УДК 517.9

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ АВТОНОМНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ НЬЮТОНА*

С. М. Чуйко, О. Е. Пирус

Славян. гос. пед. ун-т
Украина, 84112, Славянск Донецкой обл., ул. Батюка, 19

We find necessary and sufficient conditions for existence of solutions to a nonlinear autonomous Noether boundary-value problem for a system of ordinary second order differential equations in a particular critical case. A particular feature of the considered problem is that it is impossible to directly apply a traditional scheme, due to I. G. Malkin, A. M. Samoilenko, E. O. Grebenikov, Yu. A. Ryabov, and O. A. Boichuk, for studying the problem and finding its solutions. To construct solutions of a nonlinear Noether boundary-value problem in a particular critical case, we propose a scheme that combines Newton's method and the least square technique. An effectiveness of the proposed method is demonstrated with an example of the periodic problem for a Hill type equation.

Встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків нелінійної автономної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку в частинному критичному випадку. Характерною особливістю поставленої задачі є неможливість безпосереднього застосування традиційної схеми дослідження та побудови розв'язків критичних крайових задач, що створена у роботах І. Г. Малкіна, А. М. Самойленка, Є. О. Гребенікова, Ю. А. Рябова і О. А. Бойчука. Для побудови розв'язків нелінійної нетерової крайової задачі в частинному критичному випадку запропоновано комбіновану ітераційну схему, побудовану з використанням методів Ньютона і техніки найменших квадратів. Ефективність запропонованої техніки продемонстровано на прикладі періодичної задачі для рівняння типу Хілла.

1. Постановка задачи. Исследуется задача о построении решений [1 – 3]

$$z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon) \in C^2[a, b(\varepsilon)], \quad z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad b(\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad b^* := b(0),$$

автономной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$z'' = Az + Bz' + f + \varepsilon Z(z, z', \varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon), \varepsilon). \tag{1}$$

Решения нетеровой $(m \neq n)$ задачи (1) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$z_0'' = Az_0 + Bz_0' + f, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Здесь $Z(z, z', \varepsilon)$ — нелинейная функция, непрерывно дифференцируемая по z и z' в окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелинейный векторный

* Выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Германии (DFG; № GZ:436UKR 13/103/0-1) и Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (№ 0109U000381).

функционалы $\ell z(\cdot,\varepsilon),\ J(z(\cdot,\varepsilon),z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\ :\ C[a,b(\varepsilon)]\ \to\ \mathbb{R}^m$, причем второй функционал непрерывно дифференцируем по z, z' и по малому параметру ε в окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Порождающая задача (2) является частным случаем неавтономной нетеровой краевой задачи, исследованной в статье [4]. В критическом случае $(P_{Q^*}\neq 0)$ при условии

$$P_{Q^*}\left\{\alpha-\ell K[f](\cdot)\right\}=0$$

порождающая задача (2) имеет семейство решений [4]

$$z_0(t,c_r)=X_r(t)c_r+G[f;\alpha](t),\quad X_r(t)=X(t)P_{Q_r},\quad c_r\in\mathbb{R}^r.$$

Здесь $Q=\ell X(\cdot)$ — $(m\times n)$-матрица, $\operatorname{rank}Q=n_1$, $n-n_1=r$, P_{Q^*} — $(m\times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*}:\mathbb{R}^m\to N(Q^*)$, $X(t)$ — фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2); P_{Q_r} — $(n\times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n\times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q:\mathbb{R}^n\to N(Q)$;

$$G[f;\alpha](t)=X(t)Q^+\left\{\alpha-\ell K[f](\cdot)\right\}+K[f](t)$$

— обобщенный оператор Грина задачи (2), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру–Пенроузу [1], $K[f](t)$ — оператор Грина задачи Коши [4] для дифференциальной системы (2). Для упрощения выкладок предположим, что дифференциальная система (1) не содержит диссипативного члена Bz', либо его величина мала и слагаемое Bz' может быть отнесено к нелинейности. В этом случае дифференциальная система (2) не содержит диссипативного члена Bz_0', а оператор Грина задачи Коши принимает вид

$$K[f](t)=X(t)\int\limits_a^t Y(s)f\,ds,\quad Y(t):=V^{-1}(t)\begin{pmatrix}O\\ I_n\end{pmatrix}.$$

Здесь $V(t)$ — нормальная фундаментальная матрица системы

$$V'(t)=\begin{pmatrix}O & I_n\\ A & 0\end{pmatrix}V(t),\quad V(a)=I_{2n}.$$

В качестве фундаментальной матрицы $X(t)$ однородной части дифференциальной системы (2) используем блок матрицы $V(t)$:

$$V(t)=\begin{pmatrix}X(t)\\ X'(t)\end{pmatrix}.$$

В критическом случае задача (1) существенно отличается от аналогичных неавтономных краевых задач; в отличие от последних правый конец $b(\varepsilon)$ промежутка $[a,b(\varepsilon)]$, на котором ищем решение задачи (1), неизвестен и подлежит определению в процессе построения решения. Выполняяя в задаче (1) замену переменной [2, 3]

$$t=a+(\tau-a)(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)),\quad b(\varepsilon)=b^*+\varepsilon(b^*-a)\beta(\varepsilon),\quad \beta(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon_0],\quad \beta(0)=\beta^*,$$

приходим к задаче об отыскании решения $z(\tau,\varepsilon) \in C^2[a,b^*], C[0,\varepsilon_0]$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$z'' = Az + f + \varepsilon\left[Z(z,z',\varepsilon) + \beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon))(Az + f + \varepsilon Z(z,z',\varepsilon))\right], \tag{3}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\left[\tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon))(\alpha + \varepsilon\tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))\right]. \tag{4}$$

