УДК 517.98

ОБМЕЖЕНІ ТА L_p-РОЗВ'ЯЗКИ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРА В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Г. Ю. Ющенко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова 2, корп. 4
e-mail: anna.ell99@gmail.com

We obtain a criterion for solutions of a linear integral Volterra equation in a Banach space to be bounded or pth power integrable.

Получен критерий ограниченности или суммируемости со степенью p решений линейного интегрального уравнения Вольтерра в банаховом пространстве.

1. Позначення та формулювання основного результату. Нехай X — комплексний банахів простір, $L(X)$ — простір лінійних неперервних операторів, I, O — одиничний та нульовий оператори. Будемо позначати через $L_p([0;+\infty), X)$ простір усіх сильновимірних функцій $x : [0;+\infty) \to X$, які задовольняють умову $\int_0^\infty \|x(t)\|^p\, dt < \infty$ при $p \in [1;+\infty)$ і $\operatorname{ess\,sup}\{\|x(t)\| : t \in [0;+\infty)\} < \infty$ при $p = \infty$. Норма в цих просторах задається співвідношенням $\|x\| = \left(\int_0^\infty \|x(t)\|^p\, dt\right)^{1/p}$, якщо $p \in [1;+\infty)$, і $\|x\| = \operatorname{ess\,sup}\{\|x(t)\| : t \in [0;+\infty)\}$, якщо $p = \infty$.

Нехай $K \in L_1([0;+\infty), L(X))$.

Теорема 1. *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) для деякого фіксованого $p \in [1;\infty]$ рівняння

$$x(t) + \int\limits_0^t K(t-s)x(s)\, ds = y(t), \quad t \in [0;+\infty), \tag{1}$$

має для довільного $y \in L_p([0;+\infty), X)$ єдиний розв'язок $x \in L_p([0;+\infty), X)$;

2) для довільного $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, оператор $G(z) = I + \int_0^\infty K(t)e^{-zt}\, dt$ неперервно оборотний;

3) твердження пункту 1 виконується для довільного $p \in [1;+\infty]$.

Аналогічну теорему для випадку числових функцій було доведено в [1], більш сучасний її виклад у цьому випадку та деякі узагальнення наведено в [2]. Дискретний аналог рівняння (1) розглянуто в [3].

2. Допоміжні твердження. При доведенні теореми 1 використовуються наведені в цьому пункті допоміжні твердження.

Позначимо через $K * x(t) = \int_0^t K(t)x(s-t)\,ds$ конволюцію функцій $K : [0;+\infty) \to \to L(X)$ і $x : [0;+\infty) \to X$, $\widehat{K}(z) = \int_0^\infty K(t)e^{-zt}\,dt$ — перетворення Лапласа функції K.

Лема 1. *Нехай функція K належить простору $L_1([0;+\infty), L(X))$. Якщо для довільного $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, оператор $G(z) = I - \widehat{K}(z)$ є неперервно оборотним, то існує операторнозначна функція $K_1 \in L_1([0;+\infty), L(X))$ така, що $G^{-1}(z) = I - \widehat{K_1}(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z \geq 0$.*

Дана лема є наслідком теореми 3 [4].

Лема 2. *Нехай $A \in L(X)$ — необоротний оператор і для довільного $\sigma > 0$ існує оборотний оператор $B_\sigma \in L(X)$ такий, що $\|A - B_\sigma\| < \sigma$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $x \in X$ такий, що $\|Ax\| < \varepsilon$, $\|x\| = 1$.*

Доведення. Зафіксуємо $\sigma > 0$. Тоді справджується нерівність $\|B_\sigma^{-1}\| \geq 1/\sigma$, оскільки в іншому випадку $\|AB_\sigma^{-1} - I\| = \|AB_\sigma^{-1} - B_\sigma B_\sigma^{-1}\| = \|(A - B_\sigma)B_\sigma^{-1}\| < 1$ і оператор AB_σ^{-1} повинен бути оборотним, що суперечить необоротності A.

Тому знайдеться такий $y \in X$, що $\|B_\sigma^{-1}y\| > 1/(2\sigma)$ і $\|y\| = 1$. Покладемо $x := B_\sigma^{-1} \times \times y/(\|B_\sigma^{-1}y\|)$. Тоді $\|x\| = 1$ і, скориставшись рівністю $AB_\sigma^{-1} = I + (A - B_\sigma)B_\sigma^{-1}$, отримаємо

$$\|Ax\| = \|AB_\sigma^{-1}y/(\|B_\sigma^{-1}y\|)\| \leq 1/(\|B_\sigma^{-1}y\|) + \|A - B_\sigma\| < 3\sigma.$$

Лему 2 доведено.

