УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И ПУАНКАРЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

Т. Т. Шерияздан

Актюбин. гос. ун-т им. К. Жубанова
Казахстан, 030000, Актобе
e-mail: talgat_sher@mail.ru

We prove correctness of the Dirichlet and Poincare problems for a multivariate Gellerstedt equation in a domain that departs from the characteristic.

Доведено коректність задач Діріхле і Пуанкаре для багатовимірного рівняння Геллерстедта в області з відходом від характеристики.

При исследовании смешанной задачи M в [1, 2] для уравнения колебания струны изучалась краевая задача с отходом от характеристики, где обращено внимание на изучение таких задач для гиперболических уравнений.

В теории уравнений в частных производных гиперболического типа краевые задачи с данными на всей границе области являются примером некорректно поставленных задач [1, 2]. В данной работе для многомерного уравнения Геллерстедта в области с отходом от характеристики доказана корректность задач Дирихле и Пуанкаре.

Пусть D — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная в полупространстве $t > 0$ конической поверхностью

$$K : t = \left[\frac{2+p}{2}\varphi(r)\right]^{\frac{2}{2+p}}, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad \varphi(r) \in C^2((0,1)) \cap C^1([0,1]), \quad |\varphi'(r)| < 1,$$

и плоскостью $t = 0$, где $r = |x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Тогда $\partial D = \Gamma \cup S$ — граница области D, $S = \{t = 0, 0 \le r \le 1\}$.

В области D рассмотрим многомерное уравнение Геллерстедта

$$t^p \Delta_x u - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где $p = \mathrm{const} > 0$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \ge 2$.

В качестве задач Дирихле и Пуанкаре рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти в области D решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau(x), \quad u|_K = \sigma(x), \tag{2}$$

или

$$u_t|_S = \nu(x), \quad u|_K = \sigma(x). \tag{3}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$, $r \ge 0$, $0 \le \theta_1 < 2\pi$, $0 \le \theta_i \le \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$.

Пусть Ω — проекция области D на плоскость (r,t) с границами $\Gamma : t = 0, 0 \le r \le 1$, $\Gamma_0 : t = \left[\frac{2+p}{2}\,\varphi(r)\right]^{\frac{2}{2+p}}$, $0 \le r \le 1$; $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_{m-1})$, $W_2^l(S)$, $l = 0,1,\dots,$ — пространства Соболева.

Справедлива следующая лемма [3] .

Лемма. *Пусть функция $f(r,\theta)$ принадлежит $W_2^l(S)$. Если $l \ge m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \le l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\bar{\tau}_n^k(r), \bar{\nu}_n^k(r), \bar{\sigma}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) соответственно функций $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$.

Введем множество функций

$$B^l(S) = \Bigg\{ f(r,\theta) : f \in W_2^l(S),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left(\|f_n^k(r)\|^2_{C^2((0,1))} + \|f_n^k(r)\|^2_{C([0,1])}\right)\exp 2(n^2+n(m-2)) < \infty, l > m-1 \Bigg\}.$$

Пусть $\tau(r,\theta) = r^3\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) = r^3\nu^*(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta) = r^2\sigma^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $\nu^*(r,\theta)$, $\sigma^*(r,\theta) \in B^l(S)$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Задача 1 однозначно разрешима.*

Отметим, что при $p = 0$ эта теорема доказана в [4].

Доказательство. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнение (1) имеет вид [5, 6]

$$t^p u_{rr} + \frac{m-1}{r}\,t^p u_r - \frac{t^p}{r^2}\,\delta u - u_{tt} = 0, \tag{5}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1,\dots,\sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Поскольку искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению. Подставляя (6) в (5) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [3], получаем

$$t^p \bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\, t^p \bar{u}_{nr}^k - \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n t^p}{r^2}\, \bar{u}_n^k = 0, \ \ \lambda_n = n(n+m-2), \ \ k = \overline{1,k_n}, \ \ n = 0,1,\ldots. \tag{7}$$

При этом краевые условия (2), (3), с учетом леммы, запишутся соответственно в виде

$$\bar{u}_n^k|_\Gamma = \bar{\tau}_n^k(r), \quad 0 \le r \le 1, \quad \bar{u}_n^k|_{\Gamma_0} = \bar{\sigma}_n^k(r), \quad 0 \le r \le 1, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{8}$$

$$\bar{u}_{nt}^k|_\Gamma = \bar{\nu}_n^k(r), \quad 0 \le r \le 1, \quad \bar{u}_n^k|_{\Gamma_0} = \bar{\sigma}_n^k(r), \quad 0 \le r \le 1, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots. \tag{9}$$

Выполняя в (7) замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r,t)$ и полагая затем $r = r$, $x_0 = \dfrac{2}{2+p} t^{\frac{(2+p)}{2}}$, получаем уравнение

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^k \equiv u_{\alpha,nrr}^k - u_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0} u_{\alpha,nx_0}^k + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4r^2} u_{\alpha,n}^k = 0, \tag{10_α}$$

$0 < \alpha < \dfrac{p}{2+p} < 1$, причем краевые условия (8) и (9) примут соответственно вид

$$\begin{gathered} u_{\alpha,n}^k(r,0) = \tau_n^k(r), \quad 0 \le r \le 1, \quad u_{\alpha,n}^k(r,\varphi(r)) = \sigma_n^k(r), \quad 0 \le r \le 1, \\ k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \lim_{x_0 \to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} u_{\alpha,n}^k = \nu_n^k(r), \quad 0 \le r \le 1, \quad u_{\alpha,n}^k(r,\varphi(r)) = \sigma_n^k(r), \quad 0 \le r \le 1, \\ k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\tau}_n^k(r), \quad \nu_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\nu}_n^k(r), \quad \sigma_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\sigma}_n^k(r).$$

Наряду с уравнением (10_α) рассмотрим уравнение

$$L_0 u_{0,n}^k \equiv u_{0,nrr}^k - u_{0,nx_0x_0}^k + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4r^2} u_{0,n}^k = 0. \tag{10_0}$$

Как доказано в [5, 6] (см. также [7]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (10_α) и (10_0).