Здесь $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный и $\tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелинейный векторные функционалы $\ell z(\cdot,\varepsilon)$, $\tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b^*] \to \mathbb{R}^m$. Решение задачи (3), (4) ищем в виде $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_r) + x(\tau,\varepsilon)$. Оставляя только линейно независимые строки условия разрешимости задачи (3), (4), получаем эквивалентное условие разрешимости

$$\begin{aligned} &P_{Q_\rho^*}\big\{\tilde{J}(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \\ &\quad + \beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon))(\alpha + \varepsilon\tilde{J}(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)) - \\ &\quad - \ell K\left\{Z(z_0+x, z_0'+x',\varepsilon) + \beta(2+\varepsilon\beta)(Az + f + \varepsilon Z(z_0+x, z_0'+x',\varepsilon))\right\}(\cdot)\big\} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $P_{Q_\rho^*}$ — $(\rho \times m)$-мерная матрица, составленная из ρ линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}. Обозначая

$$\varphi_0(c^*) = 2\alpha\beta^* + J(z_0(\cdot,c_r^*), z_0'(\cdot,c_r^*),0),$$

$$f_0(s,c^*) = 2\beta^*[Az_0(s,c_r^*) + f] + Z(z_0(s,c_r^*), z_0'(s,c_r^*),0),$$

аналогично [2, 3] приходим к необходимому условию разрешимости задачи (1).

Лемма. *Если краевая задача (1) в критическом случае* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *имеет решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0) = z_0(t,c_r^*)$, *то вектор* $c^* := (c_r^*,\beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ *удовлетворяет уравнению [2]*

$$F(c_r^*,\beta^*) := P_{Q_\rho^*}\{\varphi_0(c^*) - \ell K[f_0(s,c^*)](\cdot)\} = 0. \tag{5}$$

В случае $\rho < r$ традиционная схема анализа автономных краевых задач [2] неприменима, так как для краевой задачи (1) не может иметь место ни один из критических случаев — первого, второго или более высокого порядка. С другой стороны, задача (1) не представляет также особый критический случай [6], поскольку уравнение $F(c_r^*,\beta^*) = 0$ не обращается в тождество.

2. Достаточное условие существования решения. Для нахождения решения задачи (3), (4) разлагаем функцию $Z(z,z',\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(\tau,c_r^*)$ и точки $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} &Z(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon), z_0'(\tau,c_r^*) + x'(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Z(z_0(\tau,c_r^*), z_0'(\tau,c_r^*),0) + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + \\ &\quad + A_2(\tau)x'(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_r^*)) + R_1(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon), z_0'(\tau,c_r^*) + x'(\tau,\varepsilon),\varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь

$$A_1(\tau) = Z'_z(z_0(\tau, c_r^*), z'_0(\tau, c_r^*), 0), \quad A_2(\tau) = Z'_{z'}(z_0(\tau, c_r^*), z'_0(\tau, c_r^*), 0),$$
$$A_3(\tau) = Z'_\varepsilon(z_0(\tau, c_r^*), z'_0(\tau, c_r^*), 0).$$

Аналогично [5] выделяем линейные части функционала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + {}$ $+x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$

$$\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) = \tilde{J}'_z(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad \ell_2 x'(\cdot, \varepsilon) = \tilde{J}'_{z'}(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon),$$
$$\varepsilon\, \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) = \varepsilon\, \tilde{J}'_\varepsilon(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$$

и член $J(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), 0) = J(z(\cdot, 0), z'(\cdot, 0), 0)$ нулевого порядка по ε в окрестности точек $x = 0, x' = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$\tilde{J}(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), 0) +$$
$$+ \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 x'(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Обозначим $(\rho \times m)$-матрицу

$$B_\beta := 2P_{Q_\rho^*} \{\alpha - \ell K[Az_0(\tau, c_r^*) + f](\cdot)\}.$$

Для нахождения функции $\beta(\varepsilon)$ приходим к уравнению

$$B_\beta\, \beta(\varepsilon) = -P_{Q_\rho^*} \left\{\varepsilon\alpha\beta^2(\varepsilon) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon)))[J(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), 0) + \right.$$
$$+ \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 x'(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)] -$$
$$- \ell K \left\{2\beta A x(\tau, \varepsilon) + \varepsilon\beta^2[Az(\tau, \varepsilon) + f] + (1 + \varepsilon\beta(2 + \varepsilon\beta))[Z(z_0(\tau, c_r^*), z'_0(\tau, c_r^*), 0) + \right.$$
$$\left.\left. + A_1(\tau)x(\tau, \varepsilon) + A_2(\tau)x'(\tau, \varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(\tau, c_r^*)) + R_1(z(\tau, \varepsilon), z'(\tau, \varepsilon), \varepsilon)]\right\}(\cdot)\right\}.$$

Пусть $P_{B_\beta^*}$ — матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^\rho \to N(B_\beta^*)$. При условии $P_{B_\beta^*} P_{Q_\rho^*} = 0$ по меньшей мере одно из решений задачи (3), (4) определяет операторная система

$$z(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau)c_r^* + \varepsilon G\left\{\beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon))(Az + f) + \right.$$
$$+ \varepsilon(1 + \beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon)))[Z(z_0(\tau, c_r^*), z'_0(\tau, c_r^*), 0) + A_1(\tau)x(\tau, \varepsilon) +$$
$$+ A_2(\tau)x'(\tau, \varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(\tau, c_r^*)) + R_1(z(\tau, \varepsilon), z'(\tau, \varepsilon), \varepsilon)];$$

$$\alpha\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)) + (1+\varepsilon\beta(2+\varepsilon\beta)[J(z_0(\cdot,c_r^*),z_0'(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) +$$
$$+ \ell_2 x'(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)]\big\}(\tau), \tag{6}$$
$$\beta(\varepsilon) = -\,B_\beta^+ P_{Q_\rho^*}\left\{\varepsilon\alpha\beta^2(\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta(2+\varepsilon\beta))[J(z_0(\cdot,c_r^*),z_0'(\cdot,c_r^*),0) +\right.$$
$$+ \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \ell_2 x'(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z(\cdot,\varepsilon),z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)] -$$
$$-\,\ell K\left\{2\beta(\varepsilon)Ax(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\beta^2(\varepsilon)[Az(\tau,\varepsilon)+f] +\right.$$
$$+ (1+\varepsilon\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)))[Z(z_0(\tau,c_r^*),z_0'(\tau,c_r^*),0) + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) +$$
$$\left.\left.+\ A_2(\tau)x'(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_r^*)) + R_1(z(\tau,\varepsilon),z'(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\right\}(\cdot)\right\}.$$

