УДК 517.36

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕТОЧНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

А. А. Мартынюк, А. С. Хорошун

Ин-т механики НАН Украины
Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3
e-mail:center@inmech.kiev.ua

We use a matrix-valued Lyapunov function to study absolute parametric stability of uncertain singularly perturbed systems. In such a case, the system may be stable even though its component subsystems are unstable. We find sufficient conditions for absolute parametric stability and the domain in the parameter space for such a stability.

Для дослідження абсолютної параметричної стійкості неточних сингулярно збурених систем використано матричнозначну функцію Ляпунова. В цьому випадку система може бути стабілізована, навіть якщо її складові підсистеми є нестійкими. Отримано достатні умови абсолютної параметричної стійкості та область у просторі параметрів такої стабілізації.

Введение. Системы уравнений возмущенного движения с быстрыми и медленными переменными, так называемые сингулярно возмущенные системы, являются математическими моделями многих реальных физических процессов и активно используются при исследовании аэрокосмической динамики, динамики жидкостей и газов, химической кинетики и др. Главной особенностью таких систем является то, что подсистемы, из которых они состоят, имеют различную ответную реакцию на внешние возмущения. Это проявляется в том, что переменные, при старших производных которых содержится малый параметр, изменяются быстрее остальных переменных этой системы. Поэтому при исследовании динамических свойств сингулярно возмущенных систем целесообразно разделять исходную систему на две подсистемы: вырожденную и граничный слой, которые исследуются в соответствии с собственной шкалой естественного времени. В частности, при исследовании устойчивости сингулярно возмущенной системы на основании указанного разделения строятся компоненты векторной функции Ляпунова, с помощью которой, используя метод сравнения, определяются условия устойчивости (см. [5, 12]). Однако не всегда удается разделить исходную систему на вырожденную и граничный слой. В этом случае возможно использовать методику, предложенную в работе [4], основанную на применении как векторной, так и матричнозначной функций Ляпунова (см. [8]).

В данной работе рассматривается линейная неточная сингулярно возмущенная система, нулевое решение которой неустойчиво при значениях параметра из некоторой области. Задача состоит в параметрической стабилизации исходной системы, т. е. в таком выборе управления, которое обеспечит абсолютную устойчивость подвижного состояния равновесия полученной нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы для всех значений параметра из некоторой области, а также в определении этой области (см. [3]). Отметим, что полученная нелинейная сингулярно возмущенная система позволяет выделить вырожденную подсистему и граничный слой, однако построить с их помощью компоненты векторной функции и сделать вывод об устойчивости исходной системы не представляется возможным из-за отсутствия данных об устойчивости указанных подсистем. Поэтому в работе использована матричнозначная функция Ляпунова [10], которая позволяет сделать вывод об устойчивости нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы.

Постановка задачи. Рассмотрим неточную сингулярно возмущенную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}(p)x + \varepsilon A_{12}(p)z, \\ \varepsilon\dot{z} &= A_{21}(p)x + \varepsilon A_{22}(p)z, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $z(t) \in \mathbb{R}^m$ — переменные, определяющие состояние системы в момент времени $t \in \mathbb{R}_+$, $A_{11}(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{12}(p) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A_{21}(p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A_{22}(p) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — матрицы, непрерывно зависящие от векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, $\varepsilon \in (0,1]$ — малый параметр. Относительно системы (1) сделаем следующее предположение.

Предположение 1. *Матрица $A_{22}(p^*)$ невырождена и имеет хотя бы одно собственное значение с положительной вещественной частью, где $p^* \in \mathbb{R}^l$ — некоторое значение параметра.*

Систему (1) приведем к виду

$$\dot{y} = M(p,\varepsilon)y, \tag{2}$$

где $y = (x^T, z^T)^T$, $M(p,\varepsilon) = \begin{pmatrix} A_{11}(p) & \varepsilon A_{12}(p) \\ \frac{1}{\varepsilon}A_{21}(p) & A_{22}(p) \end{pmatrix}$ — блочная матрица. Исследуем устойчивость системы (2) при $p = p^*$. Для этого найдем собственные значения матрицы $M(p^*,\varepsilon)$, т. е. решим уравнение $\det(M(p^*,\varepsilon) - \lambda E) = 0$, где E — единичная матрица соответствующей размерности. Используя формулу для определителя блочной матрицы (см. [2, с. 35]), получаем $\det(M(p^*,\varepsilon) - \lambda E) = \det(A_{22}(p^*) - \lambda E_2)\det(A_{11}(p^*) - \lambda E_1 - A_{12}(p^*)(A_{22}(p^*) - \lambda E_2)^{-1}A_{21}(p^*))$, где E_1 и E_2 — единичные матрицы соответствующих размерностей. Таким образом, собственные значения матрицы $M(p^*,\varepsilon)$ представляют собой совокупность решений двух уравнений

$$\det(A_{22}(p^*) - \lambda E_2) = 0,$$

$$\det(A_{11}(p^*) - \lambda E_1 - A_{12}(p^*)(A_{22}(p^*) - \lambda E_2)^{-1}A_{21}(p^*)) = 0,$$

первое из которых имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью. Это значит, что система (2), суть система (1), неустойчива при $p^* \in \mathbb{R}^l$.

