Нелінійні коливання 1 • 1998

УДК 517.9

УСЕРЕДНЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПОВІЛЬНИМИ ТА ШВИДКИМИ ЗМІННИМИ

Р.І. Петришин, Я.Р. Петришин

Чернів. ун-т,
Україна, 274012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

By using the averaging method, we prove the solvability of boundary-value problems for nonlinear oscillation systems. The deviation of solutions of original and averaged problems is estimated.

Доведена розв'язність крайових задач для нелінійних коливних систем за допомогою методу усереднення. Встановлено оцінки відхилення розв'язків вихідних і усереднених задач.

Нехай задано типову для багатьох задач нелінійної механіки [1] систему звичайних диференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\varphi,\tau), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\tau), \tag{1}$$

де $x \in D \subset R^n$, $\varphi \in R^m$, $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon t = \tau$ — „повільний час", $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малий додатний параметр, функції a, b, ω гладкі по x, φ, τ і 2π-періодичні по кожній із координат φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, вектора φ, D — обмежена область, R^j, $j = n$, m, — j-вимірний дійсний евклідів простір. Згідно з прийнятою термінологією змінні $x = (x_1,...,x_n)$ називаються повільними, а $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_m)$ — швидкими.

Задамо для рівнянь (1) крайові умови

$$\Phi(x,\varphi) \equiv (\Phi_1(x,\varphi), \Phi_2(x,\varphi)) = (d_1, d_2),$$

в яких Φ_1 і Φ_2 — відповідно n- і m-вимірні функціонали, d_1 і d_2 — сталі вектори. Нехай

$$\Phi_1(x,\varphi) = \int_0^L f(x,\varphi,\tau)d\tau, \quad \Phi_2(x,\varphi) = \int_0^L [A(x,\tau)\varphi + g(x,\varphi,\tau)]d\tau,$$

де f і g — 2π-періодичні по φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, вектор-функції, $A(x,\tau)$ — $m \times m$ -матриця, тобто інтегральні крайові умови можна подати у вигляді

$$\int_0^L f(x,\varphi,\tau)]d\tau = d_1, \tag{2.1}$$

$$\int_0^L [A(x,\tau)\varphi + g(x,\varphi,\tau)]d\tau = d_2. \tag{2.2}$$

Розв'язати задачу (1), (2.1), (2.2) — означає знайти такий неперервно диференційовний по $\tau \in [0, L]$ розв'язок $(x(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\varepsilon))$ системи (1), що для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ мають місце тотожності

$$\int_0^L f(x(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\varepsilon), \tau)d\tau \equiv d_1,$$

$$\int_0^L [A(x(\tau,\varepsilon), \tau)\varphi(\tau,\varepsilon)) + g(x(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\varepsilon), \tau)]d\tau \equiv d_2.$$

Зауважимо, що теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь досить повна і змістовна. Різні аспекти цієї теорії та обширна бібліографія наведені в монографіях [2, 3]. В даній роботі для вивчення умов існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2.1), (2.2) використаємо метод усереднення по всіх швидких змінних φ. Зазначимо, що питання обгрунтування різних схем усереднення в деяких крайових задачах досліджувались у роботах [4 – 7].

Для того щоб метод усереднення правильно описував еволюцію розв'язків (x, φ) системи (1) на часовому відрізку $[0, L]$, потрібно накласти певні обмеження на функцію $F(x, \varphi, \tau) = (a(x, \varphi, \tau),\ b(x, \varphi, \tau),\ f(x, \varphi, \tau),\ g(x, \varphi, \tau))$ і частоти $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau))$ [6]. Вважатимемо, що $F(x, \varphi, \tau)$ має неперервні частинні похідні по x, φ, τ до другого порядку включно, а її коефіцієнти Фур'є $F_k = F_k(p)$, $p = (x, \tau) = (p_1, \ldots, p_{n+1})$, задовольняють нерівність

$$\sup\|F_0\| + \sup\left\|\frac{\partial F_0}{\partial p}\right\| + \sum_{j=1}^{n+1}\sup\left\|\frac{\partial^2 F_0}{\partial p \partial p_j}\right\| + \sum_{k\neq 0}\Bigg[\|k\|\sup\|F_k\| +$$

$$+\sup\left\|\frac{\partial F_k}{\partial p}\right\| + \frac{1}{\|k\|}\sum_{j=1}^{n+1}\sup\left\|\frac{\partial^2 F_k}{\partial p \partial p_j}\right\|\Bigg] \leq c_1, \tag{3}$$

в якій супремум береться по всіх $p \in D \times [0, L]$. Тут і далі під нормою матриці будемо розуміти суму модулів її елементів.

