УДК 517.91

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОБРАТИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА $(\mathcal{D}x)(t) = x(t+1) - f(x(t))$ В ПРОСТРАНСТВЕ ОГРАНИЧЕННЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОСИ ФУНКЦИЙ

В. Е. Слюсарчук

Укр. ун-т вод. хоз-ва и природоиспользования
Украина, 33000, Ривнэ, ул. Соборная, 11
e-mail: V. Ye. Slyusarchuk@RSTU.rv.ua

We find necessary and sufficient conditions for the operator $(\mathcal{D}x)(t) = x(t+1) - f(x(t))$, $t \in \mathbb{R}$, where $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function, to have an inverse in the space of functions bounded and continuous on $\mathbb{R}$.

Одержано необхідні і достатні умови оборотності нелінійного різницевого оператора $(\mathcal{D}x)(t) = x(t+1) - f(x(t))$, $t \in \mathbb{R}$, де $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція у просторі обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій.

Обозначим через C^0 банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $y = y(t)$ со значениями в $\mathbb{R}$ с нормой $\|y\|_{C^0} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |y(t)|$, через $\mathcal{F}_1$ множество отображений $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, для каждого из которых $R(g - I) = \mathbb{R}$ ($I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — единичное отображение) и

$$|g(x) - g(y)| < |x - y|,$$

если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x \neq y$, а через $\mathcal{F}_2$ множество отображений $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, для каждого из которых $R(g - I) = R(g + I) = \mathbb{R}$ и

$$|g(x) - g(y)| > |x - y|,$$

если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x \neq y$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{D} : C^0 \longrightarrow C^0$, определенный равенством

$$(\mathcal{D}x)(t) = x(t+1) - f(x(t)), \qquad t \in \mathbb{R},$$

где $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $x \in C^0$.

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{D} : C^0 \longrightarrow C^0$ имеет обратный непрерывный и c-непрерывный оператор тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.*

Напомним, что оператор $F : C^0 \longrightarrow C^0$ называется *c-непрерывным*, если для произвольных $x \in C^0$ и $x_k \in C^0$, $k \in \mathbb{N}$, для которых $x_k \xrightarrow{\text{лок.},\, C^0} x$ при $k \to \infty$, вытекает, что

$Fx_k \xrightarrow{\text{лок.},\, C^0} Fx$ при $k \to \infty$ ($y_k \xrightarrow{\text{лок.},\, C^0} y$ при $k \to \infty$, если последовательность элементов $y_k \in C^0,\ k \geq 1$, ограничена и $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{|t|\leq T} |y_k(t) - y(t)| = 0$ для каждого $T > 0$). Понятие c-непрерывного отображения было введено (на языке „ε, δ") Э. Мухамадиевым [2] при исследовании дифференциальных операторов, а затем его изучение было продолжено в [3–10] и других работах. Рассмотренное выше определение c-непрерывного отображения введено автором (см., например, [11, 12]).

Цель данной статьи — доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Оператор $\mathcal{D} : C^0 \longrightarrow C^0$ имеет обратный непрерывный оператор тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.*

Обоснование этой теоремы осуществляется с помощью следующего утверждения.

Лемма [1]. *Пусть*:

1) $g(x)$ — *непрерывная на $\mathbb{R}$ функция со значениями в $\mathbb{R}$*;

2) $g(x) - x$ — *строго убывающая на $\mathbb{R}$ функция*;

3) *для чисел $x^*, y^* \in \mathbb{R}$ $(x^* < y^*)$ имеет место равенство*

$$g(x^*) - g(y^*) = y^* - x^*.$$

Тогда найдутся отрезок $[a, b] \subset [x^*, y^*]$ и числа $c \in \mathbb{R},\ u, v \in [a, b]$ $(u \neq v)$ такие, что

$$\{g(x) + c : x \in [a, b]\} \subset [a, b]$$

и

$$g(u) + c = v, \qquad g(v) + c = u.$$

Доказательство теоремы 2. *Достаточность.* Из включения $f \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ вытекает, что оператор $\mathcal{D} : C^0 \longrightarrow C^0$ имеет обратный непрерывный оператор. Это утверждение — следствие теоремы 1.