Введем в систему (1) нелинейное управление с целью ее параметрической стабилизации, т. е. придания подвижному состоянию равновесия вновь образовавшейся системы свойства глобальной асимптотической устойчивости относительно некоторой области в пространстве параметров. Рассмотрим полученную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}(p)x + \varepsilon A_{12}(p)z + q_1(p)\varphi(r + C(p)x), \\ \varepsilon\dot{z} &= A_{21}(p)x + \varepsilon A_{22}z + q_2\varphi(r + C(p)x), \end{aligned} \tag{3}$$

где $q_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $q_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C(p) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ — матрицы с элементами, которые непрерывно зависят от параметра p, нелинейная функция $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ непрерывно дифференцируема во всей области своего существования и такова, что $\varphi(0) = 0$ и $\left.\dfrac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} = E_k$, где E_k — единичная матрица соответствующей размерности, $r \in \mathbb{R}^k$ — корректирующий вектор. Предполагаем, что для системы (3) справедлива теорема о существовании и единственности решения начальной задачи.

Заметим, что в работе [5] использовался подход к исследованию абсолютной параметрической устойчивости системы, сходной с системой (3), который был основан на применении векторной функции Ляпунова. Компоненты такой функции строились для устойчивой, при некотором значении параметра p, вырожденной подсистемы и граничного слоя исходной системы. Однако в данном случае использовать указанный подход не представляется возможным, так как нет данных об устойчивости вырожденной подсистемы и граничного слоя системы (3) при некотором значении параметра p, а известно лишь о невырожденности и неустойчивости матрицы $A_{22}(p)$ в точке $p^* \in \mathbb{R}^l$.

Таким образом, целью данной работы является получение достаточных условий абсолютной параметрической устойчивости системы (3), суть параметрической стабилизации движения системы (1). В работе предлагается способ построения матричнозначной функции Ляпунова, с помощью которой получены искомые достаточные условия. Также определяется область в пространстве параметров, для которой абсолютная параметрическая устойчивость системы (3) имеет место.

Анализ существования состояния равновесия системы с управлением. Состояние равновесия неточной сингулярно возмущенной системы вида (3), если оно существует, имеет вид $(x^e(p,r)^T \ z^e(p,r)^T)^T$, где $x^e(p,r)$ и $z^e(p,r)$ являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= A_{11}(p)x^e + \varepsilon A_{12}(p)z^e + q_1(p)\varphi(r + C(p)x^e), \\ 0 &= A_{21}(p)x^e + \varepsilon A_{22}(p)z^e + q_2(p)\varphi(r + C(p)x^e). \end{aligned} \tag{4}$$

Выразив z^e из второго уравнения системы (4), $z^e = -\dfrac{1}{\varepsilon}A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)x^e + q_2(p)\varphi(r + C(p)x^e))$, подставим полученное выражение в первое уравнение этой же системы, в результате чего получим уравнение

$$A_0(p)x^e + q_0(p)\varphi(r + C(p)x^e) = 0, \tag{5}$$

где $A_0(p) = A_11(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)$, $q_0(p) = q_1(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}q_2(p)$, из которого определяется компонента $x^e(p,r)$ вектора состояния равновесия системы (3). Очевидно, что компонента $z^e(p,r)$ вектора состояния равновесия системы (3) существует, если существует компонента $x^e(p,r)$ и, таким образом, вопрос о существовании состояния равновесия системы (3) эквивалентен вопросу о существовании решения уравнения (5).

Относительно векторного уравнения (5) сделаем следующее предположение.

Предположение 2. *Матрица* $K_0(p,u) = A_0(p) + q_0(p)\left.\dfrac{d\varphi(u)}{du}\right|_u C(p)$ *невырождена при* $p = p^*$ *и* $u = 0$.

В работе [4] (п. 2) показано, что если для функции $\varphi(u)$ выполняется условие

$$\left\| \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u} - \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} \right\| \leq \frac{\dfrac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p}\|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}(\|q_0(p)\|\|C(p)\|)} \tag{6}$$

для всех $u \in \mathbb{R}^k$, где область $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq a\}$ такова, что выполняется неравенство

$$\max_{p\in\Omega_p}\|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\| \leq \frac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|}, \tag{7}$$

то для всех $(p,r) \in \Omega_p \times \Omega_r$, где $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^k \mid \|r\| \leq b\}$, b — произвольное, как угодно большое наперед заданное положительное число, существует единственное решение векторного уравнения (5). Отметим, что в данной работе используется спектральная норма для матриц и евклидова норма для векторов.

Замечание 1. Для существования компоненты $z^e(p,r)$ вектора состояния равновесия системы (3) для всех значений параметра $p \in \Omega_p 1 \subseteq \mathbb{R}^l$ необходимо, чтобы матрица $A_{22}(p)$ была невырожденной для всех значений параметра из этой области. Область $\Omega_p 1$, содержащую значение параметра p^*, при котором матрица $A_{22}^{-1}(p^*)$ существует, можно можно определить так, как предложено в работе [5] (см. замечание 1).

Таким образом, на основании изложенного выше, если справедливы условия предположений 1 и 2, то при выполнении условия (6) для всех $(p,r) \in (\Omega_p \cap \Omega_p 1) \times \Omega_r$, где Ω_p выбирается с учетом неравенства (7), $\Omega_p 1$ определяется согласно подходу, предложенному в работе [5], а $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^k \mid \|r\| \leq b, b \in \mathbb{R}^+\}$, существует единственное решение системы уравнений (4), суть единственное состояние равновесия неточной сингулярно возмущенной системы (3).