Припустимо, що при деякому натуральному $l \geq m$ справджуються умови

$$\omega(\tau) \in C^{l-1}_{[0,L]}, \quad \det\left(W_l^T(\tau)W_l(\tau)\right) > 0 \quad \forall \tau \in [0, L], \tag{4}$$

де через $W_l(\tau)$ і $W_l^T(\tau)$ позначено відповідно матрицю

$$\left(\frac{d^{r-1}}{d\tau^{r-1}}\omega_\nu(\tau)\right)_{\nu,r=1}^{m,l}$$

і транспоновану до неї. При виконанні умов (4) для кожної неперервно диференційовної на $[0, L]$ функції $y(\tau)$ справедлива рівномірна оцінка осциляційного інтеграла [6]:

$$\left\|\int_0^\tau y(\tau)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau (k, \omega(\tau))d\tau\right\}d\tau\right\| \leq \sigma_0\varepsilon^{\frac{1}{l}}\left[\max_{[0,L]}\|y(\tau)\| + \frac{1}{\|k\|}\max_{[0,L]}\left\|\frac{dy(\tau)}{d\tau}\right\|\right] \tag{5}$$

$$\forall (\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0)$$

і цілочислових векторів $k = (k_1, ..., k_m) \neq 0$ із сталою σ_0, яка залежить від $\omega(\tau)$, але не залежить від $y(\tau)$, k і ε. Тут $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця, $(k, \omega(\tau))$ — скалярний добуток векторів k і $\omega(\tau)$, ε_0 — досить мале.

Поряд з вихідною розглянемо усереднену по φ задачу

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}(\bar{x}, \tau), \quad \int_0^L \bar{f}(\bar{x}, \tau) d\tau = d_1, \tag{6.1}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \bar{b}(\bar{x}, \tau), \quad \int_0^L [A(\bar{x}, \tau)\bar{\varphi} + \bar{g}(\bar{x}, \tau)] d\tau = d_2, \tag{6.2}$$

де $\overline{F}(x, \tau)$ — середнє значення функції $F(x, \varphi, \tau)$:

$$\bar{F}(x, \tau) = (2\pi)^{-m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} F(x, \varphi, \tau) d\varphi_1 \ldots d\varphi_m. \tag{7}$$

Задача (6.1), (6.2) розпадається на дві задачі, кожна з яких, очевидно, значно простіша, ніж (1), (2.1), (2.2), в першу чергу, тому, що задача (6.1) не залежить від швидких змінних $\bar{\varphi}$ і для її розв'язання можна використовувати чисельні методи із значно більшим кроком або чисельно-аналітичні методи [2, 3]. Якщо $\bar{x} = \bar{x}(\tau, x^0)$, $\bar{x}(0, x^0) = x^0$, є розв'язком задачі (6.1), який належить D для всіх $\tau \in [0, L]$, то розв'язок $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\tau,\ x^0,\ \varphi^0,\ \varepsilon)$, $\bar{\varphi}(0,\ x^0,\ \varphi^0,\ \varepsilon) = \varphi^0$ задачі (6.2) при

$$\det U \neq 0, \quad U = \int_0^L A(\bar{x}(\tau, x^0), \tau) d\tau, \tag{8}$$

задається формулою

$$\bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon) = \varphi^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau [\omega(\tau) + \varepsilon \bar{b}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau)] d\tau, \tag{9}$$

де

$$\varphi^0 = U^{-1} \Big[d_2 - \int_0^L (A(\bar{x}(\tau, x^0)), \tau) \bar{\varphi}(\tau, x^0, 0, \varepsilon) + \bar{g}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau) \Big] d\tau, \tag{10}$$

$$\|\varphi^0\| \leq \bar{c}_1 \varepsilon^{-1}, \quad \bar{c}_1 = \text{const}.$$

Таким чином, справедлива наступна лема.

Лема 1. *Якщо існує єдиний розв'язок $\bar{x} = \bar{x}(\tau, x^0)$ задачі (6.1), який належить D при будь-якому $\tau \in [0, L]$, і виконується нерівність (8), то задача (6.2) має єдиний розв'язок (9), в якому φ^0 справджує умови (10).*

Наступна теорема дає відповідь на питання про існування розв'язку вихідної крайової задачі.