Необходимость. Пусть оператор $\mathcal{D}$ имеет обратный непрерывный оператор. Тогда для каждого $h \in C^0$ уравнение

$$z(t + 1) - f(z(t)) = h(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

имеет единственное в пространстве C^0 решение. Положим в уравнении (1) $h(t) = d$, где d — произвольное вещественное число, и пусть $y(t)$ — решение этого уравнения. Для каждого $\tau \in \mathbb{R}$ функция $y(t + \tau)$, очевидно, также является решением уравнения (1) и в силу единственности $y(t + \tau) = y(t)$, т. е. $y(t) = y = \mathrm{const}$, откуда $y - f(y) = d$. Отсюда и из обратимости оператора $\mathcal{D}$ следует, что уравнение

$$x - f(x) = d$$

для каждого $d \in \mathbb{R}$ имеет единственное решение $y \in \mathbb{R}$. На основании этого и произвольности $d \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $R(I - f) = \mathbb{R}$, а отображение $I - f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является обратимым. Из непрерывности отображения $(I-f)^{-1}$ (на основании непрерывности оператора $\mathcal{D}^{-1}$) вытекает, что функция $x - f(x)$ имеет обратную функцию. Следовательно, функция $x - f(x)$ является строго монотонной на $\mathbb{R}$.

Докажем, что выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \tag{2}$$

если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x \neq y$, или неравенство

$$|f(x) - f(y)| > |x - y| \tag{3}$$

для тех же x и y.

Предположим, что ни одно из этих неравенств не выполняется. В этом случае на основании непрерывности отображения f найдутся такие точки $x^*,\ y^* \in \mathbb{R}$ $(x^* < y^*)$, что

$$f(x^*) - f(y^*) = x^* - y^* \tag{4}$$

или

$$f(x^*) - f(y^*) = y^* - x^* \tag{5}$$

(во втором случае функция $f(x) - x$ будет строго убывающей на $\mathbb{R}$).

Равенство (4), очевидно, противоречит обратимости отображения $I - f$.

Равенство (5) противоречит непрерывности отображения $\mathcal{D}^{-1}$. Действительно, в силу (5) и леммы найдутся отрезок $[a,b] \subset [x^*, y^*]$ и числа $c \in \mathbb{R},\ u, v \in [a,b]$ $(u \neq v)$ такие, что

$$\{f(x) + c : x \in [a,b]\} \subset [a,b] \tag{6}$$

и

$$f(u) + c = v, \tag{7}$$

$$f(v) + c = u. \tag{8}$$

Тогда

$$f(f(x) + c) + c = x \ \text{ для всех } \ x \in [u,v] \tag{9}$$

или

$$\{x \in [u,v] : f(f(x) + c) + c \neq x\} \neq \emptyset. \tag{10}$$

Заметим, что соотношение (9) выполняется для непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$, сужение $f|_{[u,v]}(x)$ которой на $[u,v]$ является строго монотонной функцией с симметричным относительно прямой $y = x - c$ графиком.

В случае выполнения соотношения (9) возьмем произвольную непрерывную на $[0,1]$ функцию $\delta(t)$, для которой $\delta(0)=u, \delta(1)=v$ и $u\le\delta(t)\le v$ для всех $t\in[0,1]$. Рассмотрим 2-периодическую функцию $z(t)$, сужение которой на $[0,2]$ совпадает с функцией

$$\gamma(t)=\begin{cases}\delta(t), & \text{если} \quad t\in[0,1];\\ f(\delta(t-1))+c, & \text{если} \quad t\in(1,2].\end{cases}$$

Из ограничений на функцию $\delta(t)$ и из соотношений (7) и (8) вытекает, что $z\in C^0$ и

$$z(t+1)=f(z(t))+c$$

для всех $t\in\mathbb{R}$. Отсюда с учетом произвольности выбора функции $\delta(t)$ вытекает, что оператор $\mathcal{R}: C^0\longrightarrow C^0$ не может иметь обратного непрерывного оператора.