Для построения этого решения в статье [7] предложена итерационная схема с линейной сходимостью, построенная по методу наименьших квадратов. Целью данной статьи является построение итерационной техники по методу Ньютона с квадратичной сходимостью. Обозначим

$$\psi(\beta(\varepsilon),z(\tau,\varepsilon)) = B_\beta^+ P_{Q_\rho^*}\left\{\varepsilon\alpha\beta^2(\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)))[J(z_0(\cdot,c_r^*),z_0'(\cdot,c_r^*),0) +\right.$$
$$+ \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \ell_2 x'(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)] -$$
$$-\,\ell K\left\{2\beta Ax(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\beta^2[Az(\tau,\varepsilon)+f] + (1+\varepsilon\beta(2+\varepsilon\beta))[Z(z_0(\tau,c_r^*),z_0'(\tau,c_r^*),0) +\right.$$
$$\left.\left.+\ A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + A_2(\tau)x'(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_r^*)) + R_1(z(\tau,\varepsilon),z'(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\right\}(\cdot)\right\},$$
$$g(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon)) = X_r(\tau)c_r^* + \varepsilon G\left\{\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon))(Az+f) +\right.$$
$$+ \varepsilon(1+\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)))[Z(z_0(s,c_r^*),z_0'(s,c_r^*),0) + A_1(s)x(s,\varepsilon) +$$
$$+ A_2(s)x'(s,\varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(s,c_r^*)) + R_1(z(s,\varepsilon),z'(s,\varepsilon),\varepsilon)];$$
$$\alpha\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)) + (1+\varepsilon\alpha\beta(2+\varepsilon\beta)[J(z_0(\cdot,c_r^*),z_0'(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) +$$
$$+ \ell_2 x'(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)]\big\}(\tau).$$

Для построения решения второго уравнения системы (6) методом Ньютона введем оператор

$$\Psi(\beta(\varepsilon),z(\tau,\varepsilon))(\varepsilon) := \beta(\varepsilon) + \psi\{\beta(\varepsilon),z(\tau,\varepsilon)\}(\varepsilon) : C[0,\varepsilon_0] \to C[0,\varepsilon_0].$$

Предположим, что для вектор-функций

$$x(\tau,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in C^2[a,b], \quad x(\tau,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad \|x(\tau,\varepsilon)\| \le q$$

имеют место неравенства

$$\|\Psi(\beta^*, g(z_0(\tau,c_r^*),\beta^*))(\varepsilon)\| \le \gamma_1, \quad \left\|[\Psi_\beta'(\beta^*, g(z_0(s,c_r^*),\beta^*))]^{-1}(\varepsilon)\right\| \le \gamma_2,$$
$$\left\|\Psi_{\beta^2}''(\beta(\varepsilon), g(z(s,\varepsilon),\beta(\varepsilon)))(\varepsilon)\right\| \le \gamma_3.$$

Согласно теореме Ньютона – Канторовича [5, с. 680, 682] при условии $P_{\mathfrak{B}_0^*}P_{Q_\rho^*} = 0$ и $2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 < 1$ для построения по меньшей мере одного из решений операторной системы (6) применима итерационная схема

$$z_{k+1}(\tau,\varepsilon) = g(z_k(\tau,\varepsilon),\beta_k(\varepsilon))(\tau),\ \ z_0(\tau,\varepsilon) := z_0(\tau,c_r^*),\ \ \beta_0(\varepsilon) := \beta^*,\ \ k = 0,1,2,\ldots,$$
$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon) - \left[1 - \frac{\partial\Psi(\beta_k(\varepsilon), z_{k+1}(\tau,\varepsilon))}{\partial\beta}\right]^{-1} \left[\beta_k(\varepsilon) - \Psi(\beta_k(\varepsilon), z_{k+1}(\tau,\varepsilon))\right]. \tag{7}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) для корня $c^* \in \mathbb{R}^{r+1}$ уравнения $F(c^*) = 0$ при условии $P_{B_\beta^*}P_{Q_\rho^*} = 0$ задача (1) имеет по меньшей мере одно решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z_0(\tau,c_r^*)$. Для построения решения задачи (1) в случае $2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 < 1$ применима итерационная схема (7).*

При условии $\rho < 1$, $P_{B_\beta^*}P_{Q_\rho^*} = 0$ будем говорить, что для автономной нетеровой краевой задачи (1) имеет место частный критический случай, характерной особенностью которого является отсутствие изолированных порождающих решений, в окрестности которых задача (1) разрешима.