Теорема 1. *Нехай:*

1) *функція* $F(x,\varphi,\tau) = (a,b,f,g)$ — *двічі неперервно диференційовна на множині* $D \times R^m \times [0,L]$, 2π*-періодична по* φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, *а її коефіцієнти Фур'є задовольняють нерівність (3);*

2) *виконуються умови (4) і умови леми 1;*

3) $A(x,\tau)$ *і* $\dfrac{\partial}{\partial x}A(x,\tau)$ — *неперервні по* x, τ, *причому*

$$\|A(x,\tau)\| + \left\|\frac{\partial}{\partial x}A(x,\tau)\right\| \le c_1 \quad \forall (x,\tau) \in D \times [0,L];$$

4) *матриця*

$$S = \int\limits_0^l \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}(\tau,x^0),\tau)}{\partial x}\frac{\partial \bar{x}(\tau,x^0)}{\partial x^0}d\tau$$

невироджена.

Тоді при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ *для кожного* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *існують розв'язок* $(x(\tau,\varepsilon)$, $\varphi(\tau,\varepsilon))$ *задачі (1), (2.1), (2.2) і функція* $\psi(\varepsilon)$, *які задовольняють нерівності*

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,x^0)\| + \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon) - \psi(\varepsilon)\| \le c_2\varepsilon^{\frac{1}{l}},$$

$$\|\psi(\varepsilon)\| \le c_2'\varepsilon^{\frac{1}{l}-1} \qquad \forall (\tau,\varepsilon) \in [0,L] \times (0,\varepsilon_0] \tag{11}$$

зі сталими c_2 *і* c_2', *незалежними від* ε.

Доведення. Розв'язок задачі (1), (2.1), (2.2) шукаємо у вигляді

$$x(\tau,\varepsilon) = x(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\varepsilon), \qquad x(0,\varepsilon) = x^0 + y,$$

$$\varphi(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\varepsilon), \qquad \varphi(0,\varepsilon) = \varphi^0 + \psi,$$

а невідомі параметри $y \in R^n$ і $\psi \in R^m$ визначаємо із крайових умов. На підставі умови (2.1) дістанемо рівність

$$y = -S^{-1}\Bigg\{ \int\limits_0^L [\bar{f}(x,\tau) - \bar{f}(\bar{x},\tau)]d\tau + \int\limits_0^L \Bigg[\bar{f}(\bar{x},\tau) - \bar{f}(\bar{x}(\tau,x^0),\tau - $$

$$- \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}(\tau,x^0),\tau)}{\partial x}\frac{\partial \bar{x}(\tau,x^0)}{\partial x^0}y\Bigg]d\tau + \int\limits_0^L \tilde{f}(x,\varphi,\tau)d\tau\Bigg\} = M_1(y,\psi,\varepsilon), \tag{12}$$

де $x = x(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\varepsilon)$, $\bar{x} = \bar{x}(\tau,x^0+y)$, $\tilde{f}(x,\varphi,\tau) = f(x,\varphi,\tau) - \bar{f}(x,\tau)$.

Оскільки середнє по φ в кубі періодів функції $\tilde{f}(x,\varphi,\tau)$ тотожно дорівнює нулю, то із оцінок (3), (5) одержуємо нерівність

$$\left\|\int\limits_0^L \tilde{f}(x,\varphi,\tau)d\tau\right\| \le \sum_{k\ne 0}\left\|\int\limits_0^L f_k(x,\tau)e^{i(k,\theta)}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau (k,\omega(\tau))d\tau}d\tau\right\| \le \sigma_0 c_1(1+c_1)\varepsilon^{\frac{1}{l}}, \tag{13}$$

в якій

$$\theta = \varphi - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \omega(\tau)d\tau.$$

Зазначимо, що із (3), (5) випливає також нерівність [6]

$$\|\Delta x\| + \|\Delta\varphi\| + \left\|\frac{\partial}{\partial y}\Delta x\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial\psi}\Delta x\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial\psi}\Delta\varphi\right\| \le \sigma\varepsilon^{\frac{1}{l}}, \tag{14}$$

де стала σ не залежить від ε, $\Delta x = x - \bar{x}$, $\Delta\varphi = \varphi - \bar{\varphi}$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\tau,\, x_0 + y,\, \varphi_0 + \psi,\, \varepsilon)$, тому

$$\left\|\int\limits_0^L [\,\bar{f}(x,\tau) - \bar{f}(\bar{x},\tau)]d\tau\right\| \le c_1\sigma L\varepsilon^{\frac{1}{l}}. \tag{15}$$