Рассмотрим функцию

$$F(x)=f(x)+c.$$

В случае выполнения соотношения (10) существуют неподвижная точка $z^*\in[u,v]$ для F^2 и число $\alpha\in[u,v]$, для которых

$$z^*<\alpha \tag{11}$$

и

$$F^2(x)>x \ \text{ для всех } \qquad x\in(z^*,\alpha) \tag{12}$$

или

$$\alpha<z^* \tag{13}$$

и

$$F^2(x)<x \ \text{ для всех } \qquad x\in(\alpha,z^*). \tag{14}$$

Здесь учтены непрерывность и строгое убывание функции $f(x)-x$ на отрезке $[x^*,y^*]$.

Не ограничивая общности, можно считать, что выполняются соотношения (11) и (12).

Рассмотрим разностное уравнение

$$x(t+1)=f(x(t))+c+h(t),\ t\in\mathbb{R}, \tag{15}$$

где $h=h(t)$ — произвольная дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция, носитель которой содержится в $[0,\varepsilon],\ 0<\varepsilon<1$, и $R(h)=[a-z^*,b-z^*]$. Определим решение этого уравнения, сужение которого на интервал $(-\infty,1]$ совпадает с z^*. Из ограничений на $h(t)$ вытекает, что это решение представляется в виде

$$y(t)=\begin{cases}z(t), & \text{если} \quad t\in\Gamma;\\ z^*, & \text{если} \quad t\in\mathbb{R}\setminus\Gamma,\end{cases}$$

где

$$\Gamma = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{t : k \le t \le k + \varepsilon\}$$

и $z(t)$ — такая функция, что ее множество значений содержится в $[a, b]$ и для некоторого числа $t^* \in [1, 1 + \varepsilon)$ выполняются соотношения

$$z(t^* + 2k) = z^*, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{16}$$

$$\alpha > z(t) > z^* \text{ для всех } t \in (t^*, t^* + \nu]. \tag{17}$$

Здесь ν — некоторое положительное достаточно малое число. Выделенные свойства решения $y(t)$ уравнения (15) устанавливаются с помощью метода шагов с использованием соотношения (6).

Заметим, что на основании обратимости оператора $\mathcal{R}$ функция $y(t)$ является единственным решением уравнения (15).

Из (12), (16), (17) и соотношения

$$z(t + 1) = F(z(t)),\ t \ge 1,$$

вытекает, что существует такое число $\mu > 0$, что для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\varliminf_{s \to +\infty} \inf_{t \in [2[s]-1+t^*+\nu/m, 2[s]-1+t^*+\nu]} |z(t) - z^*| \ge \mu \tag{18}$$

(здесь $[s]$ — целая часть числа s). Соотношение (18) также можно получить, использовав соответствующие результаты из [13, 14].

Рассмотрим функции

$$h_\delta(t) = h(t + \delta),$$

$$z_\delta(t) = z(t + \delta),$$

где $\delta \in \mathbb{R}$. Очевидно, что

$$\mathcal{R} z_\delta = h_\delta$$

для каждого $\delta \in \mathbb{R}$ и

$$\lim_{\delta \to 0} \|h - h_\delta\|_{C^0} = 0. \tag{19}$$

Согласно (16)

$$z(t^* - \delta + 2k) = z^*,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{20}$$

Поэтому на основании (18)

$$\varliminf_{\delta \to -0} \|z - z_\delta\|_{C^0} \geq \mu.$$

Отсюда и из (19) вытекает, что оператор $\mathcal{R} : C^0 \longrightarrow C^0$ не может иметь обратного непрерывного оператора и в случае выполнения соотношения (10).

Заметим, что аналогичные рассуждения можно провести и в случае выполнения соотношений (13) и (14).

Следовательно, предположение, что ни одно из соотношений (2) и (3) не выполняется, является ложным.

