УДК 517.956

ГЛОБАЛЬНЕ СПРЯЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ ВЗДОВЖ НЕВІДОМОЇ КОНТАКТНОЇ МЕЖІ

Р. В. Андрусяк, Н. О. Бурдейна, В. М. Кирилич

Львів. нац. ун-т ім. І. Франка
Україна, 79000, Львів, вул. Університетська, 1

We consider local and global solvabilities of a nonlinear problem with a free (unknown) break line in the initial data for a hyperbolic system of first order quasilinear equation with two independent variables. For the problem to be globally solvable, it is necessary to impose an additional condition on the coefficients and the free terms to be of constant sign and monotone.

Рассмотрена локальная глобальная разрешимость нелинейной задачи со свободной (неизвестной) линией разрыва исходных данных гиперболической системы квазилинейных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными. Для глобальной разрешимости от коэффициентов и свободных членов дополнительно требуется знакопостоянство и монотонность.

1. Вступ. Математичне формулювання задач про визначення невідомої лінії контактного розриву параметрів потоку рідини або газу є однією з основних проблем гідро- та газодинаміки й теорії аеропружності [1, 2] і зводиться до відшукання розв'язку задач з вільними (невідомими) межами для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь першого порядку (гіперболічні задачі Стефана) [3].

Локальній за часовою змінною розв'язності задач з контактним розривом вихідних даних гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними присвячено низку праць (див. бібліографію в [1, 4]). Достатні умови існування та єдиності локального розв'язку таких задач у випадку, коли лінія контактного розриву є апріорі невідомою, одержано в [2 – 5].

У цій статті отримано умови локальної та глобальної розв'язності задачі з невідомою контактною лінією розподілу двох середовищ (одного — з різними параметрами станів), що описуються квазілінійними гіперболічними системами. Крім умов гладкості від вихідних даних задачі для глобальної розв'язності потрібно додатково вимагати їх знакосталість та монотонність [3, 6].

Деякі окремі випадки задач з вільними межами для спеціальних гіперболічних рівнянь і систем та їх застосування розглянуто у [8 – 12].

2. Формулювання задачі. Нехай $D_T^{s-} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, s_1(t) < x < s(t)\}$, $D_T^{s+} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t <, s(t) < x < s_2(t)\}$ — області з рухомими межами $x = s_j(t) : [0,T] \to \mathbb{R}, j \in \{1,2\}$, та вільною (невідомою) межею $x = s(t) : [0,T] \to \mathbb{R}$.

В області D_T^{s-} розглянемо гіперболічну систему квазілінійних рівнянь, записану в інваріантах

$$\frac{\partial u_i^-}{\partial t} + \lambda_i^-(x,t,u^-)\frac{\partial u_i^-}{\partial x} = f_i^-(x,t,u^-), \quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{1}$$

а в області D_T^{s+} — систему

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t} + \lambda_i^+(x,t,u^+)\frac{\partial u_i^+}{\partial x} = f_i^+(x,t,u^+), \quad i \in \{1,\ldots,n\}, \tag{2}$$

де $u^-(x,t) = (u_1^-(x,t),\ldots,u_n^-(x,t)) : \overline{D_T^{s-}} \to \mathbb{R}^n$, $u^+(x,t) = (u_1^+(x,t),\ldots,u_n^+(x,t)) : \overline{D_T^{s+}} \to \mathbb{R}^n$ — шукані функції, а $\lambda_i^\pm(x,t,u) : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, $f_i^\pm(x,t,u) : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ — відомі функції.

Нехай поведінку функції s описує диференціальне рівняння

$$\frac{ds}{dt} = g(s,t,u^\pm(s,t)), \tag{3}$$

де $u^\pm(s,t) = (u^-(s,t), u^+(s,t)) : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R}^{2n}$, а $g(s,t,u^\pm) : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}$ — відома функція.

Доповнимо системи (1) – (3) початковими умовами

$$s(0) = s^0, \tag{4}$$

$$u^-(x,0) = \alpha^-(x),\ \ x \in [s_1^0, s^0], \quad u^+(x,0) = \alpha^+(x),\ \ x \in [s^0, s_2^0], \tag{5}$$

де $s_k^0 \stackrel{\mathrm{df}}{=} s_k(0)$, $k \in \{1,2\}$, $s^0 \in (s_1^0, s_2^0)$ — задане значення, $\alpha^-(x) = (\alpha_1^-(x),\ldots,\alpha_n^-(x)) : [s_1^0, s^0] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha^+(x) = (\alpha_1^+(x),\ldots,\alpha_n^+(x)) : [s^0, s_2^0] \to \mathbb{R}^n$ — заданий набір функцій.

Розглянемо множини індексів I_1, I_2, I_-, I_+, J_-, J_+ :

$$I_1 = \{i \in \{1,\ldots,n\} : \lambda_i^-(s_1^0, 0, \alpha^-(s_1^0)) > s_1'(0)\},$$

$$I_2 = \{i \in \{1,\ldots,n\} : \lambda_i^+(s_2^0, 0, \alpha^+(s_2^0)) < s_2'(0)\},$$

$$I_- = \{i \in \{1,\ldots,n\} : \lambda_i^-(s^0, 0, \alpha^-(s^0)) < g(s^0, 0, \alpha^\pm(s^0))\},$$

$$I_+ = \{i \in \{1,\ldots,n\} : \lambda_i^+(s^0, 0, \alpha^+(s^0)) > g(s^0, 0, \alpha^\pm(s^0))\},$$

$$J_- \subset \{1,\ldots,n\}\backslash I_-, \quad J_+ \subset \{1,\ldots,n\}\backslash I_+,$$

де $\alpha^\pm(s^0) = (\alpha^-(s^0), \alpha^+(s^0))$, k_-, k_+ — кількість елементів множин J_-, J_+ відповідно.

Насамкінець припустимо, що на рухомих бічних межах областей D_T^{s-}, D_T^{s+} виконуються крайові умови вигляду

$$u_i^-(s_1(t),t) = \beta_{i1}(t),\ \ i \in I_1, \quad u_i^+(s_2(t),t) = \beta_{i2}(t),\ \ i \in I_2, \tag{6}$$

а на вільній межі $x = s(t)$ — умови спряження

$$\begin{aligned} u_i^-(s(t),t) &= \gamma_i^-(s(t),t,\tilde{u}^\pm(s(t),t)), \quad i \in I_-, \\ u_i^+(s(t),t) &= \gamma_i^+(s(t),t,\tilde{u}^\pm(s(t),t)), \quad i \in I_+, \end{aligned} \tag{7}$$

де $\tilde{u}^{\pm}(s,t) = (\tilde{u}^{-}(s,t), \tilde{u}^{+}(s,t))$, $\tilde{u}^{-} = (u_i^{-})$, $i \in J_-$, $\tilde{u}^{+} = (u_i^{+})$, $i \in J_+$, а $\beta_{ij}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma_i^{\pm}(s,t,\tilde{u}^{\pm}) : \mathbb{R}^{k_- + k_+ + 2} \to \mathbb{R}$ — відомі функції.

3. Узагальнений розв'язок задачі. Нехай $i \in \{1,\ldots,n\}$, $s(t) : [0,T] \to \mathbb{R}$, $u^-(x,t) : \overline{D_T^{s-}} \to \mathbb{R}^n$ — визначені функції, а $(x_0,t_0) \in \overline{D_T^{s-}}$. Розглянемо задачу Коші для визначення характеристик системи (1), тобто

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i^-(x,t,u^-(x,t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Припустимо, що ця задача має єдиний розв'язок, який позначимо через $\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0)$. Внаслідок цього отримаємо сім'ю функцій аргументу t з параметрами x_0, t_0, яка залежить від вибору функції u^-, тобто сім'ю операторів.

Зазначимо, що розв'язок $\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0)$ за фіксованих i, s, u^-, x_0, t_0 можна продовжити до перетину з межею області D_T^{s-}. Нехай

$$\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0) = \min\left\{t \in [0,t_0] : (\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0),t) \in \overline{D_T^{s-}}\right\}.$$

Отже, функція $\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0)$ буде визначена на відрізку $\left[\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0), t_0\right]$, до того ж $\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0)$ є сім'єю функціоналів з параметрами x_0, t_0.

На характеристиках запишемо систему рівнянь (1) у вигляді

$$\frac{du_i^-(\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0),t)}{dt} = f_i(\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0),t,u^-(\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0),t)), \quad i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Зінтегрувавши кожне рівняння отриманої системи в межах від $\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0)$ до t_0, одержимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$\begin{gathered} u_i^-(x,t) = u_i^-\left(\varphi_i^-[u^-](\chi_i^-[u^-,s](x,t);x,t), \chi_i^-[u^-,s](x,t)\right) + \\ + \int\limits_{\chi_i^-[u^-,s](x,t)}^{t} f_i^-\left(\varphi_i^-[u^-](\tau;x,t),\tau,u^-(\varphi_i^-[u^-](\tau;x,t),\tau)\right)\,d\tau, \\ i \in \{1,\ldots,n\}, \quad (x,t) \in \overline{D_T^{s-}}. \end{gathered} \tag{8}$$

Зазначимо, що системи (1) та (8) є еквівалентними у класі функцій $(u^-,s) : u^- \in [C^1(\overline{D_T^{s-}})]^n$, $s \in [C[0,T]]^2$, проте розв'язок останньої системи може бути не диференційовним.

Міркуючи аналогічно, одержуємо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$\begin{gathered} u_i^+(x,t) = u_i^+\left(\varphi_i^+[u^+](\chi_i^+[u^+,s](x,t);x,t), \chi_i^+[u^+,s](x,t)\right) + \\ + \int\limits_{\chi_i^+[u^+,s](x,t)}^{t} f_i^+\left(\varphi_i^+[u^+](\tau;x,t),\tau,u^+(\varphi_i^+[u^+](\tau;x,t),\tau)\right)\,d\tau, \\ i \in \{1,\ldots,n\}, \quad (x,t) \in \overline{D_T^{s+}}, \end{gathered} \tag{9}$$

що еквівалентна системі (2) у класі достатньо гладких функцій (u^+, s).

Означення 1. *Узагальненим ров'язком задачі (1)–(7), визначеним на відрізку* $[0, T_0]$, *будемо називати набір функцій* (u^-, u^+, s) : $u^- \in \left[\operatorname{Lip}(\overline{D^{s-}_{T_0}})\right]^n$, $u^+ \in \left[\operatorname{Lip}(\overline{D^{s+}_{T_0}})\right]^n$, $s \in C^1[0, T_0]$, $0 < T_0 \le T$, *що задовольняє системи (3), (8), (9) та умови (4)–(7). Якщо* $T_0 < T$, *то розв'язок є локальним, якщо ж* $T_0 = T$, *то розв'язок є глобальним.*

4. Теорема про локальну розв'язність задачі. Нехай $U = \max\left\{\max_{x\in[s_1^0, s^0]} |\alpha^-(x)|, \max_{x\in[s^0, s_2^0]} |\alpha^+(x)|\right\} + 1$, $S = |g(s^0, 0, \alpha^\pm(s^0))| + 1$.

Визначимо такі множини:

$$D^1_{T,U} = \left\{(x, t, u) \in \mathbb{R}^{n+2} : 0 \le t \le T, s_1(t) \le x \le s_2(t), |u| \le U\right\},$$

$$D^2_{T,U,S} = \left\{(s, t, u^\pm) \in \mathbb{R}^{2n+2} : 0 \le t \le T, s^0 - St \le s \le s^0 + St, |u^\pm| \le U\right\},$$

$$D^3_{T,U,S} = \left\{(s, t, \tilde{u}^\pm) \in \mathbb{R}^{k_- + k_+ + 2} : 0 \le t \le T, s^0 - St \le s \le s^0 + St, |\tilde{u}^\pm| \le U\right\}.$$

Тут $|\cdot|$ — норма у просторі $\mathbb{R}^N$ у сенсі максимумів модулів (розмірність N у кожному випадку є зрозумілою з контексту).

