УДК 517.98

ПРО ІНТЕГРОВНІ З p-М СТЕПЕНЕМ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ З НЕПЕРЕРВНИМ АРГУМЕНТОМ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

М. Ф. Городній, А. В. Сиротенко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

We study the problem for solutions of a difference equation with continuous argument to be bounded or pth power summable in the case where the "input" function belongs to a special class.

Досліджується питання про обмеженість або інтегровність з p-м степенем розв'язків різницевих рівнянь з неперервним аргументом для спеціальних класів „вхідних" функцій.

1. Вступ. Нехай B — комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; $C([0,\infty),B)$ — множина неперервних (за нормою на $[0,\infty)$) B-значних функцій, заданих на $[0,\infty)$; A — лінійний неперервний оператор, що діє з B в B. Позначимо через $C^*([0,\infty),B)$ множину всіх функцій $f:[0,\infty)\to B$ таких, що f неперервна на $[0,1)$ та $[1,\infty)$, а також $\lim_{t\to 1-} f(t) = f(1) + Af(0)$. Покладемо при $p\in[1,\infty)$

$$L_p^0(B) := \left\{ f \in C([0,\infty),B) \mid \|f\|_p := \left(\int\limits_0^\infty \|f(t)\|^p\,dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

$$L_p^*(B) := \{ f \in C^*([0,\infty),B) \mid \|f\|_p < \infty \},$$

$$W_p := \left\{ x \in B \mid \|x\|_{W_p} := \left(\sum_{n=0}^\infty \|A^n x\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

а також

$$L_\infty^0(B) := \{ f \in C([0,\infty),B) \mid \|f\|_\infty := \sup_{t\ge 0}\|f(t)\| < \infty \},$$

$$L_\infty^*(B) := \{ f \in C^*([0,\infty),B) \mid \|f\|_\infty < \infty \},\ W_\infty := \{ x\in B \mid \|x\|_{W_\infty} := \sup_{n\ge 0}\|A^n x\| < \infty \}.$$

У подальшому зафіксуємо $p\in[1,\infty]$ і вважатимемо, що $W_p \ne \{\bar{0}\}$.

Розглянемо різницеве рівняння з неперервним аргументом

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + f(t+1), \quad t \ge 0, \\ x(t) &= f(t), \quad t\in[0,1), \end{aligned} \tag{1}$$

в якому $f\in L_p^*(B)$ — задана функція.

Зауважимо, що визначена за допомогою (1) функція x є неперервною на $[0, \infty)$.

У даній статті досліджуються умови на оператор A, при виконанні яких справджується така умова.

Умова інтегровності. Для довільної функції $f : [0, \infty) \to W_p$ такої, що $f \in L_p^*(B)$, відповідна до неї функція x, задана формулою (1), належить простору $L_p^0(B)$.

Аналогічний результат для аналога рівняння (1) з дискретним аргументом отримано в роботах [1, 2]. Про властивості розв'язків лінійних неоднорідних різницевих рівнянь з неперервним аргументом у скінченновимірному просторі див. [3, 4] та наведені там посилання.

2. Різницеве рівняння з одним операторним коефіцієнтом. У подальшому будемо використовувати такі твердження.

Лема 1. *Якщо для спектрального радіуса r_A оператора A виконується нерівність*

$$r_A < 1, \tag{2}$$

то для довільної функції $f \in L_p^*(B)$ відповідна до неї функція x, що визначається за допомогою (1), належить простору $L_p^0(B)$.

Доведення. Довизначимо функцію f на від'ємній півосі, поклавши $f(t) \equiv \bar{0}$ при $t < 0$. Тоді неважко переконатися, що відповідна до f функція x в явному вигляді задається формулою

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n f(t-n), \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Зауважимо, що при фіксованому $t \geq 0$ у формулі (3) міститься скінченна кількість ненульових доданків. Покажемо, що x належить $L_p^0(B)$.

