  $\Omega < 1$ . В этом случае она также будет немонотонна, но кроме точки максимума будет иметь еще и точку минимума. Указанные дисперсионные кривые изображены на рис. 7 тонкими штриховой ( $n=1$ ) и сплошной ( $n=2$ ) линиями. Параметры:  $\epsilon_s/\epsilon_d = 4$ ,  $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$ ,  $L = 24\lambda_c$ .

Теперь обратимся к нелинейному случаю. На рис. 7 толстыми штриховой ( $n=1$ ) и сплошной ( $n=2$ ) линиями показаны эти же дисперсионные кривые при значении параметра  $|\alpha| = 2 \cdot 10^{-5}$ . Видно, что при относительно небольших значениях волнового вектора,  $q\lambda_{ab} \sim 1$ , кривые в линейном и нелинейном режиме почти совпадают. Но при  $q\lambda_{ab} \gg 1$  кривые начинают расходиться в согласии с условием (38). При этом дисперсионная кривая с  $n=1$  становится немонотонной и имеет точку максимума, а на кривой с  $n=2$  появляется еще один дополнительный максимум, а минимум смещается в меньшие значения частоты, см. вставку на рис. 7.

Обратим внимание на то, что изменение положения минимумов и максимумов на дисперсионных кривых при изменении параметра  $\alpha$  позволяет наблюдать явление остановки света для локализованных мод. Рассмотрим локализованную моду определенной частоты  $\omega$ , которая распространяется вдоль пластины, и предположим, что амплитуда этой волны изменяется при распространении (например, убывает вследствие диссипации или возрастает при внешней накачке). Поскольку амплитуда моды может быть определенным образом выражена через параметр  $\alpha$ , то при распро-

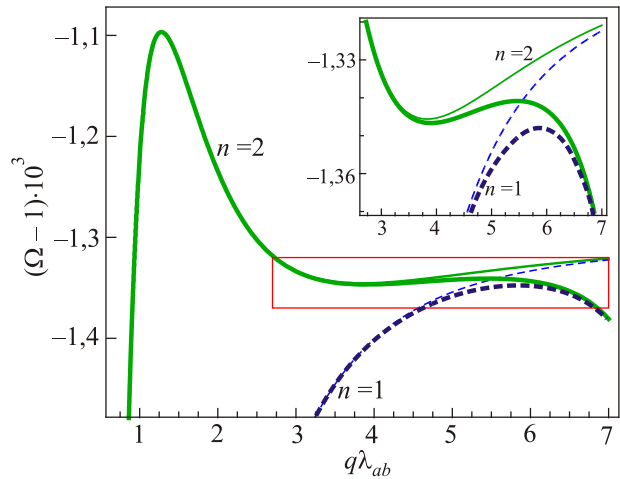


Рис. 7. (Онлайн в цвете) Дисперсионные кривые с номерами  $n=1$  (штриховые линии) и  $n=2$  (сплошные линии) в линейном (тонкие линии) и нелинейном (толстые линии) режимах. Вставка показывает в увеличенном масштабе область основной панели, обведенную прямоугольником. Параметры:  $|\alpha| = 2 \cdot 10^{-5}$ ,  $\epsilon_s/\epsilon_d = 4$ ,  $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$ ,  $L = 24\lambda_c$ .

странении моды происходит изменение параметра  $\alpha$  и, как следствие, дисперсии волны. Это означает, что волновой вектор также меняется при распространении. Предположим, что в определенной точке пластины значение волнового вектора достигло максимума или минимума на дисперсионной кривой. Тогда при дальнейшем распространении волны в тех же условиях ее волновой вектор станет комплексной величиной, а волна — затухающей. Поскольку затухающая волна не может переносить энергию, то в указанной точке пластины происходит явление остановки света.