Введемо інші позначення:

$$\Lambda = \max_{(x,t,u)\in D^1_{T,U}} |\lambda^\pm(x, t, u)|, \quad F = \max_{(x,t,u)\in D^1_{T,U}} |f^\pm(x, t, u)|,$$

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left\{|\lambda_i^-(s_1^0, 0, \alpha^-(s_1^0)) - s_1'(0)|, |\lambda_i^+(s_2^0, 0, \alpha^+(s_2^0)) - s_2'(0)|,\right.$$
$$\left.|\lambda_i^-(s^0, 0, \alpha^-(s^0)) - g(s^0, 0, \alpha^\pm(s^0))|, |\lambda_i^+(s^0, 0, \alpha^+(s^0)) - g(s^0, 0, \alpha^\pm(s^0))|\right\},$$

і нехай $\lambda_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, S_0$ — сталі Ліпшиця функцій $\lambda_i^\pm$, $f_i^\pm$, g, $\alpha_i^\pm$, β_{ij}, $\gamma_i^\pm$, s_j за відповідними змінними.

Далі для довільної функції F будемо використовувати позначення $\triangle_k F(k)$ для різниці $F(1) - F(2)$.

Теорема 1 (про локальну розв'язність). *Нехай виконуються такі умови:*

1) $\lambda_i^- \in \operatorname{Lip}(D^1_{T,U})$, $\lambda_i^+ \in \operatorname{Lip}(D^1_{T,U})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$;
2) $f_i^- \in C(D^1_{T,U}) \cap \operatorname{Lip}_{x,u}(D^1_{T,U})$, $f_i^+ \in C(D^1_{T,U}) \cap \operatorname{Lip}_{x,u}(D^1_{T,U})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$;
3) $g \in \operatorname{Lip}(D^2_{T,U,S})$;
4) $\alpha_i^- \in \operatorname{Lip}[s_1^0, s^0]$, $\alpha_i^+ \in \operatorname{Lip}[s^0, s_2^0]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$;
5) $\beta_{ij} \in \operatorname{Lip}[0, T]$, $j \in \{1, 2\}$, $i \in I_j$;
6) $\gamma_i^- \in \operatorname{Lip}(D^3_{T,U,S})$, $i \in I_-$, $\gamma_i^+ \in \operatorname{Lip}(D^3_{T,U,S})$, $i \in I_+$;
7) $s_j \in C^1[0, T]$, $s_j' \in \operatorname{Lip}[0, T]$, $j \in \{1, 2\}$;
8) $\delta > 0$;
9) $\alpha_i^-(s_1^0) = \beta_{i1}(0)$, $i \in I_1$, $\alpha_i^+(s_2^0) = \beta_{i2}(0)$, $i \in I_2$,

$$\alpha_i^-(s^0) = \gamma_i^-(s^0, 0, \tilde{\alpha}^\pm(s^0)), \;\; i \in I_-, \quad \alpha_i^+(s^0) = \gamma_i^+(s^0, 0, \tilde{\alpha}^\pm(s^0)), \;\; i \in I_+,$$

де $\tilde\alpha^{\pm}(s^0) = (\tilde\alpha^-(s^0), \tilde\alpha^+(s^0))$, $\tilde\alpha^-(s^0) = (\alpha_i^-(s^0)), i \in J_-$, $\tilde\alpha^+(s^0) = (\alpha_i^+(s^0)), i \in J_+$ *(умови погодження).*

Тоді на відрізку $[0, T_0]$ *існує єдиний локальний узагальнений розв'язок задачі (1)–(7), де значення* T_0 *визначено вихідними даними задачі.*

Доведення. Розглянемо метричний простір $(\mathcal{M}, \rho)$, де $\mathcal{M} = \mathcal{M}(T_0, L_x)$ — множина наборів функцій $(u^-, u^+, s) : u^- \in \left[C(\overline{D^{s-}_{T_0}})\right]^n, u^+ \in \left[C(\overline{D^{s+}_{T_0}})\right]^n, s \in C[0, T_0], 0 < T_0 \le T$, що задовольняють такі обмеження:

а) $s \in \operatorname{Lip}([0, T_0],\, S)$ та виконується умова (4);

б) $\max\left\{\max_{x\in\overline{D^{s-}_{T_0}}}|u^-(x,t)|, \max_{x\in\overline{D^{s+}_{T_0}}}|u^+(x,t)|\right\} \le U$ та виконується умова (5);

в) $u^- \in \left[\operatorname{Lip}(\overline{D^{s-}_{T_0}}, L_x, L_x\Lambda + F)\right]^n, u^+ \in \left[\operatorname{Lip}(\overline{D^{s+}_{T_0}}, L_x, L_x\Lambda + F)\right]^n, L_x \ge 1.$

Нехай $(u^{-1}, u^{+1}, s^1) \in \mathcal{M}$, $(u^{-2}, u^{+2}, s^2) \in \mathcal{M}$. Відстань між елементами простору $\mathcal{M}$ визначимо формулами

$$\rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)) = \max\left\{\max_{t\in[0,T_0]}|s^1(t) - s^2(t)|,\right.$$

$$\left.\max_{(x,t)\in\overline{D^{s^1-}_{T_0}\cup D^{s^2-}_{T_0}}}|\breve u^{-1}(x,t) - \breve u^{-2}(x,t)|, \quad \max_{(x,t)\in\overline{D^{s^1+}_{T_0}\cup D^{s^2+}_{T_0}}}|\breve u^{+1}(x,t) - \breve u^{+2}(x,t)|\right\}, \tag{10}$$

де

$$\breve u^-(x,t) = (\breve u_1^-(x,t), \ldots, \breve u_n^-(x,t)) = \begin{cases} u^-(x,t), & \text{якщо} \quad (x,t) \in \overline{D^{s-}_{T_0}}, \\ u^-(s(t),t), & \text{якщо} \quad (x,t) \in \overline{D^{s+}_{T_0}}, \end{cases}$$

$$\breve u^+(x,t) = (\breve u_1^+(x,t), \ldots, \breve u_n^+(x,t)) = \begin{cases} u^+(x,t), & \text{якщо} \quad (x,t) \in \overline{D^{s+}_{T_0}}, \\ u^+(s(t),t), & \text{якщо} \quad (x,t) \in \overline{D^{s-}_{T_0}}. \end{cases}$$

Нехай тепер $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M}$ — узагальнений розв'язок задачі (1)–(7), до того ж виконуються умови

$$\begin{gathered}\left|\frac{d}{d\tau}\,\varphi_i^-[u^-](\tau; s(t), t)\right|_{\tau=t} - s_1'(t)| \ge \delta, \quad \left|\frac{d}{d\tau}\,\varphi_i^+[u^+](\tau; s(t), t)\right|_{\tau=t} - s_2'(t)| \ge \delta, \\ \left|\frac{d}{d\tau}\,\varphi_i^-[u^-](\tau; s(t), t)\right|_{\tau=t} - s'(t)| \ge \delta, \quad \left|\frac{d}{d\tau}\,\varphi_i^+[u^+](\tau; s(t), t)\right|_{\tau=t} - s'(t)| \ge \delta, \\ i \in \{1, \ldots, n\}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad t \in [0, T_0].\end{gathered} \tag{11}$$

Тоді для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$ трійка функцій (u^-, u^+, s) задовольняє систему інтегро-операторних рівнянь

$$s(t) = s^0 + \int_0^t g(s(\tau), \tau, u^{\pm}(s(\tau), \tau))\, d\tau, \quad t \in [0, T_0],$$

$$u_i^-(x,t) = B_i^-[u^-,s](x,t) + \int\limits_{\chi_i^-[u^-,s](x,t)}^{t} f_i\left(\varphi_i^-[u^-](\tau;x,t),\tau,u^-(\varphi_i^-[u^-](\tau;x,t),\tau)\right)d\tau,$$
$$(x,t)\in\overline{D_{T_0}^{s-}}, \quad (12)$$

$$u_i^+(x,t) = B_i^+[u^+,s](x,t) + \int\limits_{\chi_i^+[u^+,s](x,t)}^{t} f_i\left(\varphi_i^+[u^+](\tau;x,t),\tau,u^+(\varphi_i^+[u^+](\tau;x,t),\tau)\right)d\tau,$$
$$(x,t)\in\overline{D_{T_0}^{s+}},$$

де B_i^- — оператор, що переводить пару (u^-,s) у функцію, визначену на $\overline{D_{T_0}^{s-}}$ згідно з формулою (використаємо позначення $\chi_i^{u-,s} \overset{\mathrm{df}}{=} \chi_i^-[u^-,s](x,t)$)

$$B_i^-[u^-,s](x,t) = \begin{cases} \alpha_i^-\left(\varphi_i^-[u^-](0;x,t)\right), \quad \text{якщо} \quad \chi_i^{u-,s}=0,\\ \beta_{i1}(\chi_i^{u-,s}), \quad \text{якщо} \quad \varphi_i^-[u^-](\chi_i^{u-,s};x,t)=s_1(\chi_i^{u-,s}),\\ \gamma_i^-\left(s(\chi_i^{u-,s}),\chi_i^{u-,s},\tilde u^{\pm}(s(\chi_i^{u-,s}),\chi_i^{u-,s})\right),\\ \qquad\qquad \text{якщо} \quad \varphi_i^-[u^-](\chi_i^{u-,s};x,t)=s(\chi_i^{u-,s}),\end{cases}$$

а оператор B_i^+ визначаємо аналогічно.

Правильним є й обернене твердження: достатньо гладкий розв'язок системи рівнянь (12), що задовольняє умови (11), є узагальненим розв'язком задачі (1)–(7).

Еквівалентність задачі (1)–(7) та системи інтегро-операторних рівнянь (12) дає змогу звести відшукання узагальненого розв'язку задачі до знаходження нерухомої точки оператора, визначеного правими частинами рівнянь системи (12).

На елементах простору $\mathcal{M}$ визначимо оператор $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}[u^-,u^+,s] = \left(\mathcal{A}^{u\pm}[u^\pm,s],\mathcal{A}^s[u^\pm,s]\right) = \left(\mathcal{A}^{u-}[u^-,s],\mathcal{A}^{u+}[u^+,s],\mathcal{A}^s[u^-,u^+,s]\right) =$$
$$= \left(\mathcal{A}_1^{u-}[u^-,s],\ldots,\mathcal{A}_n^{u-}[u^-,s],\mathcal{A}_1^{u+}[u^+,s],\ldots,\mathcal{A}_n^{u+}[u^+,s],\mathcal{A}^s[u^-,u^+,s]\right),$$

$$\mathcal{A}^s[u,s](t) = s^0 + \int\limits_0^t g(s(\tau),\tau,u^\pm(s(\tau),\tau))\,d\tau, \quad t\in[0,T_0],$$

$$\mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](x,t) = \mathcal{B}_i^-[u^-,s](x,t)+$$

$$+\int\limits_{\chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s],\mathcal{A}^s[u^\pm,s]](x,t)}^{t} f_i^-\left(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x,t),\tau)\right)d\tau,$$

$$(x,t)\in\overline{D_{T_0}^{A^s[u^\pm,s]-}},\quad i\in\{1,\ldots,n\},$$

де $\mathcal{B}_i^-$ — оператор, що переводить пару (u^-,s) у функцію, яка визначена на $\overline{D_{T_0}^{A^s[u^\pm,s]-}}$ згідно з формулою (використаємо позначення $\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \chi_i^-\left[\mathcal{P}^-[u^-,s],\mathcal{A}^s[u^\pm,s]\right](x,t)$)

$$\mathcal{B}_i^-[u^-,s](x,t) =$$

$$=\begin{cases}\alpha_i\left(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](0;x,t)\right), \quad \text{якщо} \quad \chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}=0,\\ \beta_{i1}\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}\right), \quad \text{якщо} \quad \varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]]\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s};x,t\right)=s_1\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}\right),\\ \gamma_i^-\left(\mathcal{A}^s[u^\pm,s]\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}\right),\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s},\widetilde{\mathcal{A}^{u\pm}}[u^\pm,s]\left(\mathcal{A}^s[u^\pm,s]\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}\right),\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}\right)\right),\\ \qquad\qquad \text{якщо} \quad \varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]]\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s};x,t\right)=\mathcal{A}^s[u^\pm,s]\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}\right),\end{cases}$$

а оператор $\mathcal{P}^-[u^-,s]=(\mathcal{P}_1^-[u^-,s],\ldots,\mathcal{P}_n^-[u^-,s])$ є звуженням $\breve{u}^-$ на $\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^\pm,s]-}}$:

$$\mathcal{P}^-[u^-,s](x,t)=\begin{cases}u^-(x,t), & \text{якщо} \quad (x,t)\in\overline{D_{T_0}^{s-}}\cap\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^\pm,s]-}},\\ u^-(s(t),t), & \text{якщо} \quad (x,t)\in\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^\pm,s]-}}\backslash\overline{D_{T_0}^{s-}}.\end{cases}$$

Оператор $\mathcal{A}^{u+}$ записуємо аналогічно до оператора $\mathcal{A}^{u-}$.