3. Периодическая задача для уравнения типа Хилла. На примере $T_1(\varepsilon)$-периодической задачи для уравнения типа Хилла [10; 12, с. 315]

$$y'' + y = \varepsilon Y(y,\varepsilon) \tag{8}$$

продемонстрируем способ построения модифицированной итерационной техники для нахождения приближенных решений $y(t,\varepsilon) \in C^2[0,T_1(\varepsilon)]$, $C[0,\varepsilon_0]$, $T_1(0) = 2\pi$ с использованием метода наименьших квадратов [8], обеспечивающих большую точность при меньшем числе итераций. Решение задачи (8) ищем в малой окрестности периодического решения порождающего уравнения. Здесь $Y(y,\varepsilon)$ — нелинейная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной переменной y в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Зафиксируем начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающего уравнения стало однопараметричным [11], например $y_0(t) = \hat{c}\cos t$, $\hat{c} \in \mathbb{R}^1$. Предположим также, что уравнение для порождающих амплитуд имеет действительный корень $(\hat{c}^*,\beta^*) \in \mathbb{R}^2$. Оставляя одну линейно независимую строку уравнения для порождающих амплитуд $F(\hat{c}^*,\beta^*) = 0$, приходим к скалярному уравнению

$$\hat{F}(\hat{c}^*,\beta^*) := \int_0^{2\pi} (Y(y_0(t,\hat{c}^*)) - 2\beta^* y_0(t,\hat{c}^*))\cos t\,dt = 0.$$

При условии $\hat{c}^* \neq 0$ имеет место неравенство $\mathfrak{B}_\beta := \hat{F}'_\beta(\hat{c}^*,\beta^*) = 2\pi\hat{c}^* \neq 0$. Последнее неравенство обеспечивает однозначную разрешимость операторной системы (6) и, в свою очередь, существование единственного периодического решения уравнения типа Хилла (8) в малой окрестности 2π-периодического порождающего решения $y_0(t,\hat{c}^*) = \hat{c}^*\cos t$,

$\hat{c}^* \in \mathbb{R}^1$. Представим период искомого решения $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))$ через новую неизвестную $\beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$, $\beta(\varepsilon)$, $\beta(0) = \beta^*$. Замена независимой переменной в случае периодической задачи принимает вид $t = \tau(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))$. Таким образом, приходим к 2π-периодической задаче для уравнения

$$y''(\tau, \varepsilon) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2 y(\tau, \varepsilon) = \varepsilon\,(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2\, Y(y(\tau, \varepsilon), \varepsilon). \tag{9}$$

Обозначим оператор

$$\Phi(\beta(\varepsilon), y(\tau, \varepsilon))(\varepsilon) := \int\limits_0^{2\pi} (\varepsilon(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2 Y(y(\tau, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \varepsilon\beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon))\, y(\tau, \varepsilon)) \cos\tau\, d\tau \, : C[0, \varepsilon_0] \to C[0, \varepsilon_0].$$

Условие разрешимости 2π-периодической задачи для уравнения (9) имеет вид

$$\Phi(\beta(\varepsilon), y(\tau, \varepsilon))(\varepsilon) = 0.$$

Искомое решение 2π-периодической задачи для уравнения (9) ищем в виде $y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, \hat{c}^*) + x(\tau, \varepsilon)$. Отклонение от порождающего решения $x(\tau, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, 2\pi]$, $x(\tau, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$ определяет 2π-периодическая задача для уравнения

$$x''(\tau, \varepsilon) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2\, x(\tau, \varepsilon) = \varepsilon(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2\, Y(y_0(\tau, \hat{c}^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \left\{ y_0''(\tau, \hat{c}^*) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2\, y_0(\tau, \hat{c}^*) \right\}. \tag{10}$$

Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Y(y, \varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $y_0(\tau, \hat{c}^*)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Y(y_0(\tau, \hat{c}^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) = Y(y_0(\tau, \hat{c}^*), 0) + \mathcal{A}_1(y_0(\tau, \hat{c}^*))x(\tau, \varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau, \hat{c}^*)) + \mathcal{R}(y_0(\tau, \hat{c}^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1(y_0(\tau, \hat{c}^*)) := Y'_y(y_0(\tau, \hat{c}^*), 0), \quad \mathcal{A}_2(y_0(\tau, \hat{c}^*)) := Y'_\varepsilon(y_0(\tau, \hat{c}^*), 0).$$

Первое приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения

$$y_1(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, \hat{c}^*) + x_1(\tau, \varepsilon)$$

ищем, как периодическое решение уравнения

$$x_1''(\tau, \varepsilon) + (1 + \varepsilon\beta^*)^2\, x_1(\tau, \varepsilon) = \varepsilon(1 + \varepsilon\beta^*)^2 \times$$

$$\times \left\{ Y(y_0(\tau, \hat{c}^*), 0) + \mathcal{A}_1(y_0(\tau, \hat{c}^*))x_1(\tau, \varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau, \hat{c}^*)) \right\}. \tag{11}$$

Пусть $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_\mu(\tau), \ldots$ — система линейно независимых дважды непрерывно дифференцируемых скалярных функций. Приближение к периодическому решению уравнения (11) ищем в виде $x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_1(\varepsilon)$, где $\varphi(\tau) = [\varphi_1(\tau)\,\varphi_2(\tau)\,\ldots\,\varphi_\mu(\tau)]$ — $(1\times\mu)$-матрица. Потребуем, чтобы

$$\Big\|(1+\varepsilon\beta^*)^2\,[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))-1]\xi_1(\tau,\varepsilon)+\varepsilon(1+\varepsilon\beta^*)^2\,[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+$$
$$+\,\varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))]-\xi_1''(\tau,\varepsilon)-y_0''(\tau,\hat{c}^*)-(1+\varepsilon\beta^*)^2\,y_0(\tau,\hat{c}^*)\Big\|^2_{L^2[0,2\pi]}\to\min$$

при фиксированной матрице $\varphi(t)$. Обозначим $(1\times\mu)$-матрицу

$$\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon) = (1+\varepsilon\beta^*)^2\,[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))-1]\varphi_1(\tau)-\varphi_1''(\tau).$$

При условии

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]\neq 0,\quad \Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)) := \int\limits_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau$$

находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\,[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\left\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta^*)^2\,[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))]-\right.$$
$$\left.-\,y_0''(\tau,\hat{c}^*)-(1+\varepsilon\beta^*)^2\,y_0(\tau,\hat{c}^*)\right\}d\tau.$$

Первое приближение $\beta_1(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$ вычисляем по формуле Ньютона:

$$\beta_1(\varepsilon) = \beta^*-\left[1-\frac{\partial\Phi(\beta^*,y_1(\tau,\varepsilon))}{\partial\beta}\right]^{-1}[\beta^*-\Phi(\beta^*,y_1(\tau,\varepsilon))].$$

Второе приближение к решению периодической задачи для уравнения (9) ищем, как отклонение от первого

$$y_2(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_2(\tau,\varepsilon),\quad x_2(\tau,\varepsilon) = \xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\quad \xi_2(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_2(\varepsilon).$$

Предположим, что найденное первое приближение $y_1(\tau,\varepsilon)\approx y_0(\tau,\hat{c}^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon)$ принадлежит области определения функции $Y(y,\varepsilon)$. Используя непрерывную дифференцируемость по $y(\tau,\varepsilon)$ функции $Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в окрестности первого приближения $y_1(\tau,\varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $\xi_2(\tau,\varepsilon)=0$ и $\varepsilon=0$:

$$Y(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+\mathcal{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon))\xi_2(\tau,\varepsilon)+$$
$$+\,\varepsilon\mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))+\mathcal{R}(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon)) := Y'_y(y_1(\tau,\varepsilon),0), \quad \mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon)) := Y'_\varepsilon(y_1(\tau,\varepsilon),0).$$

Второе приближение к решению периодической задачи для уравнения (9) ищем, как периодическое решение уравнения

$$y''_2(\tau,\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2\, y_2(\tau,\varepsilon) = \varepsilon(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2 \times \\ \times \left\{ Y(y_1(\tau,\varepsilon),0) + \mathcal{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon))\xi_2(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon)) \right\}. \tag{12}$$

Обозначим $(1\times\mu)$-матрицу

$$\mathcal{F}_2(\tau,\varepsilon) = (1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2\,[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon)) - 1]\varphi(\tau) - \varphi''(\tau).$$

При условии

$$\det\left[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))\right] \neq 0, \quad \Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)) := \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\,\mathcal{F}_2(\tau,\varepsilon)\,d\tau$$

находим вектор

$$c_2(\varepsilon) = -[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))]^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\, \left\{ \varepsilon(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2 \times \right. \\ \left. \times\, [Y(y_1(\tau,\varepsilon),0) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))] - (1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2\, y_1(\tau,\varepsilon) - y''_1(\tau,\varepsilon) \right\}\, d\tau.$$

Второе приближение $\beta_2(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$ определяет формула Ньютона

$$\beta_2(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon) - \left[1 - \frac{\partial\Phi(\beta_1(\varepsilon), y_2(\tau,\varepsilon))}{\partial\beta}\right]^{-1} [\beta_1(\varepsilon) - \Phi(\beta_1(\varepsilon), y_2(\tau,\varepsilon))].$$

Продолжая рассуждения, предполагаем, что найдено наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$x_k(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon), \ldots, \xi_k(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_k(\varepsilon), \quad c_k(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\mu, \quad k = 1,2,\ldots,$$

к решению периодической задачи для уравнения (9) и приближение $\beta_k(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$. Следующее приближение ищем в виде

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \quad \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon), \quad c_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\mu.$$

Предположим, что найденное приближение $y_k(\tau,\varepsilon) \approx y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_k(\tau,\varepsilon)$ принадлежит области определения функции $Y(y,\varepsilon)$. Используя непрерывную дифференцируемость по

$y(\tau,\varepsilon)$ функции $Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в окрестности приближения $y_k(\tau,\varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)=0$ и $\varepsilon=0$:

$$Y(y_k(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)+\mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon))\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)+$$
$$+\,\varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon))+\mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon)) := Y'_y(y_k(\tau,\varepsilon),0), \quad \mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon)) := Y'_\varepsilon(y_k(\tau,\varepsilon),0).$$

Обозначим $(1\times\mu)$-матрицу

$$\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon) = (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2\,[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon))-1]\varphi(\tau)-\varphi''(\tau).$$

При условии

$$\det\left[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))\right]\neq 0, \quad \Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) = \int\limits_0^{2\pi}\mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\,\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\,d\tau$$

находим вектор

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -\left[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))\right]^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\left\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2\left[Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon))\right]-\right.$$
$$\left.-\,(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2\,y_k(\tau,\varepsilon)-y''_k(\tau,\varepsilon)\right\}\,d\tau.$$

Следующее приближение к функции $\beta(\varepsilon)$ представим в виде

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon)-\left[1-\frac{\partial\Phi(\beta_k(\varepsilon),y_{k+1}(\tau,\varepsilon))}{\partial\beta}\right]^{-1}[\beta_k(\varepsilon)-\Phi(\beta_k(\varepsilon),y_{k+1}(\tau,\varepsilon))].$$

Предположим, что для произвольной функции

$$x(\tau,\varepsilon): x(\cdot,\varepsilon)\in C^2[0,T], \quad x(\tau,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0], \quad x(\tau,0)\equiv 0, \quad \|x(\tau,\varepsilon)\|\leq q$$

имеют место неравенства

$$\|\Phi(\beta^*,y_1(\tau,\varepsilon))\|\leq\gamma_1, \quad \left\|\left[\Phi'_\beta(\beta^*,y_1(\tau,\varepsilon))\right]^{-1}\right\|\leq\gamma_2, \quad \left\|\Phi''_{\beta^2}(\beta(\varepsilon),y(\tau,\varepsilon))\right\|\leq\gamma_3.$$