Таким образом, неравенство (2) или (3) выполняется. Отсюда вытекает, что на основании строгой монотонности функции $x - f(x)$ на $\mathbb{R}$ и равенства $R(I - f) = \mathbb{R}$ имеет место включение $f \in \mathcal{F}_1$, если для f выполняется неравенство (2). Если же выполняется неравенство (3), то или функция $f(x) - x$ строго возрастает на $\mathbb{R}$ и тогда, очевидно, выполняется соотношение

$$\{g(x) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}, \tag{21}$$

где $g(x) = x + f(x)$, или функция $g(x)$ строго убывает на $\mathbb{R}$. Во втором случае также выполняется соотношение (21). Действительно, согласно обратимости отображения $\mathcal{D}$ разностное уравнение

$$x(t+1) + x(t) - g(x(t)) = h(t),\ t \in \mathbb{R},$$

имеет единственное 2-периодическое решение $x \in C^0$ для каждой 2-периодической функции $h \in C^0$, для которой

$$h(n) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n - \text{четное число;} \\ \gamma, & \text{если} \quad n - \text{нечетное число} \end{cases}$$

(здесь γ — произвольное вещественное число). Поэтому

$$x(n+2) = x(n) - g(x(n)) + g(-x(n) + g(x(n))) + \gamma$$

для всех четных n и, следовательно,

$$-g(z) + g(-z + g(z)) + \gamma = 0$$

для некоторого $z \in \mathbb{R}$, если учесть, что $x(n+2) = x(n)$ для всех четных n. Отсюда с учетом произвольности $\gamma \in \mathbb{R}$ получаем

$$\{-g(x) + g(-x + g(x)) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}. \tag{22}$$

Поскольку функции $-g(x),\ g(-x + g(x))$ являются непрерывными и строго возрастающими на $\mathbb{R}$ и $\{-x + g(x) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, то из (22) вытекает, что выполняется соотношение (21).

Таким образом, $f \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

Теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что условия обратимости оператора $\mathcal{D}$ в пространстве $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ приведены в [15]. Условия липшицевой обратимости этого оператора в пространствах $l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, и C^0 приведены соответственно в [16, 17].

1. *Слюсарчук В.Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости нелинейного разностного оператора $(\mathcal{D}x)(t) = x(t+1) - f(x(t))$ в пространстве ограниченных и непрерывных на оси функций // Мат. сб. — 2001. — **192**, № 4. — С. 87–98.
2. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269–274.
3. *Слюсарчук В.Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. — 1981. — **116**, № 4. — С. 483–501.
4. *Слюсарчук В.Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1981. — № 8. — С. 34–37.
5. *Слюсарчук В.Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. — 1986. — **130**, № 1. — С. 86–104.
6. *Слюсарчук В.Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. — 1987. — **42**, № 2. — С. 262–267.
7. *Слюсарчук В.Е.* Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 5. — С. 660–662.
8. *Слюсарчук В.Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Там же. — 1989. — **41**, № 2. — С. 201–205.
9. *Курбатов В.Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990.
10. *Чан Хыу Бонг.* Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1993.
11. *Слюсарчук В.Е.* Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений. — Душанбе, 1987. — С. 102–103.
12. *Слюсарчук В.Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Мат. физика и нелинейн. механика. — 1991. — Вып. 15. — С. 32–35.
13. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1986.
14. *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. — Киев: Наук. думка, 1989.
15. *Слюсарчук В.Ю.* Необхідні і достатні умови оборотності нелінійних різницевих відображень у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ // Мат. студ. — 2000. — **13**, № 1. — С. 63–73.
16. *Слюсарчук В.Е.* Необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости нелинейных разностных операторов в пространствах $l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$ // Мат. заметки. — 2000. — **68**, № 3. — С. 448–454.
17. *Слюсарчук В.Ю.* Необхідні і достатні умови ліпшицевої оборотності нелінійного різницевого оператора $(\mathcal{D}x)(t) = x(t+1) - f(x(t))$ у просторі обмежених і неперервних на осі функцій // Мат. студ. — 2001. — **16**, № 2. — С. 185–194.

Получено 16.04.2002