Для коректності визначення оператора $\mathcal{A}$ припускаємо виконання умов

$$\begin{gathered}\left|\frac{d}{d\tau}\,\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t)\right|_{\tau=t}-s_1'(t)|\geq\delta,\\ \left|\frac{d}{d\tau}\,\varphi_i^+[\mathcal{P}^+[u^+,s]](\tau;\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t)\right|_{\tau=t}-s_2'(t)|\geq\delta,\\ \left|\frac{d}{d\tau}\,\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t)\right|_{\tau=t}-\mathcal{A}^s[u^\pm,s]'(t)|\geq\delta,\\ \left|\frac{d}{d\tau}\,\varphi_i^+[\mathcal{P}^+[u^+,s]](\tau;\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t)\right|_{\tau=t}-\mathcal{A}^s[u^\pm,s]'(t)|\geq\delta,\\ (u^-,u^+,s)\in\mathcal{M},\quad i\in\{1,\ldots,n\},\quad t\in[0,T_0].\end{gathered}\tag{13}$$

Для спрощення міркувань запишемо обмеження на величину параметра T_0 :

$$T_0 \le T_0^1, \quad \text{де} \quad T_0^1 = \frac{\min\{s^0 - s_1^0, s_2^0 - s^0\}}{2\max\{S_0, S, \Lambda\}} = \frac{\min\{s^0 - s_1^0, s_2^0 - s^0\}}{C_1}. \tag{14}$$

Проаналізуємо можливі випадки. Якщо $\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s} = 0$, то значення $\mathcal{B}_i[u,s](x,t)$ вибираємо згідно з його першою альтернативою однозначно. Якщо ж $\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s} > 0$, то значення $\mathcal{B}_i[u,s](x,t)$ визначають за другою альтернативою через $\mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t)$, $i \in J_-$, та $\mathcal{A}_i^{u+}[u^+,s]$ $(\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t)$, $i \in J_+$, які, відповідно, виражають через значення $\mathcal{B}_i^-[u^-,s](\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t)$ та $\mathcal{B}_i^+[u^+,s](\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t)$, а останні, з урахуванням умови (13), (14) та обмеження а) простору $\mathcal{M}$ щодо функцій $\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t)$ (це твердження доведено нижче), обчислюють згідно з першою альтернативою цілком однозначно.

Наступний етап дослідження — встановлення обмежень на параметри простору $\mathcal{M}$, за яких існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ в цьому метричному просторі, яка й буде узагальненим розв'язком задачі (1) – (7). Для доведення існування та єдиності нерухомої точки оператора скористаємося теоремою Банаха про стискаючі відображення, а тому дослідимо, за яких умов оператор $\mathcal{A}$ переводить повний метричний простір $\mathcal{M}$ у себе і буде стискаючим, а також виконуються умови (13).

Перевіримо виконання обмеження а) простору $\mathcal{M}$ щодо функції $\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t)$. Нехай $(u^-,u^+,s) \in \mathcal{M}$, $t_k \in [0,T_0]$, $k \in \{1,2\}$. Доведемо виконання умови

$$\mathcal{A}^s[u^\pm,s] \in \mathrm{Lip}\,([0,T_0],\,S), \quad \text{або} \quad |\triangle_k \mathcal{A}^s[u^\pm,s](t_k)| \le S|\triangle_k t_k|. \tag{15}$$

З урахуванням оцінок
$$|s(t) - s^0| \le ST_0,$$
$$\max\left\{|u^-(s(t),t) - \alpha^-(s^0)|, |u^+(s(t),t) - \alpha^+(s^0)|\right\} \le L_x S T_0 + (L_x\Lambda + F)T_0$$
одержимо нерівність

$$|\triangle_k \mathcal{A}^s[u^\pm,s](t_k)| \le \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} |g(s(\tau),\tau,u^\pm(s(\tau),\tau))|\,d\tau\right| \le$$
$$\le \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} \big(|g(s(\tau),\tau,u^\pm(s(\tau),\tau)) - g(s^0,0,\alpha^\pm(s^0))| + |g(s^0,0,\alpha^\pm(s^0))|\big)\,d\tau\right| \le$$
$$\le \big(g_0 \max\{S, L_x(S+\Lambda) + F\}T_0 + |g(s^0,0,\alpha^\pm(s^0))|\big)\,|\triangle_k t_k| \le$$
$$\le ((C_2 + C_3 L_x)T_0 + |g(s^0,0,\alpha^\pm(s^0))|)|\triangle_k t_k|.$$

Отже, умова (15) виконується, якщо

$$(C_2 + C_3 L_x)T_0 \le 1, \quad \text{або} \quad T_0 \le T_0^2, \quad \text{де} \quad T_0^2 = \frac{1}{C_2 + C_3 L_x}.$$

Очевидним є виконання співвідношення

$$\mathcal{A}^s[u^\pm,s](0) = s^0.$$

Нехай $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M},\ t \in [0, T_0]$. Доведемо виконання умови (13). Враховуючи оцінки

$$|\mathcal{A}^s[u^\pm, s](t) - s^0| \le ST_0,$$

$$|\mathcal{P}^-[u^-, s](\mathcal{A}^s[u^\pm, s](t), t) - \alpha^-(s^0)| \le L_x ST_0 + (L_x\Lambda + F)T_0,$$

одержуємо нерівність

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{d}{d\tau}\,\varphi_i^-\ [\mathcal{P}^-[u^-, s]](\tau; \mathcal{A}^s[u^\pm, s](t), t)\big|_{\tau=t} - \mathcal{A}^s[u^\pm, s]'(t)\right| = \\
&= |\lambda_i^-(\mathcal{A}^s[u^\pm, s](t), t, \mathcal{P}^-[u^-, s](\mathcal{A}^s[u^\pm, s](t), t)) - g(s(t), t, u^\pm(s(t), t))| \ge \\
&\ge |\lambda_i^-(s^0, 0, \alpha^-(s^0)) - g(s^0, 0, \alpha^\pm(s^0))| - \\
&\quad - |\lambda_i^-(\mathcal{A}^s[u^\pm, s](t), t, \mathcal{P}^-[u^-, s](\mathcal{A}^s[u^\pm, s](t), t)) - \lambda_i^-(s^0, 0, \alpha^-(s^0))| - \\
&\quad - |g(s(t), t, u^\pm(s(t), t)) - g(s^0, 0, \alpha^\pm(s^0))| \ge \\
&\ge 2\delta - \lambda_0 \max\{S, L_x(S + \Lambda) + F\}T_0 - g_0 \max\{S, L_x(S + \Lambda) + F\}T_0 \ge \\
&\ge 2\delta - (C_4 + C_5 L_x)\, T_0.
\end{aligned}$$

Аналогічно встановлюємо нерівності

$$\left|\frac{d}{d\tau}\,\varphi_i^+\ [\mathcal{P}^+[u^+, s]](\tau; \mathcal{A}^s[u^\pm, s](t), t)\big|_{\tau=t} - \mathcal{A}^s[u^\pm, s]'(t)\right| \ge 2\delta - (C_4 + C_5 L_x)\, T_0,$$

$$\left|\frac{d}{d\tau}\,\varphi_i^-\ [\mathcal{P}^-[u^-, s]](\tau; \mathcal{A}^s[u^\pm, s](t), t)\big|_{\tau=t} - s_1'(t)\right| \ge 2\delta - (C_6 + C_7 L_x)\, T_0,$$

$$\left|\frac{d}{d\tau}\,\varphi_i^+\ [\mathcal{P}^+[u^+, s]](\tau; \mathcal{A}^s[u^\pm, s](t), t)\big|_{\tau=t} - s_2'(t)\right| \ge 2\delta - (C_6 + C_7 L_x)\, T_0.$$

Отже, умови (13) є правильними, якщо

$$(C_4 + C_5 L_x)\, T_0 \le \delta, \quad (C_6 + C_7 L_x)\, T_0 \le \delta,$$

або

$$T_0 \le T_0^3, \quad T_0 \le T_0^4, \quad \text{де} \quad T_0^3 = \frac{\delta}{C_4 + C_5 L_x}, \quad T_0^4 = \frac{\delta}{C_6 + C_7 L_x}.$$

Перевіримо виконання обмеження б) на елементи простору $\mathcal{M}$ щодо функцій $\mathcal{A}^{u\pm}[u^\pm, s](x, t)$.

Нехай $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M}$, $(x, t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]-}}$. Доведемо правильність співвідношення

$$|\mathcal{A}^{u-}[u^-, s](x, t)| \le U. \tag{16}$$

Розглянемо випадок, коли $\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s} = 0$. Тоді справджується оцінка

$$|\mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](x,t)| \le |\alpha_i^-(\varphi_i[\mathcal{P}^-[u^-,s]](0;x,t))| + \\ + \int_0^t |f_i^-(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x,t),\tau))|d\tau \le \\ \le \max_{x\in[s_1^0,s^0]} |\alpha^-(x)| + FT_0.$$

Нехай тепер $\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s};x,t) = s_1(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s})$, тоді, врахувавши умови погодження 9 теореми 1, одержимо нерівність

$$|\mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](x,t)| \le |\beta_{i1}(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}) - \beta_{i1}(0)| + |\alpha_i^-(s_1^0)| + \\ + \int_{\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}}^t |f_i^-(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x,t),\tau))|d\tau \le \\ \le |\alpha_i^-(s_1^0)| + (\beta_0 + F)\,T_0.$$

Встановимо допоміжну оцінку. З урахуванням припущення (14) справджуються співвідношення

$$\chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s],\mathcal{A}^s[u^\pm,s]](\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t) = 0, \quad i \in J_-,$$

$$\chi_i^+[\mathcal{P}^+[u^+,s],\mathcal{A}^s[u^\pm,s]](\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t) = 0, \quad i \in J_+,$$

і, як наслідок, маємо нерівність

$$|\mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t) - \alpha_i^-(s^0)| \le |\alpha_i^-(\varphi_i[\mathcal{P}^-[u^-,s]](0;\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t)) - \alpha_i^-(s^0)| + \\ + \int_0^t |f_i^-(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t),\tau))|\,d\tau \le \\ \le \alpha_0|\varphi_i[\mathcal{P}^-[u^-,s]](0;\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t)) - s^0| + FT_0 \le \alpha_0(S+\Lambda)T_0 + FT_0 = (C_8 + C_9\alpha_0)\,T_0.$$

Аналогічно одержуємо нерівність

$$|\mathcal{A}_i^{u+}[u^+,s](\mathcal{A}^s[u^\pm,s](t),t) - \alpha_i^+(s^0)| \le (C_8 + C_9\alpha_0)\,T_0.$$

Розглянемо тепер випадок, коли $\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s};x,t) = \mathcal{A}^s[u^\pm,s](\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s})$. Тоді виконується оцінка

$$|\mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](x,t)| \le |\gamma_i^-(\mathcal{A}^s[u^\pm,s](\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}),\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s},\widetilde{\mathcal{A}^{u\pm}}[u^\pm,s](\mathcal{A}^s[u^\pm,s](\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}),\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}))-$$
$$-\gamma_i^-(s^0,0,\tilde\alpha^\pm(s^0))| + |\alpha_i^-(s^0)| +$$
$$+\int\limits_{\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}}^{t} |f_i^-(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x,t),\tau))|\,d\tau \le$$
$$\le \gamma_0 \max\Big\{|\mathcal{A}^s[u^\pm,s](\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}) - s^0|, \chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s},$$
$$|\widetilde{\mathcal{A}^{u\pm}}[u^\pm,s](\mathcal{A}^s[u^\pm,s](\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}),\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}) - \tilde\alpha^\pm(s^0)|\Big\} +$$
$$+|\alpha_i^-(s^0) + \int\limits_{\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s}}^{t} |f_i^-(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x,t),\tau))|\,d\tau \le$$
$$\le |\alpha_i^-(s^0)| + \gamma_0 \max\{S, C_8 + C_9\alpha_0\}T_0 + FT_0.$$

Об’єднавши розглянуті випадки, запишемо загальну оцінку

$$|\mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](x,t)| \le \max_{x\in[s_1^0,s^0]} |\alpha^-(x)| + (C_{10} + C_{11}\alpha_0)\,T_0$$

і, як наслідок, отримаємо співвідношення (16) за умови

$$(C_{10} + C_{11}\alpha_0)\,T_0 \le 1, \quad \text{або} \quad T_0 \le T_0^5, \quad \text{де} \quad T_0^5 = \frac{1}{C_{10} + C_{11}\alpha_0}.$$

Аналогічно одержуємо оцінку

$$|\mathcal{A}^{u+}[u^+,s](x,t)| \le U, \quad (x,t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]+}}.$$

Безпосередньою підстановкою переконуємося, що справджуються рівності

$$\mathcal{A}^{u-}[u^-,s](x,0) = \alpha^-(x), \quad x \in [s_1^0, s^0],$$
$$\mathcal{A}^{u+}[u^+,s](x,0) = \alpha^+(x), \quad x \in [s^0, s_2^0].$$

Переконаємось у виконанні обмеження в) простору $\mathcal{M}$ щодо функцій $\mathcal{A}^{u\pm}[u^\pm,s](x,t)$.