Нехай функція K належить простору $L_1([0;+\infty), L(X))$. Покладемо $M := \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq 0 : (I + \widehat{K}(z))$ — необоротний$\}$ і позначимо через ∂M границю множини M.

Наслідок 1. *Нехай z_0 належить ∂M. Тоді існує послідовність $\{x_n\} \subset X$ така, що $\|x_n\| = 1$ для кожного $n \geq 1$ і $(I + \widehat{K}(z_0))x_n \to 0$, $n \to \infty$.*

Введемо позначення $L^1_{\mathrm{loc}}([0;+\infty), X)$ для сильновимірних функцій $x(t) : [0;+\infty) \to X$ таких, що для довільного $T > 0$ виконується $\int_0^T \|x(t)\|dt < \infty$.

Лема 3. *Нехай функція K належить $L^1_{\mathrm{loc}}([0;+\infty), L(X))$. Тоді для кожного*

$$y \in L^1_{\mathrm{loc}}([0;+\infty), X)$$

існує єдиний розв'язок рівняння (1) у просторі $L^1_{\mathrm{loc}}([0;+\infty), X)$.

Цей розв'язок має вигляд

$$x(t) = y(t) + (R * x)(t), \quad t \geq 0,$$

де $R \in L^1_{\mathrm{loc}}([0;+\infty), L(X))$ — розв'язок рівнянь $R + K + R * K = O$ та $R + K + K * R = O$.

Доведення. Зафіксуємо $T > 0$ і розглянемо рівняння (1) на $[0;T]$.

Позначимо через K^{*n} згортку n екземплярів функції K. Як і для числових функцій, можна перевірити, що існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > N$ виконується $\int_0^T \|K^{*n}(t)\|\,dt <$

< 1. Тому розв'язок рівняння (1) єдиний на $[0;T]$, і його можна знайти методом послідовних наближень

$$x_0(t) = y(t), \quad t \geq 0,$$

$$x_m(t) = y(t) - K * x_{m-1}(t), \quad t \geq 0, \quad m \geq 1.$$

При цьому для кожного $m \geq 1$

$$x_m = y - K * y + \ldots + (-1)^m K^{*m} * y,$$

і розв'язок рівняння записуємо у вигляді

$$x = y + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j K^{*j} * y.$$

Тут ряд у правій частині рівняння збігається абсолютно у просторі $L_1([0;T], X)$. Покладемо

$$R = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j K^{*j}.$$

Тоді

$$K * R = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j K^{*(j+1)} = -K - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j K^{*j} = -K - R.$$

Аналогічно перевіряється, що R задовольняє рівняння $R + K + K * R = 0$.

Лему доведено.

3. Доведення теореми 1. 2)⇒3). З леми 1 випливає, що існує $(G(z))^{-1} = I + \widehat{K_1}(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, де $K_1 \in L_1([0;+\infty), L(X))$. Очевидно виконуються рівності $G(z)(G(z))^{-1} = I + \widehat{K}(z) + \widehat{K_1}(z) + \widehat{K}(z)\widehat{K_1}(z) = I + \widehat{K}(z) + \widehat{K_1}(z) + \widehat{K * K_1}(z) = I$.

З останньої рівності та теореми про єдиність перетворення Лапласа випливає, що

$$K_1(t) + K(t) + K * K_1(t) = 0 \tag{2}$$

майже скрізь на $[0;+\infty)$. Так само отримуємо $K_1(t) + K(t) + K_1 * K(t) = 0$ майже скрізь на $[0;+\infty)$.

Рівняння (1) запишемо у вигляді $Wx = y$, де оператор W діє з простору $L_p([0;+\infty), X)$ у $L_p([0;+\infty), X)$ за правилом $Wx(t) = x(t) + K * x(t)$. Покажемо, що оператор W є оборотним і обернений оператор $G = W^{-1}$ визначається формулою $Gx(t) = x(t) + K_1 * x(t)$. Зауважимо, що так визначений оператор G для кожного $p \in [1;+\infty]$ належить простору $L(L_p([0;+\infty), X))$. Використовуючи асоціативість згортки та рівність (2), отримуємо

$$WGx(t) = x(t) + K_1 * x(t) + K * x(t) + K * (K_1 * x(t)) = x(t) + (K_1 + K + K * K_1) * x(t) = x(t).$$

Звідси $WG = I$. Аналогічно можна показати, що

$$GW = I.$$

Отже, оператор W є оборотним і рівняння (1) має єдиний розв'язок $x \in L_p([0;+\infty),X)$ для довільного $y \in L_p([0;+\infty),X)$.

3)⇒1). Очевидно.