Согласно теореме Ньютона – Канторовича [5, с. 680, 682] условие сходимости построенной итерационной схемы имеет вид $2\,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3 < 1$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие. *Для любого действительного корня* $(\hat{c}^*, \beta^*) \in \mathbb{R}^2$ *уравнения для порождающих амплитуд* $\hat{F}(\hat{c}^*, \beta^*) = 0$ *в случае* $\mathfrak{B}_\beta \neq 0$ *задача (8) имеет единственное решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y_0(\tau, \hat{c}^*)$. *При условии*

$$2\,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3 < 1, \quad \det[\Gamma(\mathcal{F}_k(\cdot, \varepsilon))] \neq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

это решение можно определить с помощью итерационного процесса

$$y_1(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, \hat{c}^*) + x_1(\tau, \varepsilon), \quad x_1(\tau, \varepsilon) \approx \xi_1(\tau, \varepsilon) = \varphi(\tau) c_1(\varepsilon),$$

$$c_1(\varepsilon) = -\left[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon))\right]^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau, \varepsilon) \left\{\varepsilon(1 + \varepsilon\beta^*)^2 \left[Y(y_0(\tau, \hat{c}^*), 0) + \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, \hat{c}^*))\right] - \right.$$

$$\left. - \, y_0''(\tau, \hat{c}^*) - (1 + \varepsilon\beta^*)^2\, y_0(\tau, \hat{c}^*)\right\} d\tau,$$

$$\beta_1(\varepsilon) = \beta^* - \left[1 - \frac{\partial \Phi(\beta^*, y_1(\tau, \varepsilon))}{\partial \beta}\right]^{-1} \left[\beta^* - \Phi(\beta^*, y_1(\tau, \varepsilon))\right],$$

. . . .

$$y_{k+1}(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, \hat{c}^*) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \tag{13}$$

$$x_{k+1}(\tau, \varepsilon) \approx \xi_1(\tau, \varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon), \quad \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \varphi(\tau) c_{k+1}(\varepsilon),$$

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -\left[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot, \varepsilon))\right]^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}_{k+1}^*(\tau, \varepsilon) \left\{\varepsilon(1 + \varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2 \left[Y(y_k(\tau, \varepsilon), 0) + \varepsilon \mathcal{A}_2(y_k(\tau, \varepsilon))\right] - \right.$$

$$\left. - \, (1 + \varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2\, y_k(\tau, \varepsilon) - y_k''(\tau, \varepsilon)\right\} d\tau,$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon) - \left[1 - \frac{\partial \Phi(\beta_k(\varepsilon), y_{k+1}(\tau, \varepsilon))}{\partial \beta}\right]^{-1} \left[\beta_k(\varepsilon) - \Phi(\beta_k(\varepsilon), y_{k+1}(\tau, \varepsilon))\right], \ldots .$$

С учетом замены независимой переменной итерационная схема (13) определяет приближенное решение $T_1(\varepsilon)$*-периодической задачи для уравнения Хилла (8).*

Пример 1. Исследуем задачу о построении периодического решения уравнения Дюффинга [11]

$$y'' + y = \varepsilon\, y^3. \tag{14}$$

Уравнение для порождающих амплитуд в случае задачи о нахождении периодического решения уравнения (14) принимает вид

$$F_\rho(\hat{c}, \beta) := \frac{\pi \hat{c}}{4}\,(3\hat{c}^2 - 8\beta) = 0.$$

Для достаточно малых $\hat{c}^* \in \mathbb{R}^1$ серия корней

$$\beta^* = \frac{3(\hat{c}^*)^2}{8}, \quad \hat{c}^* \neq 0,$$

определяет нетривиальные периодические решения уравнения Дюффинга. Примем для определенности $\hat{c}^* = 1$, $\varepsilon_0 = 0,35$, $q = 0,1$. Для первого шага итерационной схемы (13) положим

$$\varphi_1(\tau) = [\cos\tau \ \cos 3\tau \ \cos 5\tau\,].$$

Матрица Грама, соответствующая порождающему решению $y_0(t, \hat{c}^*) = \cos t$,

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon))] = 82\,944\,\pi^3\,\varepsilon^2 + 184\,032\,\pi^3\,\varepsilon^3 + \ldots \neq 0$$

невырождена, при этом

$$\begin{aligned}\xi_1(\tau, \varepsilon) \approx &-\frac{1}{64}\,(17\cos\tau + 2\cos 3\tau)\,\varepsilon + \frac{1}{4096}\,(873\cos\tau + 18\cos 3\tau + 4\cos 5\tau)\varepsilon^2 + \\ &+ \frac{1}{262\,144}\,(-42\,477\cos\tau - 618\cos 3\tau + 148\cos 5\tau)\,\varepsilon^3 + \\ &+ \frac{3}{16\,777\,216}\,(674\,847\cos\tau + 22\,870\cos 3\tau + 276\cos 5\tau)\varepsilon^4 + \\ &+ \frac{5}{1\,073\,741\,824}\,(19\,356\,357\cos\tau + 643\,338\cos 3\tau + 27\,292\cos 5\tau)\,\varepsilon^5.\end{aligned}$$

В этом случае величина $2\,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3 = 0,137\,661 < 1$, где

$$\|\Phi(\beta^*, y_1(\tau, \varepsilon))\| \leq \gamma_1 = 0,0511\,762, \quad \left\|\left[\Phi'_\beta(\beta^*, y_1(\tau, \varepsilon))\right]^{-1}\right\| \leq \gamma_2 = 0,195\,292,$$

$$\left\|\Phi''_{\beta^2}(\beta(\varepsilon), y(\tau, \varepsilon))\right\| \leq \gamma_3 = 6,88\,697.$$