Нехай $(u^-,u^+,s) \in \mathcal{M}, (x_k,t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]-}}$, $(x,t_k) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]-}}$, $k \in \{1,2\}$. Доведемо правильність умови

$$\mathcal{A}^{u-}[u^-,s] \in \left[\mathrm{Lip}\,(\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]-}}, L_x, L_x\Lambda + F)\right]^n,$$

або

$$|\triangle_k \mathcal{A}^{u-}[u^-, s](x_k, t)| \le L_x |\triangle_k x_k|, \tag{17}$$

$$|\triangle_k \mathcal{A}^{u-}[u^-, s](x, t_k)| \le (L_x \Lambda + F) |\triangle_k t_k|. \tag{18}$$

Запишемо тут і нижче кілька допоміжних оцінок у вигляді лем, доведення яких з незначними змінами можна знайти в [7].

Лема 1. *Нехай* $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M}$, $(x_k, t) \in \overline{D_{T_0}^{s-}}$, $k \in \{1, 2\}$. *Тоді правильною є оцінка*

$$|\triangle_k \varphi^-[u^-](\tau; x_k, t)| \le e^{\lambda_0 L_x T_0} |\triangle_k x_k|.$$

Із леми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай* $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M}$, $(x_k, t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]-}}$, $k \in \{1, 2\}$. *Тоді правильною є оцінка*

$$|\triangle_k \varphi^-[\mathcal{P}^-[u^-, s](\tau; x_k, t)| \le e^{\lambda_0 L_x T_0} |\triangle_k x_k|.$$

Зазначимо, що подібна оцінка справджується також для φ^+.

Лема 2. *Нехай* $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M}$, $(x_k, t) \in \overline{D_{T_0}^{s-}}$, $k \in \{1, 2\}$, *і виконується одна з умов*

$$\varphi_i^-[u^-](\chi_i^-[u^-, s](x_k, t); x_k, t) = s_1(\chi_i^-[u^-, s](x_k, t)), \quad k \in \{1, 2\},$$

або

$$\varphi_i^-[u^-](\chi_i^-[u^-, s](x_k, t); x_k, t) = s(\chi_i^-[u^-, s](x_k, t)), \quad k \in \{1, 2\},$$

а також виконуються умови (11) та

$$\lambda_0 L_x (S_0 + S + \Lambda) T_0 \le \frac{\delta}{2}. \tag{19}$$

Тоді правильною є оцінка

$$|\triangle_k \chi_i^-[u, s](x_k, t)| \le \frac{2}{\delta} e^{\lambda_0 L_x T_0} |\triangle_k x_k|, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Із леми 2 випливає такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M}$, $(x_k, t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]-}}$, $k \in \{1, 2\}$, *і виконується одна з умов*

$$\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-, s]] \left(\chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-, s], \mathcal{A}^s[u^\pm, s]](x_k, t); x_k, t\right) =$$
$$= s_1 \left(\chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-, s], \mathcal{A}^s[u^\pm, s]](x_k, t)\right), \quad k \in \{1, 2\},$$

або

$$\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]]\left(\chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s],\mathcal{A}^s[u^\pm,s]](x_k,t);x_k,t\right) = \\ = \mathcal{A}^s[u^\pm,s]\left(\chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s],\mathcal{A}^s[u^\pm,s]](x_k,t)\right), \quad k\in\{1,2\},$$

а також виконуються умови (13) та (19). Тоді правильною є оцінка

$$|\triangle_k\chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s],\mathcal{A}^s[u^\pm,s]](x_k,t)| \le \frac{2}{\delta}e^{\lambda_0 L_x T_0}|\triangle_k x_k|, \quad i\in\{1,\ldots,n\}.$$

Аналогічна оцінка виконується також і для χ_i^+.

Використавши наслідки 1 та 2, визначимо умови, за яких справджуються співвідношення (17), (18). Припустимо, що виконується обмеження

$$L_x T_0 \le 1, \tag{20}$$

та позначимо $\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k} \stackrel{\text{df}}{=} \chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s],\mathcal{A}^s[u^\pm,s]](x_k,t)$.

Знову розглянемо випадок, коли $\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k}=0$, $k\in\{1,2\}$. Тоді справджується оцінка

$$|\triangle_k\mathcal{A}_i^{u-}[u,s](x_k,t)| \le |\triangle_k\alpha_i(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](0;x_k,t))| + \\ + \int\limits_0^t |\triangle_k f_i^-(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_k,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_k,t),\tau))|\,d\tau \le \\ \le (\alpha_0+f_0L_xT_0)e^{\lambda_0L_xT_0}|\triangle_k x_k| \le (\alpha_0+f_0)e^{\lambda_0}|\triangle_k x_k| = (C_{12}+\alpha_0e^{\lambda_0})|\triangle_k x_k|.$$

Якщо ж $\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k};x_k,t)=s_1(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k})$, $k\in\{1,2\}$, то

$$|\triangle_k\mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](x_k,t)| \le |\triangle_k\beta_{i1}(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k})| + \\ + \left|\triangle_k \int\limits_{\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k}}^t f_i^-(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_k,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_k,t),\tau))\,d\tau\right| \le \\ \le (\beta_0+F)|\triangle_k\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k}| + f_0L_xT_0e^{\lambda_0L_xT_0}|\triangle_k x_k| \le \\ \le \left((\beta_0+F)\frac{2}{\delta}+f_0\right)e^{\lambda_0}|\triangle_k x_k|.$$

Для випадку $\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k};x_k,t) = \mathcal{A}^s[u^\pm,s](\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k})$, $k\in\{1,2\}$, одержуємо

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^{u-}[u^-, s](x_k, t)| \leq$$
$$\leq |\triangle_k \gamma_i^-(\mathcal{A}^s[u^\pm, s](\chi_i^{\mathcal{P}^-, \mathcal{A}^s, x_k}), \chi_i^{\mathcal{P}^-, \mathcal{A}^s, x_k}, \widetilde{\mathcal{A}^{u\pm}}[u^\pm, s](\mathcal{A}^s[u^\pm, s](\chi_i^{\mathcal{P}^-, \mathcal{A}^s, x_k}), \chi_i^{\mathcal{P}^-, \mathcal{A}^s, x_k}))|+$$
$$+\left|\triangle_k \int\limits_{\chi_i^{\mathcal{P}^-, \mathcal{A}^s, x_k}}^{t} f_i^-(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-, s]](\tau; x_k, t), \tau, \mathcal{P}^-[u^-, s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-, s]](\tau; x_k, t), \tau))\, d\tau\right| \leq$$
$$\leq (\gamma_0 \max\{S, (C_{12} + \alpha_0 e^{\lambda_0})(S + \Lambda) + F\} + F)|\triangle_k \chi_i^{\mathcal{P}, \mathcal{A}^s, x_k}| + f_0 L_x T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0}|\triangle_k x_k| \leq$$
$$\leq \left(\left(\gamma_0 \max\{S, (C_{12} + \alpha_0 e^{\lambda_0})(S + \Lambda) + F\} + F\right) \frac{2}{\delta} + f_0\right) e^{\lambda_0}|\triangle_k x_k|.$$

Решта випадків зводиться до розглянутих вище введенням проміжної точки.

Отже, об'єднавши всі можливі випадки, запишемо загальну оцінку

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^{u-}[u^-, s](x_k, t)| \leq (C_{13} + \max\{1, K\}\alpha_0 e^{2\lambda_0})|\triangle_k x_k|, \quad \text{де} \quad K = \frac{2\gamma_0}{\delta}(S + \Lambda).$$

Очевидно, що співвідношення (17) виконується за умови

$$L_x \geq L_x^1, \quad \text{де} \quad L_x^1 = C_{13} + \max\{1, K\}\alpha_0 e^{2\lambda_0},$$

і обмежень (19) та (20) на T_0, які запишемо у вигляді

$$T_0 \leq T_0^6, \quad \text{де} \quad T_0^6 = \frac{\delta}{C_{14} L_x}.$$

Переконаємось у правильності співвідношення (18). Нехай (для визначеності) $t_1 < t_2$. Тоді

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^{u-}[u^-, s](x, t_k)| \leq |\mathcal{A}_i^{u-}[u^-, s](x, t_2) - \mathcal{A}_i^{u-}[u^-, s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-, s]](t_1; x, t_2), t_1)|+$$
$$+ |\mathcal{A}_i^{u-}[u^-, s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-, s]](t_1; x, t_2), t_1) - \mathcal{A}_i^{u-}[u^-, s](x, t_1)| \leq$$
$$\leq \int\limits_{t_1}^{t_2} |f_i(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-, s]](\tau; x, t_2), \tau, \mathcal{P}^-[u^-, s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-, s]](\tau; x, t_2), \tau))|\, d\tau+$$
$$+ L_x|\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-, s]](t_1; x, t_2) - x| \leq (L_x\Lambda + F)|\triangle_k t_k|.$$

Аналогічно перевіряємо виконання умови

$$\mathcal{A}^{u+}[u^+, s] \in \left[\mathrm{Lip}\,(\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]+}}, L_x, L_x\Lambda + F)\right]^n.$$

Дослідимо тепер, що оператор $\mathcal{A}$ є оператором стиску. Нехай $(u^{-k}, u^{+k}, s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \in \{1, 2\}$. Визначимо коефіцієнт κ, для якого виконується співвідношення

$$\rho\left((\mathcal{A}^{u^{\pm}}[u^{\pm 1}, s^1], \mathcal{A}^s[u^{\pm 1}, s^1]), (\mathcal{A}^{u^{\pm}}[u^{\pm 2}, s^2], \mathcal{A}^s[u^{\pm 2}, s^2])\right) \le$$
$$\le \kappa\rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)),$$

що рівносильне сукупності нерівностей

$$|\triangle_k \mathcal{A}^s[u^{\pm k}, s^k](t)| \le \kappa\rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)), \quad t \in [0, T_0], \tag{21}$$

$$|\triangle_k \breve{\mathcal{A}}^{u-}[u^{-k}, s^k](x, t)| \le \kappa\rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)), \tag{22}$$
$$(x, t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm 1}, s^1]-}} \cup \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm 2}, s^2]-}},$$

$$|\triangle_k \breve{\mathcal{A}}^{u+}[u^{+k}, s^k](x, t)| \le \kappa\rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)), \tag{23}$$
$$(x, t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm 1}, s^1]+}} \cup \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm 2}, s^2]+}}.$$

Знову наведемо кілька допоміжних оцінок у вигляді лем для функцій із верхнім індексом $-$. Аналогічні оцінки будуть виконуватись і для відповідних функцій $\mathcal{P}^+$, φ^+, χ^+.