Исследование абсолютной параметрической устойчивости системы с управлением. Пусть выполняются условия предположений 1, 2 и определена область в пространстве параметров существования единственного состояния равновесия системы с управлением (3). Рассмотрим матричнозначную функцию общего вида (см. [9–11])

$$U(x,z,\varepsilon) = \begin{pmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x,z,\varepsilon) \\ v_{21}(x,z,\varepsilon) & v_{22}(x,z,\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Пусть $v_{11}(x) = (x - x^e)^T P_1 (x - x^e)$, $v_{12}(x,z,\varepsilon) = v_{21}(x,z,\varepsilon) = \varepsilon(x - x^e)^T P_3 (z - \Phi(x))$, $v_{22}(x,z,\varepsilon) = \varepsilon^2 (z - \Phi(x))^T P_2 (z - \Phi(x))$, $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — симметрические положительно определенные матрицы, $P_3 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — некоторая постоянная матрица, $\Phi(x) = -\dfrac{1}{\varepsilon} A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)x + q_2(p)\varphi(r + C(p)x))$.

С помощью вектора $\eta^T = (1\,1)$, следуя [9], образуем скалярную функцию

$$v(x,z,\varepsilon) = \eta^T V(x,z,\varepsilon)\,\eta. \tag{9}$$

Поскольку для элементов матричнозначной функции (8) имеют место оценки

$$v_{11}(x) \geq \lambda_{\min}(P_1)\|x - x^e\|^2 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$v_{22}(z,\varepsilon) \geq \varepsilon^2 \lambda_{\min}(P_2)\|z-\Phi(x)\|^2, \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n, \ z \in \mathbb{R}^m, \ \varepsilon \in (0,1],$$

$$v_{12}(x,z,\varepsilon) \geq -\varepsilon \left(\lambda_{\max}(P_3P_3^T)\right)^{\frac{1}{2}} \|x-x^e\|\|z-\Phi(x)\|, \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n, \ z \in \mathbb{R}^m, \ \varepsilon \in (0,1],$$

где $\lambda_{\min}(\cdot)$ и $\lambda_{\max}(\cdot)$ — минимальное и максимальное собственные значения соответствующей матрицы, для скалярной функции (9) выполняется следующая оценка:

$$v(x,z,\varepsilon) \geq u^T A(\varepsilon)\, u \quad \text{для всех} \quad (x,z,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times (0,1],$$

где $u^T = (\|x-x^e\| \; \|z-\Phi(x)\|)$,

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(P_1) & -\varepsilon(\lambda_{\max}(P_3P_3^T))^{\frac{1}{2}} \\ -\varepsilon(\lambda_{\max}(P_3P_3^T))^{\frac{1}{2}} & \varepsilon^2\lambda_{\min}(P_2) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Вычислим полную производную функции (9) по времени в силу системы (3):

$$\dot{v}(x,z,\varepsilon)|_{(3)} = \dot{x}^T P_1(x-x^e) + (x-x^e)^T P_1 \dot{x} + 2\varepsilon \dot{x}^T P_3(z-\Phi(x)) +$$
$$+ 2\varepsilon(x-x^e)^T P_3\left(\dot{z} - \frac{d\Phi(x)}{dx}\right) + \varepsilon^2\left(\dot{z} - \frac{d\Phi(x)}{dx}\right)^T P_2(z-\Phi(x)) +$$
$$+ \varepsilon^2(z-\Phi(x))^T P_2\left(\dot{z} - \frac{d\Phi(x)}{dx}\right). \tag{11}$$

Учитывая, что

$$\dot{x} = A_{11}(p)x + \varepsilon A_{12}(p)z + q_1(p)\varphi(u) = \left(A_0(p) + q_0(p)\,\frac{\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde{u}} C(p)\right)(x-x^e) + \varepsilon A_{12}(p)(z-\phi(x))$$

и

$$\dot{z} - \frac{d\Phi(x)}{dx} = A_{22}(p)(z-\Phi(x)) +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}\, A_{22}^{-1}(p)\left(A_{21}(p) + q_2(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde{\tilde{u}}} C(p)\right)\left(A_0(p) + q_0(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde{u}} C(p)\right) \times$$
$$\times (x-x^e) + A_{22}^{-1}(p)\left(A_{21}(p) + q_2(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde{\tilde{u}}} C(p)\right) A_{12}(p)(z-\Phi(x)),$$

где $\tilde{u}$ и $\tilde{\tilde{u}}$ — некоторые значения переменной u, из соотношения (11) получаем

$$\dot{v}(x,z,\varepsilon)|_{(3)} = (x-x^e)^T M(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})(x-x^e) +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\varepsilon(z-\Phi(x))^T(N_1(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}) + N_2^T(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}))(x-x^e) +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\varepsilon(x-x^e)^T(N_1^T(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}) + N_2(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}))(z-\Phi(x)) +$$
$$+ \varepsilon^2(z-\Phi(x))^T L(p,\tilde{\tilde{u}})(z-\Phi(x)), \tag{12}$$

где

$$M(p,\tilde u,\tilde{\tilde u}) = \left(A_0(p)+q_0(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde u}C(p)\right)^T P_1 + P_1\left(A_0(p)+q_0(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde u}C(p)\right)+$$

$$+\,P_3A_{22}^{-1}(p)\left(A_{21}(p)+q_2(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde{\tilde u}}C(p)\right)\left(A_0(p)+q_0(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde u}C(p)\right)+$$

$$+\left(A_0(p)+q_0(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde u}C(p)\right)^T\left(A_{21}(p)+q_2(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde{\tilde u}}C(p)\right)^T(A_{22}^{-1}(p))^TP_3^T,$$

$$N_1(p,\tilde u,\tilde{\tilde u}) = A_{12}^T(p)P_1 + P_2A_{22}^{-1}(p)\left(A_{21}(p)+q_2(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde{\tilde u}}C(p)\right)\times$$

$$\times\left(A_0(p)+q_0(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde u}C(p)\right),$$