1)⇒2). Доводимо від супротивного, тоді множина $M := \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq 0 : (I + \widehat{K}(z))$ — необоротний$\}$ є непорожньою. Нехай z_0 належить ∂M. За наслідком 1 існує послідовність $\{x_n\} \subset X$ така, що $\|x_n\| = 1$ для кожного $n \geq 1$ і $(I + \widehat{K}(z_0)x_n \to 0$, $n \to \infty$.

Покладемо $y_{n,T} = \left(e^{z_0 t}x_n + \int_0^t K(s)e^{z_0(t-s)}x_n\,ds\right)\chi_{[0;T]}$, де $\chi_{[0;T]}$ — характеристична функція множини $[0;T]$. Зрозуміло, що $y_{n,T} \in L_p([0;+\infty),X)$, а відповідний розв'язок $x_{n,T}$ на $[0;T]$ збігається з $e^{z_0 t}x_n$. Оцінимо норми функцій $x_{n,T}$, $y_{n,T}$. Розглянемо два випадки.

1) $a = \operatorname{Re} z_0 > 0$.

Нехай $p \in [1;+\infty)$. Тоді $\|x_{n,T}\|_p^p \geq \int_0^T e^{apt}dt = 1/ap(e^{apT} - 1)$. Виберемо $n_T \in \mathbb{N}$ так, щоб $\|(I + \widehat{K}(z_0))x_{n_T}\| \leq e^{-aT}$. Тоді норму $\|y_{n_T,T}(t)\|$ можна оцінити таким чином:

$$\|y_{n_T,T}(t)\| \leq (\|(I + \widehat{K}(z_0))x_{n_T}\|e^{at} + \int_t^\infty \|K(s)\|ds)I_{[0;T]}(t) \leq c.$$

З отриманих нерівностей випливає, що $\|y_{n_T,T}\|_p \leq cT^{1/p}$ і $\|x_{n_T,T}\|_p \geq 1/ap(e^{apT} - 1)$. Це суперечить оборотності оператора W.

При $p = \infty$ справджуються оцінки $\|x_{n,T}\|_\infty = e^{aT}$ і $\|y_{n,T}\|_\infty \leq c$, що знову суперечить оборотності оператора W.

2) $\operatorname{Re} z_0 = 0$.

Якщо $p \in [1;+\infty)$, то виконуються нерівності

$$\|x_{n,T}\|_p \geq T^{1/p}\|x_n\| = T^{1/p},$$

$$\|y_{n,T}(t)\| \leq \left(\|(I + \widehat{K}(z_0))e^{z_0 t}x_n\| + \int_0^\infty \|K(s)e^{z_0(t-s)}x_n\|\,ds\right)\xi_{[0;T]}(t) \leq$$

$$\leq \left(\|(I + \widehat{K}(z_0))x_n\| + \int_t^\infty \|K(s)\|\,ds\right)\xi_{[0;T]}(t),$$

звідки $\|y_{n,T}\|_p = o(T^{1/p})$, $n \to \infty$, $T \to \infty$, і $\|x_{n,T}\|_p \geq T^{1/p}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$, що суперечить оборотності оператора W.

Нехай $p = \infty$. Покладемо $y_n(t) = e^{z_0 t}x_n + \int_0^t K(s)e^{z_0(t-s)}\,ds$. Нескладно переконатись, що відповідний розв'язок рівняння (1) має вигляд $x_n(t) = e^{z_0 t}x_n$. Згідно з лемою 3 цей розв'язок також можна подати у вигляді $e^{z_0 t}x_n = y_n(t) + \int_0^t R(t-s)y_n(s)ds$, $t \geq 0$.

Покладемо $y_{n,T} = \left(e^{z_0 t}x_n + \int_0^t K(s)e^{z_0(t-s)}\,ds\right) I_{[T;+\infty]}(t)$. Для відповідного йому розв'язку рівняння (1) виконуються рівності

$$x_{n,T}(t) = y_{n,T}(t) + \int\limits_0^t R(t-s)y_{n,T}(s)\,ds = y_n(t) + \int\limits_0^t R(t-s)y_n(s)\,ds-$$

$$-\int\limits_0^T R(t-s)y_n(s)\,ds = e^{z_0 t}x_n - \int\limits_0^T R(t-s)y_n(s)\,ds.$$