Лема 3. *Нехай* $(u^{-k}, u^{+k}, s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1, 2\}$, $(x, t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm 1}, s^1]-}} \cap \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm 2}, s^2]-}}$. *Тоді справджується оцінка*

$$|\triangle_k \mathcal{P}^-[u^{-k}, s^k](x, t)| \le \rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)).$$

Лема 4. *Нехай* $(u^{-k}, u^{+k}, s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1, 2\}$, $(x, t) \in \overline{D_{T_0}^{s^1-}} \cap \overline{D_{T_0}^{s^2-}}$. *Тоді правильною є оцінка*

$$|\triangle_k \varphi^-[u^{-k}](\tau; x, t)| \le \lambda_0 T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0} \rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)).$$

Наслідок 3. *Нехай* $(u^{-k}, u^{+k}, s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1, 2\}$, $(x, t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm 1}, s^1]-}} \cap \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm 2}, s^2]-}}$. *Тоді справджується оцінка*

$$|\triangle_k \varphi^-[\mathcal{P}^-[u^{-k}, s^k]](\tau; x, t)| \le \lambda_0 T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0} \rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)).$$

Лема 5. *Нехай* $(u^{-k}, u^{+k}, s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1, 2\}$, $(x, t) \in \overline{D_{T_0}^{s^1-}} \cap \overline{D_{T_0}^{s^2-}}$ *і виконується одна з умов*

$$\varphi_i^-[u^{-k}](\chi_i^-[u^{-k}, s^k](x, t); x, t) = s_1(\chi_i^-[u^{-k}, s^k](x, t)), \quad k \in \{1, 2\},$$

або

$$\varphi_i^-[u^{-k}](\chi_i^-[u^{-k}, s^k](x, t); x, t) = s(\chi_i^-[u^{-k}, s^k](x, t)), \quad k \in \{1, 2\},$$

а також виконуються умови (11) (для кожного набору (u^{-k}, u^{+k}, s^k), $k \in \{1,2\}$*) та (19). Тоді правильною є оцінка*

$$|\triangle_k \chi_i^-[u^{-k}, s^k](x,t)| \le \frac{2}{\delta}\,(\lambda_0 T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0} + 1)\rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)), \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Нехай (для визначеності) $s^1(t) \le s^2(t)$. Тоді одержуємо оцінку

$$|\triangle_k \mathcal{A}^s[u^{\pm k}, s^k](t)| \le \int\limits_0^t |\triangle_k g(s^k(\tau), \tau, u^{\pm k}(s^k(\tau), \tau))|\, d\tau \le$$

$$\le \int\limits_0^t g_0 \max\Big\{|\triangle_k s^k(\tau)|, |\triangle_k u^{-k}(s^k(\tau), \tau)|, |\triangle_k u^{+k}(s^k(\tau), \tau)|\Big\}\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t g_0 \max\Big\{|\triangle_k s^k(\tau)|, |\triangle_k \breve{u}^{-k}(s^2(\tau), \tau)|, |\triangle_k \breve{u}^{+k}(s^1(\tau), \tau)|\Big\}\, d\tau \le$$

$$\le g_0 T_0 \rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)).$$

На підставі отриманої вище оцінки запишемо наслідок з леми 5.

Наслідок 4. *Нехай* $(u^{-k}, u^{+k}, s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1,2\}$, $(x,t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm 1}, s^1]-}} \cap \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm 2}, s^2]-}}$, *виконується одна з умов*

$$\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k}, s^k]]\left(\chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k}, s^k], \mathcal{A}^s[u^{\pm k}, s^k]](x,t); x, t\right) =$$

$$= s_1\left(\chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k}, s^k], \mathcal{A}^s[u^{\pm k}, s^k]](x,t)\right), \quad k \in \{1,2\},$$

або

$$\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k}, s^k]]\left(\chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k}, s^k], \mathcal{A}^s[u^{\pm k}, s^k]](x,t); x, t\right) =$$

$$= \mathcal{A}^s[u^{\pm k}, s^k]\left(\chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k}, s^k], \mathcal{A}^s[u^{\pm k}, s^k]](x,t)\right), \quad k \in \{1,2\},$$

а також виконуються умови (13) (для кожного набору (u^{-k}, u^{+k}, s^k), $k \in \{1,2\}$*) та (19). Тоді справджується оцінка*

$$|\triangle_k \chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k}, s^k], \mathcal{A}^s[u^{\pm k}, s^k]](x,t)| \le$$

$$\le \frac{2}{\delta}\,(\lambda_0 e^{\lambda_0 L_x T_0} + g_0)\, T_0 \rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)), \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Використаємо наслідки 3 та 4 і визначимо коефіцієнт κ, для якого виконується співвідношення (22). Позначимо $\chi_i^{\mathcal{P}-, \mathcal{A}^s, u^k, s^k} \overset{\mathrm{df}}{=} \chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k}, s^k], \mathcal{A}^s[u^{\pm k}, s^k]](x,t)$ та зафіксуємо $(x,t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm 1}, s^1]-}} \cap \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm 2}, s^2]-}}$.

Розглянемо випадок, коли $\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,u^k,s^k} = 0$, $k \in \{1,2\}$. Тоді правильною є оцінка

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^{u-}[u^{-k},s^k](x,t)| \leq |\triangle_k \alpha_i^-(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k},s^k]](0;x,t))| +$$
$$+ \int_0^t |\triangle_k f_i^-(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k},s^k]](\tau;x,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^{-k},s^k](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k},s^k]](\tau;x,t),\tau))|\,d\tau \leq$$
$$\leq ((\alpha_0 + f_0 L_x T_0)\lambda_0 T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0} + f_0 T_0)\rho((u^{-1},u^{+1},s^1),(u^{-2},u^{+2},s^2)) \leq$$
$$\leq ((\alpha_0 + f_0)\lambda_0 e^{\lambda_0} + f_0)\, T_0 \rho((u^{-1},u^{+1},s^1),(u^{-2},u^{+2},s^2)) =$$
$$= (C_{15} + C_{16}\alpha_0) T_0 \rho((u^{-1},u^{+1},s^1),(u^{-2},u^{+2},s^2)).$$

Нехай у другому випадку $\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k},s^k]]\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,u^k,s^k};x,t\right) = s_1\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,u^k,s^k}\right)$, $k \in \in \{1,2\}$. Тоді одержуємо

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^{u-}[u^{-k},s^k](x,t)| \leq \left|\triangle_k \beta_{i1}\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,u^k,s^k}\right)\right| +$$
$$+ \left|\triangle_k \int_{\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,u^k,s^k}}^t f_i^-(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k},s^k]](\tau;x,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^{-k},s^k](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k},s^k]](\tau;x,t),\tau))\,d\tau\right| \leq$$
$$\leq (\beta_0 + F)\left|\triangle_k \chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,u^k,s^k}\right| + (f_0 L_x T_0 \lambda_0 T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0} + f_0 T_0)\rho((u^{-1},u^{+1},s^1),(u^{-2},u^{+2},s^2)) \leq$$
$$\leq \left((\beta_0 + F)\frac{2}{\delta}(\lambda_0 e^{\lambda_0} + g_0) + f_0(\lambda_0 e^{\lambda_0} + 1)\right) T_0 \rho((u^{-1},u^{+1},s^1),(u^{-2},u^{+2},s^2)).$$

Нехай тепер

$$\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k},s^k]]\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,u^k,s^k};x,t\right) = \mathcal{A}^s[u^{\pm k},s^k]\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,u^k,s^k}\right), \quad k \in \{1,2\}.$$

Тоді встановимо оцінку

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^{u-}[u^{-k},s^k](x,t)| \leq$$
$$\leq \left|\triangle_k \gamma_i^-(\mathcal{A}^s[u^{\pm k},s^k](\chi_i),\chi_i,\widetilde{\mathcal{A}^{u\pm}}[u^{\pm k},s^k](\mathcal{A}^s[u^{\pm k},s^k](\chi_i),\chi_i))_{\chi_i=\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,u^k,s^k}}\right| +$$
$$+ \left|\triangle_k \int_{\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,u^k,s^k}}^t f_i^-(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k},s^k]](\tau;x,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^{-k},s^k](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^{-k},s^k]](\tau;x,t),\tau))\,d\tau\right| \leq$$

$$\leq (\gamma_0 \max\{S, (C_{12} + \alpha_0 e^{\lambda_0})(S + \Lambda) + F\} + F)|\triangle_k \chi_i^{\mathcal{P}^-, \mathcal{A}^s, u^k, s^k}| +$$

$$+ (\gamma_0 L_x g_0 T_0 + \gamma_0 (C_{15} + C_{16}\alpha_0) T_0 + f_0 L_x T_0 \lambda_0 T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0} +$$

$$+ f_0 T_0)\rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)) \leq$$

$$\leq \Bigg((\gamma_0 \max\{S, (C_{12} + \alpha_0 e^{\lambda_0})(S + \Lambda) + F\} + F)\frac{2}{\delta}(\lambda_0 e^{\lambda_0} + g_0) +$$

$$+ \gamma_0 L_x g_0 + \gamma_0(C_{15} + C_{16}\alpha_0) + f_0 \lambda_0 e^{\lambda_0} + f_0 \Bigg) T_0 \rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)).$$

Решта випадків зводиться до розглянутих трьох.

Отже, об'єднавши розглянуті випадки, запишемо загальну оцінку

$$|\triangle_k \mathcal{A}_i^{u-}[u^{-k}, s^k](x,t)| \leq (C_{17} + C_{18}\alpha_0 + C_{19}L_x)T_0\rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)).$$

Зафіксуємо $(x,t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm1}, s^1]-}} \setminus \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm2}, s^2]-}}$. Тоді справедливою є оцінка

$$\begin{aligned}
|\triangle_k \breve{\mathcal{A}}_i^{u-}[u^{-k}, s^k](x,t)| &= |\mathcal{A}_i^{u-}[u^{-2}, s^2](\mathcal{A}^s[u^{\pm2}, s^2](t), t) - \mathcal{A}_i^{u-}[u^{-1}, s^1](x,t)| \leq \\
&\leq |\triangle_k \mathcal{A}_i^{u-}[u^{-k}, s^k](\mathcal{A}^s[u^{\pm2}, s^2](t), t)| + |\mathcal{A}_i^{u-}[u^{-1}, s^1](x,t) - \\
&\quad - \mathcal{A}_i^{u-}[u^{-1}, s^1](\mathcal{A}^s[u^{\pm2}, s^2](t), t)| \leq \\
&\leq |\triangle_k \mathcal{A}_i^{u-}[u^{-k}, s^k](\mathcal{A}^s[u^{\pm2}, s^2](t), t)| + L_x|\triangle_k \mathcal{A}^s[u^{\pm k}, s^k](t)| \leq \\
&\leq (C_{17} + C_{18}\alpha_0 + C_{19}L_x + L_x g_0)T_0\rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)).
\end{aligned}$$

З отриманих оцінок і виведемо співвідношення

$$|\triangle_k \breve{\mathcal{A}}_i^{u-}[u^{-k}, s^k](x,t)| \leq (C_{17} + C_{18}\alpha_0 + C_{20}L_x)T_0\rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)),$$
$$(x,t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm1}, s^1]-}} \cup \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm2}, s^2]-}}.$$

Аналогічно одержуємо оцінку

$$|\triangle_k \breve{\mathcal{A}}_i^{u+}[u^{+k}, s^k](x,t)| \leq (C_{17} + C_{18}\alpha_0 + C_{20}L_x)T_0\rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)),$$
$$(x,t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm1}, s^1]+}} \cup \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^{\pm2}, s^2]+}}.$$

У підсумку запишемо загальну оцінку

$$\begin{aligned}
&\rho\left((\mathcal{A}^{u^\pm}[u^{\pm1}, s^1], \mathcal{A}^s[u^{\pm1}, s^1]), (\mathcal{A}^{u^\pm}[u^{\pm2}, s^2], \mathcal{A}^s[u^{\pm2}, s^2])\right) \leq \\
&\qquad \leq \max\{g_0 T_0, (C_{17} + C_{18}\alpha_0 + C_{20}L_x)T_0\}\,\rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)) \leq \\
&\qquad \leq (C_{21} + C_{18}\alpha_0 + C_{20}L_x)T_0\rho((u^{-1}, u^{+1}, s^1), (u^{-2}, u^{+2}, s^2)),
\end{aligned}$$

з якої видно, що оператор $\mathcal{A}$ є стискаючим, коли

$$(C_{21} + C_{18}\alpha_0 + C_{20}L_x)\, T_0 < 1, \quad \text{або} \quad T_0 < T_0^7, \quad \text{де} \quad T_0^7 = \frac{1}{C_{21} + C_{18}\alpha_0 + C_{20}L_x}.$$

Зафіксуємо

$$L_x = L_x^*, \quad \text{де} \quad L_x^* \geq L_x^1. \tag{24}$$

Тоді значення $T_0^1, \ldots, T_0^7$ також стають фіксованими, після чого фіксуємо

$$T_0 = T_0^*, \quad \text{де} \quad T_0^* \leq \min\left\{T_0^1, T_0^2, T_0^3, T_0^4, T_0^5, T_0^6\right\}, \quad T_0^* < T_0^7. \tag{25}$$

Позначимо $\mathcal{M}^* \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{M}(T_0^*, L_x^*)$.