$$N_2(p,\tilde u,\tilde{\tilde u}) = P_1A_{12}(p)+2\left(A_0(p)+q_0(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde u}C(p)\right)^T P_3 + 2P_3A_{22}(p)+$$

$$+\,2P_3A_{22}^{-1}(p)\left(A_{21}(p)+q_2(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde{\tilde u}}C(p)\right)A_{12}(p)+$$

$$+\left(A_0(p)+q_0(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde u}C(p)\right)^T\left(A_{21}(p)+q_2(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde{\tilde u}}C(p)\right)^T(A_{22}^{-1}(p))^TP_2,$$

$$L(p,\tilde{\tilde u}) = A_{12}^T(p)P_3 + P_3^TA_{12}(p) + A_{22}^T(p)P_2 + P_2A_{22}(p)+$$

$$+\,A_{12}^T(p)\left(A_{21}(p)+q_2(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde{\tilde u}}C(p)\right)^T(A_{22}^{-1}(p))^TP_2+$$

$$+\,P_2A_{22}^{-1}(p)\left(A_{21}(p)+q_2(p)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{\tilde{\tilde u}}C(p)\right)A_{12}(p).$$

Пусть $A_{21}(p)+q_2(p)\,\dfrac{d\varphi(u)}{du}\bigg|_{u}C(p) = K_1(p,u)$, тогда

$$M(p,\tilde u,\tilde{\tilde u}) = M(p^*,0,0) + (K_0(p,\tilde u)-K_0(p^*,0))^TP_1 + P_1(K_0(p,\tilde u)-K_0(p^*,0))+$$

$$+\,2P_3(A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*))(K_1(p,\tilde{\tilde u})-K_1(p^*,0))(K_0(p,\tilde u)-K_0(p^*,0))+$$

$$+\,2P_3(A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*))K_1(p^*,0)(K_0(p,\tilde u)-K_0(p^*,0))+$$

$$+\,2P_3(A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*))(K_1(p,\tilde{\tilde u})-K_1(p^*,0))K_0(p^*,0)+$$

$$+\,2P_3(A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*))K_1(p^*,0)K_0(p^*,0)+$$

$$+\,2P_3A_{22}^{-1}(p^*)(K_1(p,\tilde{\tilde{u}})-K_1(p^*,0))(K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0))+$$
$$+\,2P_3A_{22}^{-1}(p^*)K_1(p^*,0)(K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0))+$$
$$+\,2P_3A_{22}^{-1}(p^*)(K_1(p,\tilde{\tilde{u}})-K_1(p^*,0))K_0(p^*,0). \tag{13}$$

Использовав выражение (13), получим оценку квадратичной формы

$$(x-x^e)^TM(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})(x-x^e)\le\Big[\lambda_{\max}(M(p^*,0,0))+2\|P_1\|\|K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0)\|+$$
$$+\,2\|P_3\|\|A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*)\Big(\|K_1(p,\tilde{\tilde{u}})-K_1(p^*,0)\|\|K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0)\|+$$
$$+\,\|K_1(p^*,0)\|\|K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0)\|+\|K_1(p,\tilde{\tilde{u}})-K_1(p^*,0)\|\|K_0(p^*,0)\|+$$
$$+\,\|K_1(p^*,0)K_0(p^*,0)\|\Big)+2\|P_3A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big(\|K_1(p,\tilde{\tilde{u}})-K_1(p^*,0)\|\|K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0)\|+$$
$$+\,\|K_1(p^*,0)\|\|K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0)\|+\|K_1(p,\tilde{\tilde{u}})-K_1(p^*,0)\|\|K_0(p^*,0)\|\Big)\Big]\|x-x^e\|^2. \tag{14}$$

Использовав обозначение

$$\Delta_i(u,p)=(q_i(p)-q_i(p^*))\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u-\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right)(C(p)-C(p^*))+$$
$$+\,(q_i(p)-q_i(p^*))\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u-\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right)C(p^*)+$$
$$+\,(q_i(p)-q_i(p^*))\,\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}(C(p)-C(p^*))+$$
$$+\,(q_i(p)-q_i(p^*))\,\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}C(p^*)+$$
$$+\,q_i(p^*)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u-\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right)(C(p)-C(p^*))+$$
$$+\,q_i(p^*)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u-\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right)C(p^*)+$$
$$+\,q_i(p^*)\,\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}(C(p)-C(p^*)),\quad i=1,2,$$

запишем компоненты соотношения (13) в виде

$$K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0)=(A_0-A_0(p^*))+\Delta_0(\tilde{u},p),$$
$$K_1(p,\tilde{\tilde{u}})-K_1(p^*,0)=(A_{21}-A_{21}(p^*))+\Delta_1(\tilde{u},p).$$

Пусть функция $\varphi(u)$ такова, что $\left\| \left.\dfrac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u} - \left.\dfrac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} \right\| \le \alpha$, $\alpha > 0$, для всех $u \in \mathbb{R}^k$. Оценив компоненты неравенства (14)

$$\|K_0(p,\tilde{u}) - K_0(p^*,0)\| \le \|A_0 - A_0(p^*)\| + \beta_0(p,\alpha) = \gamma_0(p,\alpha),$$

$$\|K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0)\| \le \|A_{21} - A_{21}(p^*)\| + \beta_1(p,\alpha) = \gamma_1(p,\alpha),$$