Покажемо, що

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0;+\infty)} \left\| e^{z_0 t}x_n - \int\limits_0^T R(t-s)y_n(s)\,ds \right\| > \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Доводимо від супротивного. Нехай оцінка (3) не виконується. Визначимо функцію $y(s) = y_n(s)$, $t \in [0;T]$, далі періодично з періодом T. Нехай $x \in X$, $\|x\| = 1$. З нерівності трикутника випливає, що майже скрізь на $[mT;(m+1)T]$ виконуються нерівності

$$k = \|kx\| \leq \left\| kx - \sum_{n=1}^{k} \int\limits_{(m-1)T}^{mT} R(t-s)y_n(s)\,ds \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{n=1}^{k} \int\limits_{(m-1)T}^{mT} R(t-s)y_n(s)\,ds \right\| \leq \frac{k}{2} + \left\| \sum_{n=1}^{k} \int\limits_{(m-1)T}^{mT} R(t-s)y_n(s)\,ds \right\|.$$

Звідси отримуємо, що $\left\| \sum_{n=1}^{k} \int_{(m-1)T}^{mT} R(t-s)y_n(s)\,ds \right\| \geq \frac{k}{2}$ майже скрізь на $[mT;(m+1)T]$.

Враховуючи періодичність функції $y(t)$, функцію $x(t)$ можна записати у вигляді

$$x(t) = y(t) + \sum_{n=1}^{k} \int\limits_{(m-1)T}^{mT} R(t-s)y_n(s)\,ds + \int\limits_{kT}^{t} R(t-s)y_n(s)\,ds.$$

Тому норму $x(t)$ можна оцінити таким чином:

$$\|x(t)\| \geq \left\| \sum_{n=1}^{k} \int\limits_{(m-1)T}^{mT} R(t-s)y_n(s)\,ds \right\| - \left\| y(t) + \int\limits_{kT}^{t} R(t-s)y_n(s)\,ds \right\| \geq \frac{k}{2} - c.$$

Це суперечить обмеженості розв'язку рівняння (1).

Отже, виконується нерівність (3), і тому $\|x_{n,T}\|_\infty > 1/2$, тоді як $\|y_{n,T}\| \to 0$, $T \to \infty$. Це суперечить оборотності оператора W.

Теорему 1 доведено.

4. Рівняння Вольтерра з нелінійністю. Розглянемо оператор $W : L_p([0;+\infty), X) \to \to L_p([0;+\infty), X)$, що діє за правилом $(Wx)(t) = x(t) + K * x(t)$, $t \geq 0$.

Теорема 2. *Якщо для кожного* $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq 0$, *оператор* $G(z) = I + \widehat{K}(z)\, dt$ *є неперервно оборотним, функція* $f : X \to X$ *задовольняє умову Ліпшиця з константою* M *такою, що* $\|W^{-1}\|M < 1$, *то рівняння*

$$x(t) + K * x(t) = y(t) + f(x(t)), \quad t \geq 0, \tag{4}$$

має для довільного $y \in L_p([0;+\infty), X)$ *єдиний розв'язок у просторі* $L_p([0;+\infty), X)$.

Доведення. Рівняння (7) можна записати у вигляді $(Wx)(t) = y(t) + f(x(t))$, $t \geq 0$. З теореми 1 випливає, що оператор W є оборотним.

З умов на функцію f випливає виконання для довільних $u, v \in L_p([0;+\infty), X)$ нерівності

$$\int_0^\infty \|f(u(t)) - f(v(t))\|^p\, dt \leq \int_0^\infty M^p \|u(t) - v(t)\|\, dt,$$

звідки $\|f(u) - f(v)\|_p \leq M\|u - v\|_p$.

Подіявши на рівняння (4) оператором W^{-1}, дістанемо

$$x(t) = W^{-1}y(t) + W^{-1}f(x(t)), \quad t \geq 0.$$

Відображення $F : L_p([0;+\infty), X) \to L_p([0;+\infty), X)$, яке діє за правилом

$$(Fx)(t) = W^{-1}y(t) + W^{-1}f(x(t)), \quad t \geq 0,$$

є відображенням стиску, оскільки

$$\|F(u) - F(v)\|_p \leq \|W^{(-1)}\|\|f(u) - f(v)\|_p \leq \|W^{(-1)}\|M\|u - v\|_p.$$

Отже, рівняння (4) має єдиний розв'язок у просторі $L_p([0;+\infty), X)$ за принципом стискаючих відображень.

Теорему доведено.

1. *Paley R. C., Wiener N.* Fourier transform in the complex domain. — New York: Amer. Math. Soc., 1934. — 192 p.

2. *Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O.* Volterra integral and functional equations. — Cambridge Univ. Press, 1990. — 725 p.

3. *Вятчанінов О. В., Городній М. Ф.* Властивості розв'язків дискретної системи Вольтерра в банаховому просторі // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 2. — С. 184–187.

4. *Bochner S., Phillips R. S.* Absolutely convergent Furier expansions for non-commutative normed rengs// Ann. Math. — 1942. — **43**, № 3. — P. 409–418.

Одержано 07.10.11,
після доопрацювання — 04.11.11