Согласно доказанному следствию задача о построении периодического решения уравнения Дюффинга в достаточно малой окрестности порождающего решения $y_0(\tau, \hat{c}^*) = \cos\tau$ имеет единственное решение. Таким образом, найдено первое $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta_1(\varepsilon))$-периодическое приближение к решению уравнения Дюффинга, где

$$\beta_1(\varepsilon) \approx \frac{3}{8} + \frac{2\,829\varepsilon^2}{32\,768} + \frac{2\,378\varepsilon^3}{110\,749} + \frac{8\,676\varepsilon^4}{351\,163} + \frac{361\varepsilon^5}{71\,142}.$$

Нами найдено $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1+\varepsilon\beta_5(\varepsilon))$-периодическое пятое приближение к решению уравнения Дюффинга:

$$
\begin{aligned}
y_5(\tau,\varepsilon) = {} & \cos\tau - \frac{17}{64}\,\varepsilon\cos\tau + \frac{873}{4\,096}\,\varepsilon^2\cos\tau - \frac{14\,943}{131\,072}\,\varepsilon^3\cos\tau + \\
& + \frac{621\,713}{8\,388\,608}\,\varepsilon^4\cos\tau - \frac{50\,158\,059}{1\,073\,741\,824}\,\varepsilon^5\cos\tau - \frac{698\,704}{1\,654\,909\,117}\,\varepsilon^6\cos\tau - \\
& - \frac{9\,049\,388}{867\,820\,023}\,\varepsilon^7\cos\tau + \frac{10\,741\,671}{879\,008\,941}\,\varepsilon^8\cos\tau + \frac{566\,415}{19\,721\,363\,668}\,\varepsilon^9\cos\tau + \\
& + \frac{2\,173\,159}{15\,018\,447\,577}\,\varepsilon^{10}\cos\tau + \frac{95\,507}{40\,880\,064\,770}\,\varepsilon^{11}\cos\tau + \frac{461\,438}{2\,225\,777\,143}\,\varepsilon^{12}\cos\tau - \\
& - \frac{1}{32}\,\varepsilon\cos 3\tau + \frac{9}{2\,048}\,\varepsilon^2\cos 3\tau - \frac{99}{8\,192}\,\varepsilon^3\cos 3\tau + \frac{15\,023}{8\,388\,608}\,\varepsilon^4\cos 3\tau - \\
& - \frac{245\,811}{67\,108\,864}\,\varepsilon^5\cos 3\tau + \frac{1\,397\,408}{1\,654\,909\,117}\,\varepsilon^6\cos 3\tau + \frac{3\,540\,711}{2\,123\,657\,887}\,\varepsilon^7\cos 3\tau + \\
& + \frac{1\,960\,563}{1\,624\,849\,940}\,\varepsilon^8\cos 3\tau - \frac{828\,669}{14\,426\,233\,469}\,\varepsilon^9\cos 3\tau - \frac{1\,359\,361}{27\,840\,195\,402}\,\varepsilon^{10}\cos 3\tau - \\
& - \frac{161\,448}{34\,552\,465\,777}\,\varepsilon^{11}\cos 3\tau - \frac{831\,991}{12\,330\,271\,799}\,\varepsilon^{12}\cos 3\tau + \frac{\varepsilon^2\cos 5\tau}{1\,024} + \frac{\varepsilon^3\cos 5\tau}{65\,536} + \\
& + \frac{2\,381}{4\,194\,304}\,\varepsilon^4\cos 5\tau + \frac{4\,711}{67\,108\,864}\,\varepsilon^5\cos 5\tau + \frac{1\,712\,623}{7\,893\,293\,717}\,\varepsilon^6\cos 5\tau + \\
& + \frac{640\,368}{15\,765\,403\,451}\,\varepsilon^7\cos 5\tau - \frac{132\,045}{1\,800\,694\,511}\,\varepsilon^8\cos 5\tau - \frac{897\,246}{13\,680\,597\,481}\,\varepsilon^9\cos 5\tau - \\
& - \frac{526\,460}{15\,431\,886\,227}\,\varepsilon^{10}\cos 5\tau - \frac{528\,727}{27\,270\,566\,075}\,\varepsilon^{11}\cos 5\tau - \frac{1\,734\,336}{142\,003\,575\,115}\,\varepsilon^{12}\cos 5\tau - \\
& - \frac{\varepsilon^3\cos 7\tau}{32768} - \frac{11}{2097152}\,\varepsilon^4\cos 7\tau - \frac{1\,639}{67\,108\,864}\,\varepsilon^5\cos 7\tau - \frac{69\,559}{8\,589\,934\,592}\,\varepsilon^6\cos 7\tau - \\
& - \frac{239\,097}{19\,345\,370\,824}\,\varepsilon^7\cos 7\tau - \frac{403\,307}{73\,080\,294\,227}\,\varepsilon^8\cos 7\tau + \frac{55\,879}{49\,276\,366\,858}\,\varepsilon^9\cos 7\tau + \\
& + \frac{121\,117}{56\,739\,559\,495}\,\varepsilon^{10}\cos 7\tau + \frac{65\,865}{26\,390\,366\,173}\,\varepsilon^{11}\cos 7\tau + \frac{101\,795}{51\,470\,915\,149}\,\varepsilon^{12}\cos 7\tau + \\
& + \frac{\varepsilon^4\cos 9\tau}{1\,048\,576} + \frac{21}{67\,108\,864}\,\varepsilon^5\cos 9\tau + \frac{4\,275}{4\,294\,967\,296}\,\varepsilon^6\cos 9\tau + \\
& + \frac{69\,057}{137\,438\,953\,472}\,\varepsilon^7\cos 9\tau + \frac{31\,571}{48\,614\,162\,736}\,\varepsilon^8\cos 9\tau + \frac{67\,835}{169\,692\,035\,569}\,\varepsilon^9\cos 9\tau + \\
& + \frac{10\,777}{118\,002\,093\,877}\,\varepsilon^{10}\cos 9\tau - \frac{8\,523}{806\,687\,232\,430}\,\varepsilon^{11}\cos 9\tau - \\
& - \frac{41\,072}{389\,422\,001\,521}\,\varepsilon^{12}\cos 9\tau - \frac{\varepsilon^5\cos 11\tau}{33\,554\,432} - \frac{31}{2\,147\,483\,648}\,\varepsilon^6\cos 11\tau -
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1\,343}{34\,359\,738}\,\varepsilon^7\cos 11\tau-\frac{10\,230}{399\,026\,343\,149}\,\varepsilon^8\cos 11\tau-\frac{3\,231}{101\,700\,114\,874}\,\varepsilon^9\cos 11\tau-$$