### 5. Заключение

Теоретически исследованы сильно нелинейные локализованные электромагнитные моды в пластине слоистого сверхпроводника. Рассмотрена геометрия, в которой пластина находится в однородном диэлектрическом окружении, сверхпроводящие слои перпендикулярны поверхности пластины, а моды распространяются поперек слоев. Показано, что наряду с симметричными и антисимметричными по магнитному полю локализованными модами, в пластине слоистого сверхпроводника в нелинейном режиме могут существовать несимметричные моды. В режиме сильной нелинейности получены дисперсионные соотношения и установлено, что в определенном диапазоне параметров дисперсия таких локализованных мод оказывается аномальной. Благодаря тому, что в нелинейном случае дисперсионные соотношения являются неизохорными — содержат амплитуду локализованной моды, то открывается возможность для наблюдения явления остановки света локализованных мод в пластине слоистого сверхпроводника.

**Приложение. Эллиптические функции Якоби**

Кратко выпишем основные сведения о свойствах эллиптических функций, которые используются в настоящей статье, а также покажем, как могут быть получены решения уравнения (14).

*Решение уравнения Дюффинга*

Уравнение (14) представляет собой уравнение ангармонического осциллятора с кубической нелинейностью — осциллятор Дюффинга. Это уравнение широко известно в теории нелинейных колебаний, его анализ и вид решений в виде эллиптических функций содержится во многих учебниках и монографиях по нелинейным колебаниям, (см., например, [25]). Для большей информативности излагаемого материала выпишем решение данного уравнения при  $\sigma = -1$  ( $\Omega < 1$ ). Случай с  $\sigma = 1$  (т.е. при  $\Omega > 1$ ) рассматривается аналогичным образом. Итак, выпишем первый интеграл уравнения (14) в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial a}{\partial \xi} \right)^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4} + \mathcal{E}. \quad (\text{П1})$$

Это уравнение эквивалентно (19), где константа интегрирования  $\mathcal{E}$  связана с  $\alpha$  следующим соотношением:

$$4\mathcal{E} = (2\alpha + 1)^2 - 1. \quad (\text{П2})$$

Интегрируя уравнение (П2), приходим к его решению в неявной форме:

$$\int_{a(0)}^{a(\xi)} \frac{da}{\sqrt{2\mathcal{E} + a^2 - a^4/2}} = \xi. \quad (\text{П3})$$

Подынтегральное выражение под знаком квадратного корня в (П3) можно представить в следующем виде:

$$2\mathcal{E} + a^2 - a^4/2 = 2\mathcal{E}(1 - a^2/a_-^2)(1 - a^2/a_+^2),$$

где

$$a_{\pm}^2 = 1 \pm \sqrt{1 + 4\mathcal{E}}. \quad (\text{П4})$$

Вводя замену переменных интегрирования,

$$\tau = a/a_-, \quad m = a_-^2/a_+^2, \quad (\text{П5})$$

и выбирая для определенности начальное условие в виде  $a(0) = 0$ , представляем уравнение (П3) в следующей форме:

$$F(z = a/a_-; m) = \frac{\sqrt{2\mathcal{E}}}{a_-} \xi, \quad (\text{П6})$$

где функция

$$F(z; m) = \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-m\tau^2)}} \quad (\text{П7})$$

называется неполным эллиптическим интегралом I рода с модулем  $m$  [25–28]. Полным эллиптическим интегралом I рода с модулем  $m$  называется  $F(z = 1; m)$  и обозначается  $K(m)$ ,

$$K(m) = F(z = 1; m) = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-m\tau^2)}}. \quad (\text{П8})$$

Таким образом, решение уравнения (14) с начальным условием  $a(0) = 0$  представлено в неявной форме в виде (П6). В следующем подразделе будет представлена его явная форма, выраженная через эллиптические функции.