Якщо $p \in [1, \infty)$, то $\|x\|_p^p = \int_0^\infty \| \sum_{n=0}^\infty A^n f(t-n)\|^p dt \leq \sum_{n=0}^\infty \|A^n\|^p \, \|f\|_p^p < \infty$, оскільки ряд $\sum_{n=0}^\infty \|A^n\|^p$ є збіжним згідно з нерівністю (2).

При $p = \infty$ $\sup_{t \geq 0} \| \sum_{n=0}^\infty A^n f(t-n)\| \leq \sum_{n=0}^\infty \|A^n\| \sup_{t \geq 0} \|f(t-n)\| < \infty$.

Лему 1 доведено.

Лема 2. $\left(W_p, \|\cdot\|_{W_p}\right)$ — *банахів простір.*

Лема 3. *Простір $(W_p, \|\cdot\|)$ є повним тоді і лише тоді, коли $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_{W_p}$.*

Доведення лем 2 і 3 наведено в роботах [1] (випадок $p = \infty$) і [2] (випадок $p \in [1, \infty)$).

Справджується наступна теорема.

Теорема 1. *Для рівняння (1) умова інтегровності виконується тоді і лише тоді, коли:*

1) простір $(W_p, \|\cdot\|)$ є повним;

2) для звуження $\tilde{A}$ оператора A на W_p виконується нерівність (2).

Доведення. *Достатність* випливає з того, що до оператора $\tilde{A}$ у просторі $(W_p, \|\cdot\|)$ можна застосувати лему 1.

Зазначимо, що для кожного фіксованого $s \in [0.\infty)$ визначений за допомогою (3) елемент $x(s)$ належить простору W_p. Дійсно, оскільки $f(t) \in W_p$ для кожного $t \in [0, \infty)$ і простір W_p є інваріантним для оператора A, то внаслідок (3) $x(s) = \sum_{k=0}^{[s]} \tilde{A}^k f(s-k)$, де $[s]$ — ціла частина числа s, належить W_p як скінченна сума елементів простору W_p.

Необхідність будемо доводити окремо для двох випадків: $p = \infty$ та $p \in [1, \infty)$.

Нехай $p = \infty$. Покажемо, що для довільної обмеженої за нормою $\| \cdot \|$ послідовності $\{y_n : n \geq 0\}$ із W_∞ відповідна до неї послідовність $\{x_n : n \geq 0\}$, задана різницевим рівнянням

$$
\begin{aligned}
&x_{n+1} = \tilde{A} x_n + y_{n+1}, \quad n \geq 0, \\
&x_0 = y_0,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

теж є обмеженою за нормою $\| \cdot \|$.

Для заданої послідовності $\{y_n : n \geq 0\}$ покладемо для кожного $t \in [0, \infty)$

$$
\begin{aligned}
f(t) &:= \{t\} y_{[t]+1} + (1 - \{t\}) y_{[t]}, \quad t \geq 1, \\
f(t) &:= (1-t) y_0 + t(y_1 + \tilde{A} y_0), \quad t \in [0, 1).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Тут $\{t\} := t - [t]$. Побудована таким чином функція f належить $C^*([0, \infty), B)$, а також, оскільки послідовність $\{y_n : n \geq 0\}$ обмежена за нормою $\| \cdot \|$, і $L^*_\infty(B)$. Крім того, для кожного фіксованого $s \in [0, \infty)$ елемент $f(s)$ належить простору W_∞, оскільки $\{y_n : n \geq \geq 0\} \subset W_\infty$. Тому з умови інтегровності випливає, що для такої функції f відповідна до неї функція x, яка визначається за допомогою рівняння (1), належить простору $L^0_\infty(B)$. Ця функція має вигляд (3). Легко переконатися, що $\{x(n) : n \geq 0\}$ збігається з розв'язком рівняння (4), а отже, цей розв'язок обмежений за нормою $\| \cdot \|$.

Застосувавши до різницевого рівняння (4) теорему 1 із [1], робимо висновок, що простір $(W_\infty, \| \cdot \|)$ є повним і для $r_{\tilde{A}}$ виконується нерівність (2).