Отже, оператор $\mathcal{A}$ переводить метричний простір $\mathcal{M}^*$ у себе і є стискаючим на елементах цього простору. За теоремою Банаха про стискаючі відображення існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$, тобто набір функцій $(u^{-*}, u^{+*}, s^*) \in \mathcal{M}^*$, що задовольняє операторну рівність

$$\mathcal{A}[u^{-*}, u^{+*}, s^*] = (u^{-*}, u^{+*}, s^*)$$

або систему рівностей

$$\mathcal{A}^s[u^{\pm *}, s^*](t) = s^*(t), \quad t \in [0, T_0^*],$$

$$\mathcal{A}^{u-}[u^{-*}, s^*](x,t) = u^{-*}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D_{T_0^*}^{s^*-}},$$

$$\mathcal{A}^{u+}[u^{+*}, s^*](x,t) = u^{+*}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D_{T_0^*}^{s^*+}}.$$

Отриманий набір функцій є узагальненим розв'язком задачі (1)–(7), до того ж він єдиний у метричному просторі $\mathcal{M}^*$.

Доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)–(7) (без додаткової вимоги його належності простору $\mathcal{M}^*$). Нехай $(u^{-\circledast}, u^{+\circledast}, s^{\circledast})$ — інший узагальнений розв'язок задачі, визначений на відрізку $[0, T_0^*]$, до того ж $(u^{-*}, u^{+*}, s^*) \neq (u^{-\circledast}, u^{+\circledast}, s^{\circledast})$.

Якщо $s^*(t) = s^{\circledast}(t)$, $t \in [0, T_0^*]$, то покладемо $t_1 \stackrel{\text{df}}{=} T_0^*$, в іншому випадку визначимо $t_1 \stackrel{\text{df}}{=} \inf\{t \in [0, T_0^*] : s^*(t) \neq s^{\circledast}(t)\}$, тоді $s^*(t) = s^{\circledast}(t)$, $t \in [0, t_1]$.

Якщо $u^{-*}(x,t) = u^{-\circledast}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{D_{t_1}^{s^*-}}$, $u^{+*}(x,t) = u^{+\circledast}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{D_{t_1}^{s^*+}}$, то покладемо $t_2 \stackrel{\text{df}}{=} t_1$, в іншому випадку

$$t_2 \stackrel{\text{df}}{=} \inf\Big\{t_0 \in [0, t_1] : (u^{-*}(x,t) \neq u^{-\circledast}(x,t), (x,t) \in \overline{D_{t_0}^{s^*-}}) \vee$$
$$\vee\ (u^{+*}(x,t) \neq u^{+\circledast}(x,t), (x,t) \in \overline{D_{t_0}^{s^*+}})\Big\},$$

тоді

$$u^{-*}(x,t) = u^{-\circledast}(x,t), (x,t) \in \overline{D_{t_2}^{s^*-}}, \quad u^{+*}(x,t) = u^{+\circledast}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D_{t_2}^{s^*+}}.$$

Отже, на відрізку $[0, t_2]$ маємо рівність $(u^{-*}, u^{+*}, s^*) = (u^{-\circledast}, u^{+\circledast}, s^\circledast)$, до того ж для довільного $t_3 \in (t_2, T_0^*]$ на відрізку $[0, t_3]$ справджується нерівність

$$(u^{-*}, u^{+*}, s^*) \neq (u^{-\circledast}, u^{+\circledast}, s^\circledast).$$

Перенесемо початок координат у точку $(0, t_2)$ та приймемо за нові початкові дані значення розв'язку (u^{-*}, u^{+*}, s^*) при $t = t_2$. У підсумку отримаємо задачу вигляду (1)–(7) з вихідними даними, що задовольняють умови теореми 1. Згідно з доведеним вище існує єдиний узагальнений розв'язок цієї задачі у просторі $\mathcal{M}^{**} = \mathcal{M}(T_0^{**}, L_x^{**})$, де T_0^{**}, L_x^{**} — деякі фіксовані значення параметрів. Зазначимо, що відповідно до формули (24) значення L_x^{**} можна вибрати достатньо великими, щоб для функцій $u^{\pm *}, u^{\pm\circledast}$ виконувалось обмеження в) простору $\mathcal{M}^{**}$. Із оцінки (25) значення T_0^{**} можна вибрати достатньо малим, щоб для функцій s^*, $s^\circledast$ виконувалось обмеження а) простору $\mathcal{M}^{**}$ і функції $u^{\pm *}$, $u^{\pm\circledast}$ задовольняли обмеження б) цього простору. Отже, обидва узагальнені розв'язки даної задачі будуть належати простору $\mathcal{M}^{**}$. Отримали суперечність, а тому $(u^{-*}, u^{+*}, s^*) = (u^{-\circledast}, u^{+\circledast}, s^\circledast)$ на відрізку $[0, T_0^*]$.

Теорему 1 доведено.

5. Глобальна розв'язність задачі. Далі будемо припускати, що в умовах спряження (7) функції $\gamma_i^\mp$, $i \in I_\mp$, не залежать безпосередньо від $s(t)$, що на думку авторів не є суттєвим, але дещо технічно спрощує наступні міркування. Тому розглянемо задачу (1)–(6) з умовами спряження

$$\begin{aligned} u_i^-(s(t), t) &= \gamma_i^-(t, \tilde{u}^\pm(s(t), t)), \quad i \in I_-, \\ u_i^+(s(t), t) &= \gamma_i^+(t, \tilde{u}^\pm(s(t), t)), \quad i \in I_+. \end{aligned} \tag{26}$$

Визначимо достатні умови існування та єдиності глобального розв'язку задачі (1)–(6), (26).

Введемо позначення для монотонних характеристик функцій:

$F(x_1, \ldots, x_n) \nearrow (x_{k_1}, \ldots) \searrow (x_{k_2}, \ldots)$ — функція F не спадає за групою аргументів $(x_{k_1}, \ldots)$ і не зростає за групою аргументів $(x_{k_2}, \ldots)$.

Лема 6. *Нехай виконуються такі умови знакосталості та монотонності:*

(M_1) $f_i^- \geq 0, i \in I_1, f_i^- \leq 0, i \in I_- \cup J_-$,

$f_i^+ \leq 0, i \in I_2, f_i^+ \geq 0, i \in I_+ \cup J_+$;

(M_2) $\lambda_i^- \nearrow (x, u), \lambda_i^+ \nearrow (x, u), i \in \{1, \ldots, n\}$;

(M_3) $f_i^- \nearrow (x, u), f_i^+ \nearrow (x, u), i \in \{1, \ldots, n\}$;

(M_4) $\alpha_i^- \nearrow (x), \alpha_i^+ \nearrow (x), i \in \{1, \ldots, n\}$;

(M_5) $\beta_{i1} \searrow (t), i \in I_1, \beta_{i2} \nearrow (t), i \in I_2$;

(M_6) $\gamma_i^- \nearrow (t, \tilde{u}^+) \searrow (\tilde{u}^-), i \in I_-, \gamma_i^+ \nearrow (\tilde{u}^-) \searrow (t, \tilde{u}^+), i \in I_+$.

Тоді якщо $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M}$, $u^- \nearrow (x)$, $u^+ \nearrow (x)$, *то* $A^{u-}[u-, s] \nearrow (x)$, $A^{u+}[u+, s] \nearrow$ $\nearrow (x)$.

Доведення. Нехай $(x_k, t) \in \overline{D_{T_0}^{A^s[u^\pm, s]-}}$, $k \in \{1, 2\}$, $x_1 \leq x_2$. Введемо позначення $\chi_i^{\mathcal{P}-, \mathcal{A}^s, x_k} \stackrel{\text{df}}{=} \chi_i^-\left[\mathcal{P}^-[u^-, s], \mathcal{A}^s[u^\pm, s]\right](x_k, t)$, $\mathcal{A}^s(t) \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{A}^s[u^\pm, s](t)$. Розглянемо можливі випадки.

Нехай $\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k} = 0$, $k \in \{1,2\}$, тоді справджуються оцінки

$$\mathcal{P}^-[u^-,s](x_1,t) \le \mathcal{P}^-[u^-,s](x_2,t),$$

$$\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_1,t) \le \varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_2,t),$$

а тому

$$\alpha_i\left(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](0;x_1,t)\right) \le \alpha_i\left(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](0;x_2,t)\right),$$

$$\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_1,t),\tau) \le \mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_2,t),\tau),$$

$$f_i^-\left(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_1,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_1,t),\tau)\right) \le$$
$$\le f_i^-\left(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_2,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_2,t),\tau)\right).$$

Отже, у цьому випадку

$$\mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](x_1,t) \le \mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](x_2,t).$$

Нехай

$$\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k};x_k,t) = s_1(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k}), \quad k \in \{1,2\},$$

тоді $\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_1} \ge \chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_2}$, а тому $\beta_{i1}\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_1}\right) \le \beta_{i1}\left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_2}\right)$. Оскільки $f_i^- \ge 0$, $i \in I_1$, то отримуємо нерівність

$$\int\limits_{\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_1}}^{t} f_i^-\left(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_1,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_1,t),\tau)\right)d\tau \le$$

$$\le \int\limits_{\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_2}}^{t} f_i^-\left(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_2,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_2,t),\tau)\right)d\tau.$$

Для цього випадку також

$$\mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](x_1,t) \le \mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](x_2,t).$$

Нехай тепер $t_1 \le t_2$, $i \in J_-$, до того ж, враховуючи обмеження (13), (14), маємо

$$\chi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s],\mathcal{A}^s[u^\pm,s]](\mathcal{A}^s(t_k),t_k) = 0, \quad k \in \{1,2\}.$$

Оскільки $f_i^- \le 0$, $i \in J_-$, а також

$$\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;\mathcal{A}^s(t_1),t_1) \ge \varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;\mathcal{A}^s(t_2),t_2),$$

то справджується нерівність

$$\int_0^{t_1} f_i^- \left(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;\mathcal{A}^s(t_1),t_1),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;\mathcal{A}^s(t_1),t_1),\tau)\right)d\tau \geq$$

$$\geq \int_0^{t_2} f_i^- \left(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;\mathcal{A}^s(t_2),t_2),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;\mathcal{A}^s(t_2),t_2),\tau)\right)d\tau.$$

Звідси

$$\mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](\mathcal{A}^s(t_1),t_1) \geq \mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](\mathcal{A}^s(t_2),t_2), \quad i \in J_-.$$

Аналогічно встановлюємо нерівність

$$\mathcal{A}_i^{u+}[u^+,s](\mathcal{A}^s(t_1),t_1) \leq \mathcal{A}_i^{u+}[u^+,s](\mathcal{A}^s(t_2),t_2), \quad i \in J_+.$$

Нехай тепер $\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k};x_k,t) = \mathcal{A}^s(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_k})$, $k \in \{1,2\}$. Тоді $\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_1} \leq \leq \chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_2}$, а тому, враховуючи монотонні властивості γ_i^-, а також $f_i^- \leq 0$, $i \in I_-$, одержуємо

$$\gamma_i^- \left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_1}, \widetilde{\mathcal{A}^{u\pm}}[u^\pm,s]\left(\mathcal{A}^s(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_1}),\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_1}\right)\right) \leq$$

$$\leq \gamma_i^- \left(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_2}, \widetilde{\mathcal{A}^{u\pm}}[u^\pm,s]\left(\mathcal{A}^s(\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_2}),\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_2}\right)\right),$$

$$\int_{\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_1}}^{t} f_i^- \left(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_1,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_1,t),\tau)\right)d\tau \leq$$

$$\leq \int_{\chi_i^{\mathcal{P}-,\mathcal{A}^s,x_2}}^{t} f_i^- \left(\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_2,t),\tau,\mathcal{P}^-[u^-,s](\varphi_i^-[\mathcal{P}^-[u^-,s]](\tau;x_2,t),\tau)\right)d\tau.$$

Отже, у цьому випадку, як і в попередніх двох,

$$\mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](x_1,t) \leq \mathcal{A}_i^{u-}[u^-,s](x_2,t).$$

Інші випадки зводяться до розглянутих.

Лему 6 доведено.

Лема 7. *Нехай виконуються умови монотонності* (M_2) *леми 6 та* $u^- \nearrow (x)$, $u^+ \nearrow (x)$. *Тоді якщо* $x_1 \leq x_2$, *то*

$$(\varphi^-[u^-](\tau;x_2,t) - \varphi^-[u^-](\tau;x_1,t)) \nearrow (\tau), \quad (\varphi^+[u^+](\tau;x_2,t) - \varphi^+[u^+](\tau;x_1,t)) \nearrow (\tau).$$

Доведення леми 7 є очевидним.