*Эллиптические функции am, sn, cn, dn, tn*

Произведем в определении (П6) замену переменных  $z = \sin \varphi$ ,  $\tau = \sin \psi$ . Тогда неполный эллиптический интеграл может быть записан в следующей форме:

$$F(\varphi; m) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \psi}}. \quad (\text{П9})$$

Пусть мы имеем соотношение

$$F(\varphi; m) = u,$$

тогда функция обратная  $F(\varphi; m)$  называется амплитудой Якоби:

$$\varphi = \text{am}(u; m). \quad (\text{П10})$$

Тригонометрические синус, косинус и тангенс (см. например, [27], стр. 75) от амплитуды Якоби называются, соответственно, эллиптическими синусом, косинусом и тангенсом

$$\begin{aligned} \text{sn}(u; m) &= \sin \text{am}(u; m), \\ \text{cn}(u; m) &= \cos \text{am}(u; m), \\ \text{tn}(u; m) &= \text{tg} \text{am}(u; m). \end{aligned} \quad (\text{П11})$$

Также в теории эллиптических функций вводится так называемая функция дельта амплитуды:

$$\text{dn}(u; m) = \sqrt{1 - m \text{sn}^2(u; m)}. \quad (\text{П12})$$

Таким образом, решение  $a(\xi)$ , найденное в неявном виде (П6), можно записать через эллиптический синус Якоби:

$$a(\xi) = a_- \text{sn}(\xi \sqrt{2\mathcal{E}}/a_-; m). \quad (\text{П13})$$

Как уже было сказано, в уравнении (19) была введена постоянная интегрирования  $\alpha$ , которая связана с константой  $\mathcal{E}$  уравнением (П2). Используя обозначения (П4) и (П5), получаем:

$$a_-^2 = -2\alpha, \quad a_+^2 = 2(1 + \alpha), \quad m = -\alpha(1 + \alpha)^{-1}.$$

Подставляя эти обозначения в формулу (П13), получаем выражение (24) из основного текста статьи. Другие решения через эллиптические функции находятся аналогичным образом.

*Обозначения эллиптических функций и их свойства*

В настоящей статье также встречаются другие эллиптические функции, обозначаемые двумя латинскими буквами из набора s, c, d, t и n. Строятся они по следующему принципу:

$$pq(u; m) = \frac{pr(u; m)}{qr(u; m)}, \quad (\text{П14})$$

где все буквы p, q и r являются любыми буквами s, c, d, n и t, а функции вида  $pp(u; m)$  тождественно равны 1,  $pp(u; m) = 1$ .

В частности, в статье мы используем следующие эллиптические функции вида (П14):

$$\begin{aligned} cd(u; m) &= \frac{cn(u; m)}{dn(u; m)}, & td(u; m) &= \frac{tn(u; m)}{dn(u; m)}, \\ dt(u; m) &= \frac{1}{td(u; m)} = \frac{dn(u; m)}{tn(u; m)}. \end{aligned}$$

Укажем результаты вычисления производных от функций  $sn(u; m)$  и  $cd(u; m)$ , которые использованы в статье:

$$\frac{\partial}{\partial u} sn(u; m) = cn(u; m) dn(u; m), \quad (\text{П15})$$

$$\frac{\partial}{\partial u} cd(u; m) = (m-1)sd(u; m)nd(u; m). \quad (\text{П16})$$

По аналогии с гиперболическими функциями удобно ввести гиперболические эллиптические функции Якоби,

$$\begin{aligned} \operatorname{snh}(u; m) &= -i sn(iu; m), & \operatorname{cdh}(u; m) &= cd(iu; m), \\ \operatorname{tdh}(u; m) &= -i td(iu; m), & \operatorname{dth}(u; m) &= i dt(iu; m). \end{aligned}$$

1. R. Kleiner, F. Steinmeyer, G. Kunkel, and P. Muller, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2394 (1992).
2. E.H. Brandt, *Rep. Prog. Phys.* **58**, 1465 (1995).
3. S. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Rep. Prog. Phys.* **73**, 026501 (2010).
4. V.P. Koshelets and S.V. Shitov, *Supercond. Sci. Technol.* **13**, R53 (2000).
5. R. Kleiner, *Science* **318**, 1254 (2007).
6. M. Tonouchi, *Nature Photonics* **1**, 97 (2007).
7. F. Capasso, C. Gmachl, D.L. Sivco, and A.Y. Cho, *Phys. Today* **55**, 34 (2002).
8. D.L. Mills, *Nonlinear Optics: Basic Concepts*, Springer, Berlin (1998).
9. O.H. Olsen and M.R. Samuelsen, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 3510 (1986).