Якщо $p \in [1, \infty)$, то позначимо $\widetilde{l_p}(B) = \{x = \{x_n : n \geq 0\} \subset B \mid |x|_p := (\sum_{n=0}^\infty \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}} < < \infty\}$ і покажемо, що для довільної послідовності $\{y_n : n \geq 0\} \in \widetilde{l_p}(B)$ такої, що $y_n \in W_p$ для кожного $n \geq 0$, відповідна до неї послідовність $\{x_n : n \geq 0\}$, задана різницевим рівнянням (4), належить $\widetilde{l_p}(B)$. Для заданої послідовності $\{y_n : n \geq 0\} \in \widetilde{l_p}(B)$ функцію $f(t)$ визначимо за допомогою формули (5). Тоді f належить $C^*([0, \infty), B)$, а також, оскільки $\{y_n : n \geq 0\} \in \widetilde{l_p}(B)$, і $L^*_p(B)$. Крім того, для кожного фіксованого $s \in [0, \infty)$ елемент $f(s)$ належить простору W_p, оскільки $\{y_n : n \geq 0\} \subset W_p$. Тому з умови інтегровності випливає, що для такої функції f відповідна до неї функція x, яка визначається за допомогою рівняння (1), належить простору $L^0_p(B)$. Ця функція має вигляд (3). Легко переконатися, що $\{x(n) : n \geq 0\}$ збігається з розв'язком різницевого рівняння (4).

Покажемо, що $\{x(n) : n \geq 0\} \in \widetilde{l_p}(B)$. Позначивши $n = [t]$, $s = \{t\}$ і використавши рівності (3), (5), одержимо

$$
x(t) = \sum_{k=0}^{[t]} A^k f(t-k) = f(n+s) + A f(n+s-1) + \ldots + A^n f(s) = (1-s) y_n + s y_{n+1} +
$$

$$
+ A((1-s) y_{n-1} + s y_n) + \ldots + A^{n-1}((1-s) y_1 + s y_2) + A^n((1-s) y_0 +
$$

$$+s(y_1 + Ay_0)) = (1-s)x(n) + sx(n+1).$$

Зауважимо, що згідно з умовою інтегровності $\int_0^\infty \|x(t)\|^p\,dt = \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 \|(1-s)x(n) + sx(n+1)\|^p ds < \infty$. З іншого боку, внаслідок властивостей спряженого простору до банахового простору і нерівності Гельдера

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \|(1-s)x(n) + sx(n+1)\|^p\,ds = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \left(\sup_{\varphi\in B^*\,|\varphi\|=1} |\varphi((1-s)x(n)+sx(n+1))|\right)^p ds \geq$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty}\sup_{\substack{\varphi\in B^*\\ \|\varphi\|=1}}\int_0^1 |\varphi((1-s)x(n)+sx(n+1))|^p\,ds \geq$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty}\sup_{\substack{\varphi\in B^*\\ \|\varphi\|=1}}\left(\left|\int_0^1 \varphi((1-s)x(n)+sx(n+1))\,ds\right|\right)^p =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left|\sup_{\substack{\varphi\in B^*\\ \|\varphi\|=1}}\int_0^1 \varphi((1-s)x(n)+sx(n+1))ds\right|^p = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|x(n)+x(n+1)\|}{2}\right)^p.$$

Покладемо $g(t) = \dfrac{1}{2}\,(x(n)+x(n+1))$, $t\in[n,n+1)$, $n\geq 0$. Ми довели, що $g\in L_p^0(B)$. Крім того, $x\in L_p^0(B)$, звідки

$$\int_0^\infty \|x(t)-g(t)\|^p\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \left\|\left(\frac{1}{2}-s\right)x(n) - \left(\frac{1}{2}-s\right)x(n+1)\right\|^p ds =$$

$$= \int_0^1 \left|\frac{1}{2}-s\right|^p ds \sum_{n=0}^{\infty}\|x(n)-x(n+1)\|^p < \infty.$$

Таким чином, послідовності $\{x(n)+x(n+1) : n\geq 0\}$ і $\{x(n)-x(n+1) : n\geq 0\}$, а отже і їхня сума, належать $\widetilde{l_p}(B)$. Тому на підставі теореми 1 із [2] простір $(W_p, \|\cdot\|)$ є повним і для $r_{\tilde{A}}$ виконується нерівність (2).