Наслідок 5. *Якщо виконуються умови леми 7, то справджуються оцінки*

$$|\triangle_k \varphi^-[u^-](\tau; x_k, t)| \le |\triangle_k x_k|, \quad |\triangle_k \varphi^+[u^+](\tau; x_k, t)| \le |\triangle_k x_k|.$$

Визначимо $D_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le t \le T, s_1(t) \le x \le s_2(t)\}$ і для довільних $x \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y \in \mathbb{R}^{N_2}$ через $|x,y|$ позначимо максимум норм $|x|$, $|y|$.

Теорема 2 (про глобальну розв'язність). *Нехай виконуються умови:*
1) $\lambda_i^- \in \mathrm{Lip_{loc}}(D_T \times \mathbb{R}^n)$, $\lambda_i^+ \in \mathrm{Lip_{loc}}(D_T \times \mathbb{R}^n)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$;
2) $f_i^- \in C(D_T \times \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{x,u,\mathrm{loc}}(D_T \times \mathbb{R}^n)$,
$f_i^+ \in C(D_T \times \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{x,u,\mathrm{loc}}(D_T \times \mathbb{R}^n)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$;
3) $g \in \mathrm{Lip_{loc}}(\mathbb{R} \times [0,T] \times \mathbb{R}^{2n})$;
4) $\alpha_i^- \in \mathrm{Lip}\,[s_1^0, s^0]$, $\alpha_i^+ \in \mathrm{Lip}\,[s^0, s_2^0]$, $i \in \{1,\ldots,n\}$;
5) $\beta_{ij} \in \mathrm{Lip}[0,T]$, $j \in \{1,2\}$, $i \in I_j$;
6) $\gamma_i^- \in \mathrm{Lip_{loc}}([0,T] \times \mathbb{R}^{k_- + k_+})$, $i \in I_-$, $\gamma_i^+ \in \mathrm{Lip_{loc}}([0,T] \times \mathbb{R}^{k_- + k_+})$, $i \in I_+$;
7) $s_j \in C^1[0,T]$, $s_j' \in \mathrm{Lip}\,[0,T]$, $j \in \{1,2\}$;
8) погодження (10) (з урахуванням (26));
9) знакосталості та монотонності (M_1) – (M_6) *леми 6;*
10) обмеження на зростання вихідних даних:
(G_1) $|f^-(x,t,u), f^+(x,t,u)| \le f_1(1 + |x,u|)$;
(G_2) $|g(s,t,u^\pm)| \le g_1(1 + |s,u^\pm|)$;
(G_3) $|\gamma^-(t,\tilde{u}^\pm), \gamma^+(t,\tilde{u}^\pm)| \le \gamma_1(1 + |\tilde{u}^\pm|)$;
11) $(\lambda_i^- - s_1')\,(\lambda_i^+ - s_2')(\lambda_i^- - g)\,(\lambda_i^+ - g) \ne 0$, $i \in \{1,\ldots,n\}$;
12) $s_1(t) + \mathcal{S}t < s^0 < s_2(t) - \mathcal{S}t$;
13) $\gamma_1 < 1$, $\mathcal{K} \le 1$;
(сталі $\mathbf{S}$ *і* $\mathcal{K}$ *визначені вихідними даними задачі та наведені нижче).*
Тоді існує єдиний глобальний узагальнений розв'язок задачі (1) – (6), (26), який визначено на відрізку $[0,T]$.

Доведення. Розглянемо метричний простір $(\mathfrak{M}, \rho)$, де $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(T_0, L_x)$ — множина наборів функцій $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M}(T_0, L_x)$ таких, що

г) $u^- \nearrow (x)$, $u^+ \nearrow (x)$.

На елементах простору $\mathfrak{M}$ розглянемо оператор, який також позначимо через $\mathcal{A}$, хоча тепер потрібно врахувати незначні зміни для його визначення, пов'язані зі спрощенням умов спряження (26).

Позначимо $\mathfrak{M}^* \overset{\mathrm{df}}{=} \mathfrak{M}(T_0^*, L_x^*)$, де

$$L_x^* \ge C_{13} + \max\{1, K\}\alpha_0 e^{2\lambda_0}, \quad T_0^* \le \frac{\min\{s^0 - s_1^0, s_2^0 - s^0, 1, \delta\}}{C_{22} + C_{23}\alpha_0 + C_{24}L_x^*}, \tag{27}$$

Тут сталі C_{22}, C_{23}, C_{24} виражені через сталі C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_{10}, C_{11}, C_{14}, C_{18}, C_{20}, C_{21}. На підставі леми 6 стверджуємо, що оператор $\mathcal{A}$ переводить метричний простір $\mathfrak{M}^*$ у себе і є стискаючим на елементах цього простору. Отже, за теоремою Банаха про стискаючі відображення існує єдина нерухома точка $(u^{-*}, u^{+*}, s^*) \in \mathfrak{M}^*$ оператора $\mathcal{A}$, а отриманий набір функцій є узагальненим розв'язком задачі (1) – (6), (26).

Використаємо обмеження 10 теореми 2 на зростання вихідних функцій і встановимо обмеження на поведінку розв'язку (u^{-*}, u^{+*}, s^*). Позначимо

$$S_1 \overset{\text{df}}{=} \max_{t\in[0,T]} |s_1(t), s_2(t)|, \quad \alpha_1 \overset{\text{df}}{=} \max\left\{ \max_{x\in[s_1^0,s^0]} |\alpha^-(x)|, \max_{x\in[s^0,s_2^0]} |\alpha^+(x)| \right\},$$

$$\beta_1 \overset{\text{df}}{=} \max_{t\in[0,T]} |\beta(t)|, \quad \beta = (\beta_{ij}), \quad j \in \{1,2\}, \quad i \in I_j,$$

$$\mathfrak{U}^-(\tau) \overset{\text{df}}{=} \max_{(x,t)\in\overline{D_\tau^{s^*-}}} |u^{-*}(x,t)|, \quad \mathfrak{U}^+(\tau) \overset{\text{df}}{=} \max_{(x,t)\in\overline{D_\tau^{s^*+}}} |u^{+*}(x,t)|,$$

$$\mathfrak{S}(\tau) \overset{\text{df}}{=} \max_{t\in[0,\tau]} |s^*(t)|, \quad \mathfrak{U}\mathfrak{S}(\tau) \overset{\text{df}}{=} \max\{\mathfrak{U}^-(\tau), \mathfrak{U}^+(\tau), \mathfrak{S}(\tau)\}.$$

Оскільки узагальнений розв'язок задачі (1) – (6), (26) задовольняє систему інтегро-операторних рівнянь (12), то звідси отримуємо нерівності

$$|s^*(t)| \le |s^0| + \int_0^t g_1(1 + |s^*(\tau), u^{\pm*}(s^*(\tau),\tau)|)d\tau, \quad t \in [0, T_0^*],$$

$$|u_i^{-*}(x,t)| \le \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1(1 + |\tilde{u}^{\pm*}(s^*(\chi_i^{u^*-,s^*}), \chi_i^{u^*-,s^*})|) +$$
$$+ \int_{\chi_i^-[u^{-*},s^*](x,t)}^t f_1(1 + |\varphi_i^-[u^{-*}](\tau;x,t), u^{-*}(\varphi_i^-[u^{-*}](\tau;x,t),\tau)|)d\tau, \ \ (x,t) \in \overline{D_{T_0^*}^{s*-}},$$

$$|u_i^{+*}(x,t)| \le \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1(1 + |\tilde{u}^{\pm*}(s^*(\chi_i^{u^*+,s^*}), \chi_i^{u^*+,s^*})|) +$$
$$+ \int_{\chi_i^+[u^{+*},s^*](x,t)}^t f_1(1 + |\varphi_i^+[u^{+*}](\tau;x,t), u^{+*}(\varphi_i^+[u^{+*}](\tau;x,t),\tau)|)d\tau, \ \ (x,t) \in \overline{D_{T_0^*}^{s*+}},$$

і, як наслідок, для всіх $t \in [0, T_0^*]$ справджуються нерівності

$$\mathfrak{S}(t) \le |s^0| + \int_0^t g_1(1 + |\mathfrak{S}(\tau), \mathfrak{U}^-(\tau), \mathfrak{U}^+(\tau)|)d\tau,$$

$$\mathfrak{U}^-(t) \le \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1(1 + |\mathfrak{U}^-(t), \mathfrak{U}^+(t)|) + \int_0^t f_1(1 + S_1 + |\mathfrak{S}(\tau), \mathfrak{U}^-(\tau)|)d\tau,$$

$$\mathfrak{U}^+(t) \le \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1(1 + |\mathfrak{U}^-(t), \mathfrak{U}^+(t)|) + \int\limits_0^t f_1(1 + S_1 + |\mathfrak{S}(\tau), \mathfrak{U}^+(\tau)|)d\tau.$$

У підсумку маємо

$$\mathfrak{S}(t) \le |s^0| + \int\limits_0^t g_1(1 + \mathfrak{U}\mathfrak{S}(\tau))d\tau,$$

$$|\mathfrak{U}^-(t), \mathfrak{U}^+(t)| \le \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1(1 + |\mathfrak{U}^-(t), \mathfrak{U}^+(t)|) + \int\limits_0^t f_1(1 + S_1 + \mathfrak{U}\mathfrak{S}(\tau))d\tau.$$

Останню нерівність перепишемо у вигляді

$$|\mathfrak{U}^-(t), \mathfrak{U}^+(t)| \le \frac{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1}{1 - \gamma_1} + \frac{1}{1 - \gamma_1} \int\limits_0^t f_1(1 + S_1 + \mathfrak{U}\mathfrak{S}(\tau))\, d\tau.$$

Позначимо

$$\mathfrak{C}_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \max\left\{|s^0| + g_1 T, \frac{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + f_1(1 + S_1)T}{1 - \gamma_1}\right\},$$

$$\mathfrak{C}_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \max\left\{g_1, \frac{f_1}{1 - \gamma_1}\right\}.$$

Об'єднуючи отримані нерівності, маємо

$$\mathfrak{U}\mathfrak{S}(t) \le \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 \int\limits_0^t \mathfrak{U}\mathfrak{S}(\tau)\, d\tau,$$

звідки на підставі леми Гронуолла – Беллмана отримуємо обмеження

$$\mathfrak{U}\mathfrak{S}(t) \le \mathfrak{C}_1 e^{\mathfrak{C}_2 T}, \quad t \in [0, T_0^*].$$

Позначимо

$$\mathfrak{C}_3 \overset{\mathrm{df}}{=} \mathfrak{C}_1 e^{\mathfrak{C}_2 T}, \quad \mathcal{U} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathfrak{C}_3 + 1, \quad \mathcal{S} \overset{\mathrm{df}}{=} \max_{t\in[0,T], |s, u^\pm| \le \mathfrak{C}_3} |g(s, t, u^\pm)| + 1.$$

Визначимо такі множини:

$$D^1_{T,\mathcal{U}} = \{(x, t, u) \in \mathbb{R}^{n+2} : 0 \le t \le T, s_1(t) \le x \le s_2(t), |u| \le \mathcal{U}\},$$

$$D^2_{T,\mathcal{U},\mathcal{S}} = \{(s, t, u^\pm) \in \mathbb{R}^{2n+2} : 0 \le t \le T, s^0 - \mathcal{S}t \le s \le s^0 + \mathcal{S}t, |u^\pm| \le \mathcal{U}\},$$

$$D^3_{T,\mathcal{U}} = \{(t, \tilde{u}^\pm) \in \mathbb{R}^{k_- + k_+ + 1} : 0 \le t \le T, |\tilde{u}^\pm| \le \mathcal{U}\}.$$

Введемо інші позначення:

$$\mathfrak{H} = \max_{(x,t,u)\in D^1_{T,\mathcal{U}}} |\lambda^{\pm}(x,t,u)|, \quad \mathfrak{F} = \max_{(x,t,u)\in D^1_{T,\mathcal{U}}} |f^{\pm}(x,t,u)|,$$

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{2} \min_{\substack{i\in\{1,\dots,n\},t\in[0,T],\\ (x,t,u)\in D^1_{T,\mathcal{U}},(s,t,u^{\pm})\in D^2_{T,\mathcal{U},\mathcal{S}}}} \big\{|\lambda_i^-(x,t,u) - s_1'(t)|, |\lambda_i^+(x,t,u) - s_2'(t)|,$$

$$|\lambda_i^-(x,t,u) - g(s,t,u^{\pm})|, |\lambda_i^+(x,t,u) - g(s,t,u^{\pm})|\big\},$$

і нехай сталі $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{f}_0$, $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{z}_0$ визначено з умов

$\lambda_i^- \in \mathrm{Lip}\,(D^1_{T,\mathcal{U}}, \mathfrak{h}_0)$, $\lambda_i^+ \in \mathrm{Lip}\,(D^1_{T,\mathcal{U}},\ \mathfrak{h}_0)$, $i \in \{1,\dots,n\}$,

$f_i^- \in \mathrm{Lip}_{x,u}(D^1_{T,\mathcal{U}}, \mathfrak{f}_0)$, $f_i^+ \in \mathrm{Lip}_{x,u}(D^1_{T,\mathcal{U}},\ \mathfrak{f}_0)$, $i \in \{1,\dots,n\}$,

$g \in \mathrm{Lip}\,(D^2_{T,\mathcal{U},\mathcal{S}},\ \mathfrak{g}_0)$,

$\gamma_i^- \in \mathrm{Lip}\,(D^3_{T,\mathcal{U}},\ \mathfrak{z}_0)$, $i \in I_-$, $\gamma_i^+ \in \mathrm{Lip}\,(D^3_{T,\mathcal{U}},\ \mathfrak{z}_0)$, $i \in I_+$.