$$-\frac{18\,143}{772\,249\,828\,613}\,\varepsilon^{10}\cos 11\tau-\frac{7\,994}{730\,541\,904\,185}\,\varepsilon^{11}\cos 11\tau-$$

$$-\frac{4\,850}{1\,025\,164\,429\,497}\,\varepsilon^{12}\cos 11\tau+\frac{\varepsilon^6\cos 13\tau}{1\,073\,741\,824}+\frac{41}{68\,719\,476\,736}\,\varepsilon^7\cos 13\tau+$$

$$+\frac{2\,891}{1\,935\,568\,954\,727}\,\varepsilon^8\cos 13\tau+\frac{4\,706}{3\,980\,901\,955\,859}\,\varepsilon^9\cos 13\tau+$$

$$+\frac{2\,226}{1\,515\,947\,240\,489}\,\varepsilon^{10}\cos 13\tau+\frac{1\,947}{1\,579\,817\,200\,855}\,\varepsilon^{11}\cos 13\tau+$$

$$+\frac{909}{117\,892\,647\,304}\,\varepsilon^{12}\cos 13\tau-\frac{\varepsilon^7\cos 15\tau}{34\,359\,738\,368}-\frac{51}{2\,199\,023\,255\,552}\,\varepsilon^8\cos 15\tau-$$

$$-\frac{739}{13\,223\,742\,405\,886}\,\varepsilon^9\cos 15\tau-\frac{443}{8\,660\,210\,519\,111}\,\varepsilon^{10}\cos 15\tau-$$

$$-\frac{286}{44\,407\,852\,761\,913}\,\varepsilon^{11}\cos 15\tau-\frac{152}{2\,533\,003\,655\,895}\,\varepsilon^{12}\cos 15\tau.$$

При этом

$$\beta_5(\varepsilon)\approx\frac{3}{8}+\frac{2\,829}{32\,768}\,\varepsilon^2+\frac{11\,433}{1\,048\,576}\,\varepsilon^3+\frac{2\,235\,327}{134\,217\,728}\,\varepsilon^4+\frac{4\,503\,417}{1\,073\,741\,824}\,\varepsilon^5-$$

$$-\frac{5\,323\,260}{275\,900\,981}\,\varepsilon^6-\frac{15\,548\,395}{1\,495\,176\,536}\,\varepsilon^7-\frac{378}{8\,060\,419\,882\,001}\,\varepsilon^8+\frac{2\,863\,479}{1\,676\,636\,167}\,\varepsilon^9+$$

$$+\frac{2}{3\,001\,557\,602\,515\,237}\,\varepsilon^{10}+\frac{1\,448\,398}{4\,151\,585\,815}\,\varepsilon^{11}+\frac{4\,145\,643}{4\,212\,674\,074}\,\varepsilon^{12}+$$

$$+\frac{1\,685\,113}{1\,525\,999\,605}\,\varepsilon^{13}+\frac{2\,485\,409}{3\,653\,459\,129}\,\varepsilon^{14}+\frac{557\,083}{24\,247\,191\,414}\,\varepsilon^{15}.$$

Для оценки точности найденных приближений к периодическому решению уравнения Дюффинга определим невязки нулевого $y_0(\tau,\varepsilon) := y_0(\tau,\hat{c}^*)$, $\beta_0(\varepsilon) := \beta^*$ и первых пяти приближений $(i = 0,1,2,3,4,5)$

$$\Delta_i(\varepsilon) := \left\| y_i''(\tau,\varepsilon)+(1+\varepsilon\beta_i(\varepsilon))^2\,y_i(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\,(1+\varepsilon\beta_i(\varepsilon))^2\,y_i^3(\tau,\varepsilon)\right\|_{C[0;2\pi]}.$$

Полагая $\varepsilon = 0,1$, убеждаемся в уменьшении нулевой и первых пяти невязок от итерации к итерации

$$\Delta_0(0,1)\approx 0,1,\quad \Delta_1(0,1)\approx 9,12\,436\,10^{-5},\quad \Delta_2(0,1)\approx 3,41\,606\,10^{-8},$$

$$\Delta_3(0,1)\approx 5,93\,289\,10^{-11},\quad \Delta_4(0,1)\approx 2,81\,508\,10^{-14},\quad \Delta_5(0,1)\approx 2,79\,478\,10^{-16}.$$

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — xiv + 317 p.
2. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. — 1992. — **28**, № 10. — С. 1668–1674.
3. *Чуйко С. М., Бойчук И. А.* Автономная нетерова краевая задача в критическом случае // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 405–416.
4. *Шовкопляс Т. В.* Критерій розв'язності лінійної крайової задачі для системи другого порядку // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 6. — С. 861–864.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
6. *Чуйко С. М.* Слабонелинейная краевая задача в особом критическом случае // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 4. — С. 548–562.
7. *Чуйко С. М., Старкова О. В.* Автономные краевые задачи в частном критическом случае // Динамические системы. — 2009. — **27**. — С. 127–142.
8. *Чуйко С. М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 4. — С. 554–573.
9. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 408 с.
10. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 778 с.
11. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
12. *Якубович В. А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 720 с.

Получено 14.02.12