Теорему 1 доведено.

3. Узагальнення на випадок рівняння з кількома операторними коефіцієнтами. Зафіксуємо $m\geq 2$, $m\in\mathbb{N}$. Нехай $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ — лінійні обмежені оператори, що діють із B в B. Позначимо тепер через $C^*([0,\infty), B)$ множину всіх функцій $f:[0,\infty)\to B$ таких, що f неперервна на $[0,m)$ та $[m,\infty)$, а також $\lim_{t\to m} f(t) = f(m) + A_1 f(m-1) + A_2 f(m-2) + \ldots + A_m f(0)$. Простори $L_p^0(B)$ і $L_p^*(B)$ визначаються, як і в п. 1. Покладемо для $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_m)^t \in B^m$ $|\bar{x}| := \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_m\|\}$. Зазначимо, що $(B^m, |\cdot\|)$ —

банахів простір із покоординатним додаванням елементів і множенням на скаляр. Розглянемо лінійний обмежений оператор $T : B^m \to B^m$, який діє за правилом

$$T\bar{x} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & \dots & A_m \\ I & O & O & \dots & \dots & \dots \\ O & I & O & \dots & \dots & \dots \\ O & O & I & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

де $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)^t \in B^m$, I та O — відповідно одиничний і нульовий оператор в B.

Зафіксуємо $p \in [1, \infty]$ і розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{aligned} &x(t+m) = A_1 x(t+m-1) + A_2 x(t+m-2) + \ldots + A_m x(t) + f(t+m), \quad t \geq 0, \\ &x(t) = f(t), \quad t \in [0, m), \end{aligned} \tag{6}$$

в якому $f \in L_p^*(B)$. Далі будемо використовувати таку умову.

Умова інтегровності для рівняння (6). Для довільної функції $f \in L_p^*(B)$ визначена за допомогою (6) функція x належить $L_p^0(B)$.

Справджується наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо для спектрального радіуса r_T оператора T виконується нерівність*

$$r_T < 1, \tag{7}$$

то виконується умова інтегровності для рівняння (6).

Доведення. Зафіксуємо функцію $f \in L_p^*(B)$. Доозначимо її на від'ємній півосі, поклавши $f(t) \equiv \bar{0}$ при $t < 0$. Зауважимо, що при кожному $t \geq 0$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n f(t-n)$, де

$$\begin{aligned} &C_0 = I, \\ &C_n = \sum_{i=1}^{n} A_i C_{n-i}, \quad 1 \leq n < m, \\ &C_n = \sum_{i=1}^{m} A_i C_{n-i}, \quad n \geq m, \end{aligned}$$

є збіжним, оскільки має скінченну кількість ненульових доданків.

Неважко переконатися, що розв'язок рівняння (6) записується у вигляді

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n f(t-n), \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Доведемо, що x належить $L_p^0(B)$. Якщо $p \in [1, \infty)$, то

$$\|x\|_p^p = \int\limits_0^\infty \|x(t)\|^p \, dt \leq \sum_{n=0}^\infty \|C_n\|^p \int\limits_0^\infty \|f(t-n)\|^p \, dt < \infty,$$

оскільки f належить $L_p^*(B)$, а ряд $\sum_{n=0}^\infty \|C_n\|^p$ є збіжним внаслідок того, що коефіцієнт C_n — це оператор, що діє на елемент $u \in B$ при зображенні першої координати вектора $T^n \bar{u}$, $\bar{u} = (u, \bar{0}, \ldots, \bar{0})$, а також справджується нерівність (7).

При $p = \infty$

$$\sup_{t \geq 0} \left\| \sum_{n=0}^\infty C_n f(t-n) \right\| \leq \sup_{t \geq 0} \left(\sum_{n=0}^\infty \|C_n\| \, \|f(t-n)\| \right) \leq \sum_{n=0}^\infty \|C_n\| \sup_{t \geq 0} \|f(t-n)\| < \infty.$$

Теорему 2 доведено.