где

$$\begin{aligned}\beta_i(p,\alpha) = {} & \alpha\|q_i(p) - q_i(p^*)\|\,\|C(p) - C(p^*)\| + \alpha\|C(p^*)\|\|q_i(p) - q_i(p^*)\| + \\ & + \|q_i(p) - q_i(p^*)\| \left\| \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} \right\| \|C(p) - C(p^*)\| + \\ & + \|q_i(p) - q_i(p^*)\| \left\| \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} \right\| \|C(p^*)\| + \alpha\|q_i(p^*)\|\|C(p) - C(p^*)\| + \\ & + \alpha\|q_i(p^*)\|\|C(p^*)\| + \|q_i(p^*)\| \left\| \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} \right\| \|C(p) - C(p^*)\|, \quad i = 1,2,\end{aligned}$$

окончательно получим для всех $x \in \mathbb{R}^n$ неравенство

$$\begin{aligned}(x - x^e)^T M(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})(x - x^e) \le {} & \Big(\lambda_{\max}(M(p^*,0,0)) + 2\|P_1\|\gamma_0(p,\alpha) + 2\|P_3\|\|A_{22}^{-1}(p) - \\ & - A_{22}^{-1}(p^*)\|\,[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha) + \|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha) + \|K_0(p^*,0)\|\gamma_1(p,\alpha) + \\ & + \|K_1(p^*,0)K_0(p^*,0)\|] + 2\|P_3A_{22}^{-1}(p^*)\|\,[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha) + \|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha) + \\ & + \|K_0(p^*,0)\|\gamma_1(p,\alpha)]\Big)\|x - x^e\|^2 = A(p,\alpha)\|x - x^e\|^2. \qquad (15)\end{aligned}$$

Преобразуем величину $L(p,\tilde{\tilde{u}})$ следующим образом:

$$\begin{aligned}L(p,\tilde{\tilde{u}}) = {} & L(p^*,0) + (A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T P_3 + P_3^T(A_{12}(p) - A_{12}(p^*)) + \\ & + (A_{22}(p) - A_{22}(p^*))^T P_2 + P_2(A_{22}(p) - A_{22}(p^*)) + (A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - \\ & - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2 + (A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - \\ & - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2 + P_2A_{22}^{-1}(p^*)(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))(A_{12}(p) - A_{12}(p^*)) + \\ & + P_2(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))(A_{12}(p) - A_{12}(p^*)) + \\ & + (A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T K_1^T(p^*,0)(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2 + \\ & + (A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T K_1^T(p^*,0)(A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2 +\end{aligned}$$

$$+ P_2(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))K_1(p^*,0)(A_{12}(p) - A_{12}(p^*))+$$

$$+ P_2A_{22}^{-1}(p^*)K_1(p^*,0)(A_{12}(p) - A_{12}(p^*))+$$

$$+ P_2A_{22}^{-1}(p^*)(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))A_{12}(p^*)+$$

$$+ P_2(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))K_1(p^*,0)A_{12}(p^*)+$$

$$+ A_{12}^T(p^*)K_1^T(p^*,0)(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2+$$

$$+ A_{12}^T(p^*)(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2 + P_2(A_{22}^{-1}(p)-$$

$$- A_{22}^{-1}(p^*))(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))A_{12}(p^*)+$$

$$+ A_{12}^T(p^*)(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2.$$

С учетом введенных выше обозначений получим оценку квадратичной формы для всех $z \in \mathbb{R}^m$ в виде

$$(z-\Phi(x))^T L(p,\tilde{\tilde{u}})(z-\Phi(x)) \le \Big(\lambda_{\max}(L(p^*,0)) + 2\|P_3\|\|A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\|+$$

$$+ 2\|P_2\|\|A_{22}(p) - A_{22}(p^*)\| + 2\|P_2\|\|A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\|K_1(p^*,0)\|\|A_{12}(p^*)\|+$$

$$+ \gamma_1(p,\alpha)\|A_{12}(p^*)\| + \gamma_1(p,a)\|A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\| + \|K_1(p^*,0)\|\|A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\|\Big]+$$

$$+ 2\|P_2A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\|A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\| + \|K_1(p^*,0)\|\|A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\|+$$

$$+ \gamma_1(p,\alpha)\|A_{12}(p^*)\|\Big]\Big)\|z-\Phi(x)\|^2 = B(p,\alpha)\|z-\Phi(x)\|^2. \tag{16}$$

Величину $\dfrac{1}{2}\,(N_1(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}) + N_2^T(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}))$ представим так:

$$\frac{1}{2}\,\big(N_1(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}) + N_2^T(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})\big) = \frac{1}{2}\,(N_1(p^*,0,0) + N_2(p^*,0,0))+$$

$$+ (A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T P_1 + (A_{22}(p) - A_{22}(p^*))^T P_3^T + P_3^T(K_0(p,\tilde{u}) - K_0(p^*,0))+$$

$$+ (A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T\Big[(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T+$$

$$+ (K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p^*))^T + K_1^T(p^*,0)(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T+$$

$$+ K_1^T(p^*,0)(A_{22}^{-1}(p^*))^T\Big]P_3^T + A_{12}^T(p^*)\Big[(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T+$$

$$+ (K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p^*))^T + K_1^T(p^*,0)(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T\Big]P_3^T+$$

$$+ P_2(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))\Big[(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))(K_0(p,\tilde{u}) - K_0(p^*,0))+$$

$$+ (K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))K_0(p^*,0) + K_1(p^*,0)(K_0(p,\tilde{u}) - K_0(p^*,0)) + K_1(p^*,0)K_0(p^*,0)\Big] +$$

$$+ P_2 A_{22}^{-1}(p^*)\Big[(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))(K_0(p,\tilde{u}) - K_0(p^*,0)) +$$

$$+ (K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))K_0(p^*,0) + K_1(p^*,0)(K_0(p,\tilde{u}) - K_0(p^*,0))\Big].$$