10. R. Rajaraman, *Solitons and Instantons, An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland, Amsterdam (1987).
11. S. Savel'ev, A.L. Rakhmanov, V.A. Yampol'skii, and F. Nori, *Nature* **2**, 521 (2006).
12. V.A. Yampol'skii, S. Savel'ev, T.M. Slipchenko, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Physica C* **468**, 499 (2008).
13. V.A. Yampol'skii, T.M. Slipchenko, Z.A. Maizelis, D.V. Kadygrob, S.S. Apostolov, S.E. Savel'ev, and Franco Nori, *Phys. Rev. B* **78**, 184504 (2008).
14. S.E. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **75**, 184503 (2007).
15. S.S. Apostolov, Z.A. Maizelis, V.A. Yampol'skii, and V.I. Havrilenko, *Fiz. Nizk. Temp.* **43**, 360 (2017) [*Low Temp. Phys.* **43**, 296 (2017)].
16. A.L. Rakhmanov, V.A. Yampol'skii, J.A. Fan, Federico Capasso, and Franco Nori, *Phys. Rev. B* **81**, 075101 (2010).
17. V.A. Golick, D.V. Kadygrob, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, B.A. Ivanov, and Franco Nori, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 187003 (2010).
18. J.B. Pendry, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966 (2000).
19. R.A. Shelby, D.R. Smith, and S. Schultz, *Science* **292**, 77 (2001).
20. В.Г. Веселаго, *УФН* **173**, 790 (2003).
21. Yu.O. Averkov, V.M. Yakovenko, V.A. Yampol'skii, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **87**, 054505 (2013).
22. S.N. Artemenko and S.V. Remizov, *Physica C* **362**, 200 (2001).
23. Ch. Helm and L.N. Bulaevskii, *Phys. Rev. B* **66**, 094514 (2002).
24. В.В. Шмидт, *Введение в физику сверхпроводников*, МЦНМО, Москва (2000).
25. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989).
26. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика., Механика*, Т. 1, Физматлит, Москва (2004).
27. А.М. Журавский, *Справочник по эллиптическим функциям*, АН СССР, Москва–Ленинград (1941).
28. А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин, *Нелинейные колебания. Учебное пособие для вузов*, Физматлит, Москва (2002).

**Nonlinear localized modes in plate of layered superconductor**

S.S. Apostolov, D.V. Kadygrob, Z.A. Maizelis, A.A. Nikolaenko, and V.A. Yampol'skii

The nonlinear localized electromagnetic modes in a plate of layered superconductor are studied theoretically. The plate is assumed to be embedded in a uniform dielectric environment, the superconducting layers are perpendicular to the surface of the plate, and the modes propagate across the layers. Despite the

symmetry of the system, the symmetric and anti-symmetric, as well as nonsymmetric with respect to the magnetic field, localized modes can exist in the plate, that is due to the nonlinearity of the Josephson plasma. It is shown that under certain conditions the dispersion of localized modes can be anomalous, and the group velocity can vanish. By virtue of the nonlinearity, the dispersion relations contain the amplitude of the localized mode, that makes it possible to observe the stop-light phenomenon of localized modes in the plate of the layered superconductor.

PACS: 74.72.-h Cuprate superconductors;  
73.20.Mf Collective excitations (including excitons, polarons, plasmons and other charge-density excitations);  
52.35.Mw Nonlinear phenomena: waves, wave propagation, and other interactions.

Keywords: layered superconductor, localized modes, anomalous dispersion.