Нехай $p = \infty$. Розглянемо множину $W_\infty(T) := \{u \in B^m \mid \sup_{n \geq 0} |T^n u| < \infty\}$.

Для фіксованої функції $f \in L_p^*(B)$ покладемо

$$\bar{f}^*(0) := \sum_{k=0}^{m-1} T^k \begin{pmatrix} f(m-1-k) - \sum\limits_{j=1}^{m-1-k} A_j f(m-1-k-j) \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}^*(n) := \sum_{k=0}^{m-1} T^{m-1-k} \begin{pmatrix} f(mn+k) \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Припущення 1. *Для довільної функції $f \in L_\infty^*(B)$ такої, що $\bar{f}^*(n) \in W_\infty(T)$ для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, визначена за допомогою (6) функція x належить $L_\infty^0(B)$.*

Покажемо, що при виконанні припущення 1 для довільної обмеженої за нормою $\|\cdot\|$ послідовності $\{y_n : n \geq 0\}$ із B такої, що $\bar{y}_n^* \in W_\infty(T)$ для кожного $n \geq 0$, відповідна до неї послідовність $\{x_n : n \geq 0\}$, задана різницевим рівнянням

$$\begin{aligned} &x_0 = y_0, x_1 = y_1, \ldots, x_{m-1} = y_{m-1}, \\ &x_n = A_1 x_{n-1} + A_2 x_{n-2} + \ldots + A_m x_{n-m} + y_n, \quad n \geq m, \end{aligned} \tag{9}$$

теж є обмеженою за нормою $\|\cdot\|$.

Для заданої послідовності $\{y_n : n \geq 0\}$ покладемо для кожного $t \in [0, \infty)$

$$f(t) := \{t\} y_{[t]+1} + (1 - \{t\}) y_{[t]}, \quad t \in [0, m-1) \cup [m, \infty),$$

$$f(t) := (1 - \{t\}) y_{m-1} + \{t\}(y_m + A_1 y_{m-1} + A_2 y_{m-2} + \ldots + A_m y_0), \quad t \in [m-1, m).$$

Побудована таким чином функція f належить $C^*([0,\infty),B)$, а також, оскільки послідовність $\{y_n : n \geq 0\}$ обмежена за нормою $\|\cdot\|$, і $L^*_\infty(B)$. Крім того, для кожного фіксованого $n \geq 0$ елемент $f(n)$ належить простору $W_\infty(T)$, оскільки $\{\bar{y}^*_n : n \geq 0\} \subset W_\infty(T)$. Тому з припущення 1 випливає, що для такої функції f відповідна до неї функція x, яка визначається за допомогою рівняння (6), належить простору $L^0_\infty(B)$. Ця функція має вигляд (8). Легко переконатися, що $\{x(n) : n \geq 0\}$ збігається з розв'язком різницевого рівняння (9), а отже, цей розв'язок обмежений за нормою $\|\cdot\|$. Використавши також аналог теореми 2 із [2] для випадку $p = \infty$, робимо висновок, що справджується таке твердження.

Теорема 3. *Нехай виконується припущення 1. Тоді:*
1) множина $W_\infty(T)$ замкнена в $(B^m, |\cdot|)$;
2) для звуження $\tilde{T}$ оператора T на $W_\infty(T)$ виконується нерівність $r(\tilde{T}) < 1$.

1. *Городній М. Ф., Вятчанінов О. В.* Про обмеженість однієї рекурентної послідовності в банаховому просторі // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 6. — С. 1293 – 1296.
2. *Вятчанінов О. В.* Сумовні зі степенем p рекурентні послідовності у банаховому просторі // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. — 2010. — № 2. — С. 40 – 44.
3. *Миролюбов А. А., Солдатов М. А.* Линейные неоднородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1986. — 128 с.
4. *Пелюх Г. П., Богай Н. А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 351 – 359.

Одержано 09.02.12