Згідно з умовою 11 теореми 2 маємо $\mathfrak{d} > 0$. Позначимо

$$\mathcal{K} = \frac{2\mathfrak{z}_0}{\mathfrak{d}}(\mathcal{S} + \mathfrak{H}),$$

і нехай сталі $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_{24}$ визначено через сталі $\mathfrak{H},\mathfrak{F},\mathcal{S},\mathfrak{d},\mathfrak{h}_0,\mathfrak{f}_0,\mathfrak{g}_0,\beta_0,\mathfrak{z}_0,S_0$ за тими ж формулами, що й сталі $C_1,\dots,C_{24}$ через Λ, F, S, δ, λ_0, f_0, g_0, β_0, γ_0, S_0. Зазначимо, що $C_i \le \mathcal{C}_i$, $i \in \{1,\dots,24\}$.

Використаємо обмеження 13 теореми 2 і замінимо нерівності (27) сильнішими співвідношеннями

$$L_x^* \ge \mathcal{C}_{13} + \alpha_0 e^{2\lambda_0}, \tag{28}$$

$$T_0^* \le \frac{\min_{t\in[0,T]}\{s^0 - s_1(t) - \mathcal{S}t, s_2(t) - s^0 - \mathcal{S}t, 1, \mathfrak{d}\}}{\mathcal{C}_{22} + \mathcal{C}_{23}\alpha_0 + \mathcal{C}_{24}L_x^*}. \tag{29}$$

Позначимо

$$\mathfrak{m} \overset{\mathrm{df}}{=} \min_{t\in[0,T]} \left\{s^0 - s_1(t) - \mathcal{S}t, s_2(t) - s^0 - \mathcal{S}t, 1, \mathfrak{d}\right\}.$$

Відповідно до умови 12 теореми 2 маємо $\mathfrak{m} > 0$. Зазначимо, що умови теореми 2 та обмеження г) простору $\mathfrak{M}$ дають змогу скористатися для оцінки $\triangle_k\varphi$ наслідком 5 замість наслідку 1, що спрощує нерівність (28) до вигляду

$$L_x^* \ge \mathcal{C}_{13} + \alpha_0.$$

Замінимо цю нерівність рівністю та підставимо у співвідношення (29). Тоді одержимо

$$T_0^* \le \frac{\mathfrak{m}}{\mathcal{C}_{22} + \mathcal{C}_{23}\alpha_0 + \mathcal{C}_{24}(\mathcal{C}_{13} + \alpha_0)} = \frac{1}{\mathcal{C}_{25} + \mathcal{C}_{26}\alpha_0}.$$

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $\alpha_0 \geq 1$, і посилимо останню нерівність через

$$T_0^* \leq \frac{1}{(\mathcal{C}_{25}+\mathcal{C}_{26})\alpha_0},$$

яку також замінимо рівністю.

Отже, одержимо остаточні значення параметрів L_x, T_0 :

$$L_x^* = \mathcal{C}_{13}+\alpha_0, \quad T_0^* = \frac{1}{\mathcal{C}_{27}\alpha_0}.$$

Продовжимо отриманий узагальнений розв'язок (u^{-*}, u^{+*}, s^*) у напрямку зростання змінної t, для чого розглянемо задачу (1) – (3), (6), (26) при $t \geq T_0^*$ з початковими умовами

$$s(T_0^*) = s^*(T_0^*),$$

$$u^-(x,T_0^*) = u^{-*}(x,T_0^*), \quad x \in [s_1(T_0^*), s^*(T_0^*)],$$

$$u^+(x,T_0^*) = u^{+*}(x,T_0^*), \quad x \in [s^*(T_0^*), s_2(T_0^*)].$$

Заміна змінної $\tilde{t} = t - T_0^*$ зводить цю задачу до задачі вигляду (1) – (6), (26), вихідні дані якої задовольняють достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку $(u^{-**}, u^{+**}, s^{**}) \in \mathfrak{M}^{**} = \mathfrak{M}(T_0^{**}, L_x^{**})$, де

$$L_x^{**} = \mathcal{C}_{13}+L_x^*, \quad T_0^{**} = \frac{1}{\mathcal{C}_{27}L_x^*},$$

до того ж

$$|u^{-**}(x,\tilde{t})| \leq \mathfrak{C}_3, \ (x,\tilde{t}) \in \overline{D_{T_0^{**}}^{s^{**}-}},$$

$$|u^{+**}(x,\tilde{t})| \leq \mathfrak{C}_3, \ (x,\tilde{t}) \in \overline{D_{T_0^{**}}^{s^{**}+}},$$

$$|s^{**}(\tilde{t})| \leq \mathfrak{C}_3, \ \tilde{t} \in [0, T_0^{**}].$$

Отже, отримано розв'язок (u^{-*}, u^{+*}, s^*) задачі (1) – (6), (26), визначений на часовому проміжку $[0, T_0^* + T_0^{**}]$. Цей розв'язок можна знову продовжити в напрямку зростання змінної t, причому можливі два варіанти: за скінченну кількість кроків ми досягнемо лінії $t = T$, або ж цей процес триватиме нескінченно без досягнення лінії $t = T$.

Нехай тепер маємо узагальнений розв'язок (u^{-*}, u^{+*}, s^*) задачі (1) – (6), (26), визначений на часовому проміжку $[0, T_0^* + T_0^{**} + \ldots + T_0^{\mathcal{N}-1}]$. Продовжимо цей розв'язок у напрямку зростання змінної t, розглянувши задачу (1) – (3), (6), (26), при $t \geq T_0^* + T_0^{**} + \ldots + T_0^{\mathcal{N}-1}$ з початковими умовами

$$s(T_0^* + T_0^{**} + \ldots + T_0^{\mathcal{N}-1}) = s^*(T_0^* + T_0^{**} + \ldots + T_0^{\mathcal{N}-1}),$$

$$u^-(x, T_0^* + T_0^{**} + \ldots + T_0^{\mathcal{N}-1}) = u^{-*}(x, T_0^* + T_0^{**} + \ldots + T_0^{\mathcal{N}-1}),$$

$$x \in [s_1(T_0^* + T_0^{**} + \ldots + T_0^{\mathcal{N}-1}), s^*(T_0^* + T_0^{**} + \ldots + T_0^{\mathcal{N}-1})],$$

$$u^+(x, T_0^* + T_0^{**} + \ldots + T_0^{\mathcal{N}-1}) = u^{+*}(x, T_0^* + T_0^{**} + \ldots + T_0^{\mathcal{N}-1}),$$

$$x \in [s^*(T_0^* + T_0^{**} + \ldots + T_0^{\mathcal{N}-1}), s_2(T_0^* + T_0^{**} + \ldots + T_0^{\mathcal{N}-1})].$$

Заміна змінної $\tilde{t} = t - T_0^* - T_0^{**} - \ldots - T_0^{\mathcal{N}-1}$ також зводить цю задачу до задачі вигляду (1) – (6), (26), вихідні дані якої задовольняють достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку $(u^{-\mathcal{N}}, u^{+\mathcal{N}}, s^{\mathcal{N}}) \in \mathfrak{M}^{\mathcal{N}} = \mathfrak{M}(T_0^{\mathcal{N}}, L_x^{\mathcal{N}})$, де

$$L_x^{\mathcal{N}} = \mathcal{C}_{13} + L_x^{\mathcal{N}-1}, \quad T_0^{\mathcal{N}} = \frac{1}{\mathcal{C}_{27} L_x^{\mathcal{N}-1}}.$$

Із рекурентної формули для $L_x^{\mathcal{N}}$ виводимо

$$L_x^{\mathcal{N}} = 2\mathcal{C}_{13} + L_x^{\mathcal{N}-2} = \ldots = (\mathcal{N} - 1)\mathcal{C}_{13} + L_x^* = \mathcal{N}\mathcal{C}_{13} + \alpha_0,$$

тому

$$T_0^{\mathcal{N}} = \frac{1}{\mathcal{C}_{27}((\mathcal{N} - 1)\mathcal{C}_{13} + \alpha_0)} \geq \frac{1}{\mathcal{C}_{28}\mathcal{N}}.$$

Оскільки

$$\sum_{\mathcal{N}=1}^{\infty} T_0^{\mathcal{N}} \geq \sum_{\mathcal{N}=1}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{C}_{28}\,\mathcal{N}} = \infty,$$

то за скінченну кількість кроків ми досягнемо лінії $t = T$. Отже, умови теореми 2 дають змогу отримати глобальний узагальнений розв'язок задачі (1) – (6), (26), визначений на часовому проміжку $[0, T]$, де значення T є як завгодно великим.

Теорему 2 доведено.

Зауваження. За деяких додаткових припущень щодо знакосталості та монотонності функцій $\gamma_i^{\pm}(t, y, z)$ справджується аналогічна теорема і про глобальну розв'язність задачі (1) – (7). Умови (26) вибрано замість умов (7) лише для менш громіздких викладок.

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978. — 592 с.
2. *Казаков К. Ю., Морозов С. Ф.* Об определении неизвестной линии разрыва решения смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы // Укр. мат. журн. — 1985. — **37**, № 4. — С. 443 – 450.
3. *Андрусяк Р. В., Кирилич В. М., Мышкис А. Д.* Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой // Дифференц. уравнения. — 2006. — **42**, № 4. — С. 489 – 503.
4. *Сидоренко А. Д.* Задача с контактным разрывом для системы трех квазилинейных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1978. — **14**, № 3. — С. 504 – 511.
5. *Bassanini P., Turo J.* Generalized solutions to free boundary problems for hyperbolic systems of functional partial differential equations // Ann. mat. pura ed appl. — 1990. — **156**, № 4. — P. 211 – 230.
6. *Кирилич В. М.* Деякі нелінійні задачі з вільними межами для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2009. — Вип. 71. — С. 125 – 134.
7. *Андрусяк Р. В., Бурдейна Н. О., Кирилич В. М.* Класична розв'язність задачі з рухомими межами для гіперболічної системи квазілінійних рівнянь // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 7. — С. 867 – 891.

8. *Tong Yang, Yi Fahuai.* Global existence and uniqueness for a hyperbolic system with free boundary // Discrete and Contin. Dynam. Syst. — 2001. — **7**, № 4. — P. 763 – 780.
9. *Gupta S. C.* The classical Stefan problem: basic concepts, modeling and analysis. — Amsterdam: Elsevier, 2003. — 385 p.
10. *Čanić S., Keyfitz L., Kim E. H.* Free boundary problems for nonlinear wave systems: Mach stems for interacting shocks // SIAM J. Math. Anal. — 2006. — **37**. — P. 1947 – 1977.
11. *Majda A. Y., Panagiotis E.* Existence and uniqueness of week solutions for precipitation fronts: A novel hyperbolic free boundary problem in several space variables // Communs Pure and Appl. Math. — 2010. — **63**. — P. 1351 – 1361.
12. *Chen Gui-Qiang G., Feldman M., Bae M., Wang Y.* Free boundary problems in hyperbolic conservation laws // MSRI Workshop on Free Boundary Problems: Theory and Appl. Math. Sci. Res. Inst. (Berkeley, USA, March 7 – 11, 2011). — P. 1 – 57.

Одержано 25.03.10,
після доопрацювання — 21.03.12