Для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$ имеет место оценка билинейной формы

$$\frac{1}{2}(z-\Phi(x))^T(N_1(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}) + N_2(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}))(x-x^e) \le \Bigg(\frac{1}{2}\|N_1(p^*,0,0) + N_2^T(p^{,}0,0)\| +$$

$$+ \|P_1\|\|A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\| + \|P_3\|\|A_{22}(p) - A_{22}(p^*)\| + \|P_3\|\gamma_0(p,\alpha) +$$

$$+ \|P_3\|\|A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\|A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*)\| + \gamma_1(p,\alpha)\|A_{22}^{-1}(p^*)\| +$$

$$+ \|K_1(p^*,0)\|\|A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*)\| + \|K_1(p^*,0)\|\|A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big] +$$

$$+ \|P_3\|\|A_{12}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\|A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*)\| + \gamma_1(p,\alpha)\|A_{22}^{-1}(p^*)\| +$$

$$+ \|K_1(p^*,0)\|\|A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big] + \|P_2\|\|A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*)\| \times$$

$$\times \Big[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha) + \gamma_1(p,\alpha)\|K_0(p^*,0)\| + \|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha) + \|K_1(p^*,0)\|\|K_0(p^*,0)\|\Big] +$$

$$+ \|P_2 A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha) + \gamma_1(p,\alpha)\|K_0(p^*,0)\| + \|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha)\Big]\Bigg) \times$$

$$\times \|x-x^e\|\|z-\Phi(x)\| = C(p,\alpha)\|x-x^e\|\|z-\Phi(x)\|. \tag{17}$$

Очевидно, что аналогичным образом получается следующая оценка для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $z \in \mathbb{R}^m$:

$$\frac{1}{2}(z-\Phi(x))^T(N_1(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}) + N_2(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}))(x-x^e) \le C(p,\alpha)\|x-x^e\|\|z-\Phi(x)\|. \tag{18}$$

Таким образом, для производной функции (9) по времени в силу системы (3), учитывая (12), (15) – (18), для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,1]$ имеем оценку

$$\frac{dv(x,z,\varepsilon)}{dt}\bigg|_{(3)} \le A(p,\alpha)\|x-x^e\|^2 + \varepsilon C(p,\alpha)\|x-x^e\|\|z-\Phi(x)\| +$$

$$+ \varepsilon C(p,\alpha)\|z-\Phi(x)\|\|x-x^e\| + \varepsilon^2 B(p,\alpha)\|z-\Phi(x)\|^2 =$$

$$= (\|x-x^e\|, \|z-\Phi(x)\|)D(p,\alpha,\varepsilon)(\|x-x^e\|, \|z-\Phi(x)\|)^T, \tag{19}$$

где $D(p,\alpha,\varepsilon) = \begin{pmatrix} A(p,\alpha) & \varepsilon C(p,\alpha) \\ \varepsilon C(p,\alpha) & \varepsilon^2 B(p,\alpha) \end{pmatrix}$.

Используя полученные оценки, устанавливаем достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости неточной сингулярно возмущенной системы вида (3) относительно некоторой области в пространстве параметров.

Теорема. *Пусть для неточной сингулярно возмущенной системы (3) выполняются условия предположений 1, 2, построена матричнозначная функция (8) и кроме того:*

1) функция $\varphi(u)$, входящая в состав системы (3), такова, что неравенство

$$\left\| \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u} - \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} \right\| \leq \alpha \leq \frac{\frac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p}\|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}(\|q_0(p)\|\|C(p)\|)}$$

выполняется для всех $u \in \mathbb{R}^k$ в области $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq a\}$, которая выбирается с учетом соотношения (7);

2) для матриц P_1, P_2, P_3, входящих в состав функции (8), справедливо соотношение

$$\lambda_{\min}(P_1)\lambda_{\min}(P_2) - \lambda_{\max}(P_3P_3^T) > 0;$$

3) для всех $p \in P \subseteq (\Omega_p \cap \Omega_p 1)$ (область $\Omega_p 1$ определена в замечании 1) выполняются неравенства

$$A(p,\alpha) < 0, \quad B(p,\alpha) < 0, \quad A(p,\alpha)B(p,\alpha) - C^2(p,\alpha) > 0.$$

Тогда система (3) абсолютно параметрически устойчива относительно области $P \times \times\Omega_r$, где $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^k \mid \|r\| \leq b, b > 0\}$ для всех $\varepsilon \in (0,1]$.

Доказательство. Как было показано выше, если справедливы условия предположений 1, 2, то при выполнении условия (6) для всех $(p,r) \in (\Omega_p \cap \Omega_p 1) \times \Omega_r$, где Ω_p выбирается согласно неравенству (7), $\Omega_p 1$ определяется в замечании 1, а $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^k \mid \|r\| \leq \leq b, b > 0\}$, существует единственное состояние равновесия системы (3). Очевидно, что единственное состояние равновесия системы (3) будет существовать и для всех $(p,r) \in \in P \times \Omega_r$ при выполнении условия 1 теоремы. Покажем, что для всех значений параметра из этой области указанное состояние равновесия будет глобально асимптотически устойчиво. Пусть (p,r) — произвольные значения параметров из области $P \times \Omega_r$ и $(x^e(p,r)^T\ z^e(p,r)^T)^T$ — состояние равновесия системы (3), которое им соответствует. Рассмотрим скалярную функцию (9), построенную с помощью матричнозначной функции (8). При выполнении условия 2 теоремы матрица (10) положительно определена при всех $\varepsilon \in (0,1]$, значит, скалярная функция $v(x,z,\varepsilon) > 0$ при всех $(x,z,\epsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times (0,1]$. Для производной функции (9) по времени в силу системы (3) справедлива оценка (19). Матрица $D(p,\alpha,\varepsilon)$ при выполнении условия 3 теоремы отрицательно определена для данного $p \in P$ и всех $\varepsilon \in (0,1]$, значит, $\left.\frac{dv(x,z,\varepsilon)}{dt}\right|_{(3)} < 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,1]$. Таким образом, $v(x,z,\varepsilon)$ является функцией Ляпунова, позволяющей в силу теоремы 20 из монографии [1] установить глобальную асимптотическую устойчивость состояния равновесия $(x^e(p,r)^T z^e(p,r)^T)^T$. Поскольку (p,r) — произвольная точка области $P \times \Omega_r$, система (3) абсолютно параметрически устойчива относительно этой области для всех $\varepsilon \in (0,1]$.