Утверждение 1. *Если $u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи Коши для уравнения (10_α), удовлетворяющее условию*

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0) = \tau_n^k(r), \quad \frac{\partial}{\partial x_0} u_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \tag{13}$$

то функция

$$u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) = \gamma_\alpha \int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)\left(1-\xi^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv \frac{\gamma_\alpha}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{14}$$

при $\alpha > 0$ *является решением уравнения (*10_α*) с условием (13).*

Утверждение 2. *Если* $u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ *— решение задачи Коши для уравнения (*12_0*), удовлетворяющее условию*

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0) = \frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\ldots(2q+1-\alpha)}, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} u_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \tag{13$'$}$$

то при $0 < \alpha < 1$ *функция*

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0) = \gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q x_0^{1-\alpha+2q}\int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)\left(1-\xi^2\right)^{q-\frac{\alpha}{2}} d\xi \equiv$$

$$\equiv \gamma_{2-\alpha+2q}2^{q-1}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right) D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{15}$$

является решением уравнения (10_α*) с начальными условиями*

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0, \quad \lim_{x_0\to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} u_{\alpha,n}^{k,2} = \nu_n^k(r), \tag{16}$$

где $\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha = 2\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$, $\Gamma(z)$ *— гамма-функция,* D_{0t}^α *— оператор Римана–Лиувилля [8], а* $q \geq 0$ *— наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству* $2-\alpha+2q \geq \geq m-1$.

Теперь будем решать задачу (10_α), (11). Ее решение ищем в виде $u_{\alpha,n}^k(r,x_0) = u_{\alpha,n}^{k,1} + +u_{\alpha,n}^{k,2}$, где $u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи Коши (10_α), (13), а $u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ — решение краевой задачи для уравнения (10_α) с условиями

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad u_{\alpha,n}^{k,2}\left[r, \frac{2}{2+p}(\varphi(r))^{\frac{2+p}{2}}\right] = \sigma_n^k(r) - u_{\alpha,n}^{k,1}\left[r, \frac{2}{2+p}(\varphi(r))^{\frac{2+p}{2}}\right], \tag{17}$$

$$0 \leq r \leq 1, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots.$$

Учитывая формулы (14), (15), а также обратимость оператора D_{0t}^α [8], задачи (10_α), (13) и (10_α), (17) соответственно сводим к задаче Коши (10_0), (13) [5, 6] и к задаче для (10_0) с условиями

$$\frac{\partial}{\partial x_0} u_{0,n}^{k,2}(r,0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad u_{0,n}^{k,2}(r,\varphi(r)) = \varphi_n^k(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \tag{18}$$

где $\varphi_n^k(r)$ — функция, выражающаяся через $\tau_n^k(r)$, $\sigma_n^k(r)$, имеющей единственное решение [4].

Далее, используя утверждения 1 и 2, устанавливаем, что задача (10_α), (11) имеет единственное решение.

Таким образом, задача (1), (2) имеет решение вида

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{1-m}{2}} u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{19}$$

где $u_n^k(r,t)$ определяются из двумерных задач.

Теперь рассмотрим задачу (1), (2), и ее решение также будем искать в виде (6). Тогда она сведется к задаче (10_α), (12).

Решение задачи (10_α), (12) ищем в виде $u_{\alpha,n}^k(r,x_0) = u_{\alpha,n}^{k,1} + u_{\alpha,n}^{k,2}$, где $u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ — решение задачи Коши (10_α), (16), а $u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение краевой задачи для уравнения с условиями

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_0} u_{\alpha,n}^{k,1}(r,0) = 0, \quad 0 \le r \le 1, \quad u_{\alpha,n}^{k,1}(r,\varphi(r)) = \sigma_n^k(r) - u_{\alpha,n}^{k,2}(r,\varphi(r)), \\ 0 \le r \le 1, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots .\end{gathered} \tag{20}$$

Учитывая формулы (15), (14), задачи (10_α), (16) и (10_α), (20) сводим соответственно к задаче Коши (10_0), $(13')$ и к задаче (10_0) с условиями (18).

Таким образом, задача (1), (3) также имеет решение вида (19), где $u_n^k(r,t)$ находятся из двумерных задач.

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r,t)$, $\nu(r,t)$, $\sigma(r,t)$, аналогично [5, 6] можно показать, что полученное решение $u(r,\theta,t)$ (19) принадлежит искомому классу.

Теорема доказана.

1. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — 164 с.
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981 — 448 с.
3. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962. — 254 с.
4. *Шериязддан Т. Т.* Корректность задач Дирихле и Пуанкаре для многомерного волнового уравнения // Вестн. КазНТУ. — 2009. — № 1.
5. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. — Алматы: Гылым, 1994. — 170 с.
6. *Алдашев С. А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. — Орал: ЗКАТУ, 2007. — 139 с.
7. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1973. — 143 с.
8. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1985. — 301 с.

Получено 27.08.09