Теорема доказана.

В качестве примера, иллюстрирующего применение предложенной методики, рассмотрим неточную сингулярно возмущенную систему вида (1), где $x, z \in \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{R}^1$:

$$A_{11}(p) = \begin{pmatrix} -2,3 + p^2 & 0 \\ 0 & -2,218 \end{pmatrix}, \quad A_{12}(p) = \begin{pmatrix} 0,04 & 0 \\ p & 0,04 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}(p) = \begin{pmatrix} 2,5 & 10p \\ 0 & -26,5 \end{pmatrix}, \quad A_{22}(p) = \begin{pmatrix} 0,35 + \tan(p) & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix}.$$

Выбрав $p^* = 0$, убедимся, что условия предположения 1 выполняются. Значит, рассматриваемая система неустойчива при $p^* = 0$ и, очевидно. в некоторой окрестности этого значения параметра. Введем управление посредством нелинейной функции $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}_1$, $\varphi(0) = 0$, $\left.\dfrac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} = 1$, $u = r + C(p)x$, $r \in \mathbb{R}^1$, $C(p) = (82, p^2)$ и соответствующих множителей $q_1(p) = \begin{pmatrix} 0,001 \\ \sin(p) \end{pmatrix}$, $q_2(p) = \begin{pmatrix} -0,35 + p \\ 0 \end{pmatrix}$ и исследуем с помощью предложенного подхода полученную систему вида (3).

Образовав матрицу $K_0(p, u)$, убедимся, что она удовлетворяет условию предположения 2. С помощью неравенств (6), (7) и замечания 1 определим, что если функция $\varphi(u)$ такова, что

$$\left\| \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_u - \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} \right\| \leq 0,02,$$

то для всех $(p, r) \in P \times \Omega_r$, где $P = \{p \in \mathbb{R}^1 \mid |p| \leq 0,002\}$, $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^1 \mid |r| < < b,\ b \in \mathbb{R}_+\}$, существует единственное состояние равновесия исследуемой системы. Выберем матрицы

$$P_1 = \begin{pmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0,15 & 0 \\ 0 & 0,15 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 4,5 & 0 \\ 0 & 4,5 \end{pmatrix}$$

и образуем скалярную функцию вида (9). Проверим, что для выбранных матриц выполняется условие 2 и для области P и $\alpha = 0,003$ выполняется условие 3 теоремы. Таким образом, все условия теоремы удовлетворены и при выполнении условия

$$\left\| \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_u - \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} \right\| \leq 0,003$$

исследуемая система вида (3) абсолютно параметрически устойчива относительно области $P \times \Omega_r$ для всех $\varepsilon \in (0, 1]$.

Выбрав $\varphi(u) = -0,0015 \sin(r + 82x_1 + p^2 x_2) + 1,0015(r + 82x_1 + p^2 x_2)$, убедимся, что функция удовлетворяет полученным секторным условиям. На рис. 1 и рис. 2 представлены графики, иллюстрирующие поведение переменных $x^T = (x_1, x_2)$, $z^T = (z_1, z_2)$ рассмотренной выше системы при $p = 0,002$, $\varepsilon = 0,1$, $r = -25$, $x_0^T = (-5, 5)$, $z_0^T = = (100, -200)$.

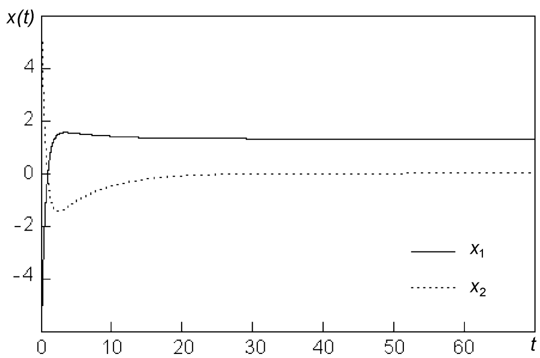

Рис. 1

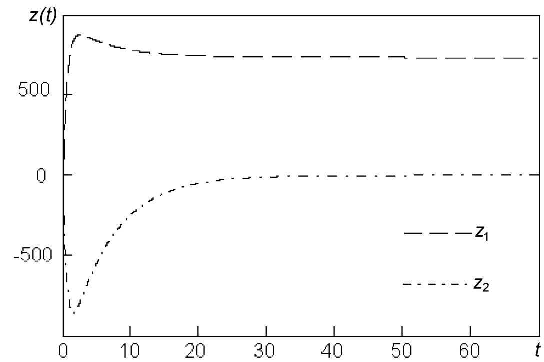

Рис. 2

На рис. 3 – 6 представлены графики, иллюстрирующие поведение переменных системы до ее стабилизации.

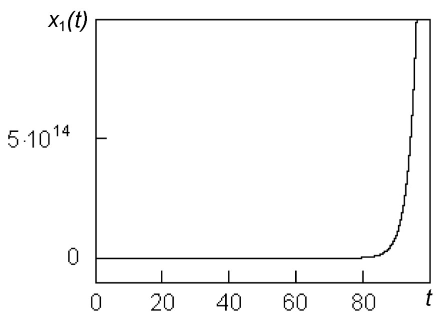

Рис. 3

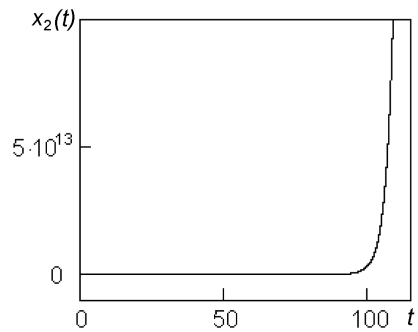

Рис. 4

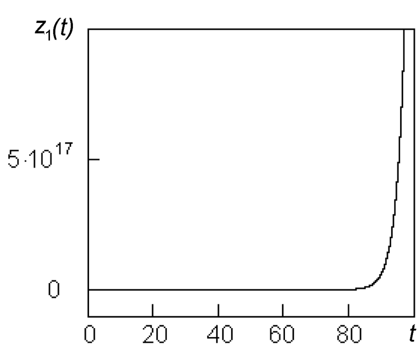

Рис. 5

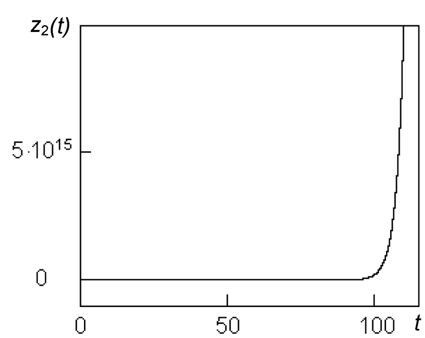

Рис. 6

Заключительные замечания. В статье предложен один подход к параметрической стабилизации движения неточной сингулярно возмущенной системы. Сходная система, однако без подобных параметрических возмущений, рассматривалась в работе [7], где для ее исследования и построения управления, обеспечивающего необходимое свойство исходной системы, была использована техника линейных матричных неравенств. В данной работе для исследования исходной системы предложено использовать метод функций Ляпунова. В отличие от работы [5], где устойчивость нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы исследовалась с использованием векторной функции Ляпунова и метода сравнения, а также работы [6], где использовалась скалярная функция, данный подход основан на применении матричнозначной функции Ляпунова. Этот подход позволяет сделать вывод об устойчивости исследуемой системы в случае, когда отсутствуют данные об устойчивости независимых подсистем. Матричнозначная функция (8) позволяет получить достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы (3), т. е. достаточные условия параметрической стабилизации сингулярно возмущенной системы (1). При этом получена оценка области в пространстве параметров, при всех значениях параметров из которой система (3) имеет указанный тип устойчивости. В качестве примера применения предложенной методики рассмотрена система неточных сингулярно возмущенных уравнений, вырожденная подсистема и граничный слой которой неустойчивы при некотором значении параметра. При этом показано, что сама система абсолютно параметрически устойчива относительно некоторой области, содержащей это значение параметра, при всех значениях малого параметра $\varepsilon \in (0, 1]$.

1. *Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях — Киев: Наук. думка, 1984. — 308 с.
2. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
3. *Khoroshun A. S.* Global parametric quadratic stabilizability of nonlinear systems with uncertainty // Int. Appl. Mech. — 2008. — **44**, № 6. — P. 703 – 710.
4. *Khoroshun A. S.* About using of multicomponent lyapunov functions for the analysis of the absolute parametric stability of the nonlinear singularly perturbed systems // Int. Appl. Mech. (to appear).
5. *Khoroshun A. S., Martynyuk A. A.* Parametric stability of singularly perturbed nonlinear uncertain systems // Int. Appl. Mech. — 2010. — **46**, № 10. — P. 1177 – 1190.
6. *Leitmann G., Ryan E. P.* Output feedback control of a class of singularly perturbed uncertain dynamical systems // Proc. Amer. Control Conf. — 1987. — P. 1590 – 1594.
7. *Lin K.-J., Li T.-H.S.* Stabilization of uncertain singularly perturbed systems with pole-placement constraints // IEEE Trans. Circuits and Systems II: Express Briefs. — 2006. — **53,** № 9. — P. 916 – 920.
8. *Martynyuk A. A.* Qualitative methods in nonlinear dynamics. Novel approaches to Lyapynov's matrix functions. — New York: Marcel Dekker, 2002. — 301 p.
9. *Martynyuk A. A.* Stability by Lyapunov's matrix function method with applications. — New York: Marcel Dekker, 1998. — 276 p.
10. *Martynyuk A. A.* Uniform asymptotic stability of a singularly perturbed system via the Lyapunov matrix-function // Nonlinear. Anal. — 1987. — № 11. — P. 1 – 4.
11. *Martynyuk A. A., Miladzhanov V. G.* Stability investigation of autonomous singularly perturbed systems on the basis of matrix Lyapunov function // Differents. Uravnenija. — 1988. — № 24. — P. 416 – 424.
12. *Silva G., Dzul F. A.* Parametric absolute stability of a class of singularly perturbed systems // Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control. — Tampa, Florida USA, 1998. — P. 1422 – 1427.

Получено 07.10.11,
после доработки — 04.11.11