Оскільки

$$\bar{x}(\tau, x^0 + y) = \bar{x}(\tau, x^0) + \frac{\partial\bar{x}(\tau, x^0)}{\partial x^0}y + X(\tau, y),$$

$$X(\tau, y) = \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial\bar{x}(\tau, x^0 + ty)}{\partial x^0} - \frac{\partial\bar{x}(\tau, x^0)}{\partial x^0}\right]dty,$$

$$\|X(\tau, y)\| \le Ln^2c_1e^{2c_1L}\|y\|^2, \qquad \left\|\frac{\partial\bar{x}(\tau, x^0 + y)}{\partial x^0}\right\| \le ne^{c_1L},$$

$$\sum_{j=1}^n \left\|\frac{\partial^2\bar{x}(\tau, x^0 + y)}{\partial y\partial y_j}\right\| \le Ln^2c_1e^{3c_1L},$$

то другий із інтегралів у правій частині рівності (12) можна оцінити зверху величиною $c_3\|y\|^2$, де

$$c_3 = Ln^2c_1(1 + Le^{c_1L})e^{3c_1L}.$$

Об'єднуючи нерівності (13), (15), із (12) отримуємо оцінку

$$\|M_1(y,\psi,\varepsilon)\| \le \|S^1\|\Big[(\sigma_0(1 + c_1)c_1 + c_1\sigma L)\varepsilon^{\frac{1}{l}} + c_3\|y\|^2\Big], \tag{16}$$

з якої випливає, що M_1 при кожних $\psi \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ відображає множину $K_1 = \{y\colon y \in R^n,\ \|y\| \le c_4\varepsilon^{\frac{1}{l}}\}$, $c_4 = 2\|S^{-1}\|c_1(\sigma L + \sigma_0(1 + c_1))$ в себе при умові

$$\varepsilon_0 \le (2c_3c_4\|S^{-1}\|)^{-l}.$$

Покажемо, що $M\colon K_1 \to K_1$ є відображенням стиску. Для цього із (12) дістанемо співвідношення

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}M_1(y,\psi,\varepsilon) \;&=\; -S^{-1}\Big\{\int\limits_0^L \Big[\frac{\partial f(x,\varphi,\tau)}{\partial\varphi}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial y} + \frac{\partial f(x,\varphi,\tau)}{\partial x}\frac{\partial\Delta x}{\partial y} + \Big(\frac{\partial\bar{f}(x,\tau)}{\partial x} - \\ &-\; \frac{\partial\bar{f}(\bar{x},\tau)}{\partial x}\Big)\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}\Big]d\tau + \int\limits_0^L \Big[\frac{\partial f(x,\varphi,\tau)}{\partial\varphi}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{f}(x,\varphi,\tau)}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}\Big]d\tau + \\ &+\; \int\limits_0^L \Big[\frac{\partial\bar{f}(\bar{x},\tau)}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x^0} - \frac{\partial\bar{f}(\bar{x}(\tau,x^0),\tau)}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}(\tau,x^0)}{\partial x^0}\Big]d\tau\Big\}.\end{aligned}$$

За допомогою нерівностей (3), (5), (14) легко одержати оцінку

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}M_1(y,\psi,\varepsilon)\right\| \leq \|S^{-1}\|\{[2\sigma c_1 L(1+ne^{c_1 L})+$$
$$+ \sigma_0(1+c_1)c_1^2(1+L)ne^{c_1 L}]\varepsilon^{\frac{1}{l}} + c_1 n^2 L^2 e^{3c_1 L}\|y\|\},$$

з якої з урахуванням умови $\|y\| \leq c_4\varepsilon^{\frac{1}{l}}$ випливає

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}M_1(y,\psi,\varepsilon)\right\| \leq \frac{1}{2}$$

для всіх $y \in K_1$, $\psi \in R^m$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ при досить малому $\varepsilon_0 > 0$. Таким чином, існує єдиний розв'язок $y = y(\psi,\varepsilon) \in K_1$ рівняння (12), який неперервно залежить від ψ.

Підставимо знайдене значення $y = y(\psi,\varepsilon)$ в умову (2.2), внаслідок чого отримаємо рівняння для знаходження ψ:

$$\psi = -U^{-1}\left\{\int_0^L [A(x,\tau)\varphi - A(\bar{x},\tau)\bar{\varphi}]d\tau + \int_0^L [g(x,\varphi,\tau) - \bar{g}(\bar{x},\tau)]d\tau - \right.$$
$$\left. - \int_0^L A(\bar{x},\tau)\psi d\tau\right\} \equiv M_2(\psi,\varepsilon), \tag{17}$$

в якому $x = x(\tau, x^0+y, \varphi^0+\psi,\varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau,x^0+y, \varphi^0+\psi,\varepsilon)$, $\bar{x} = \bar{x}(\tau,x^0)$, $\bar{\varphi}(\tau,x^0, \varphi^0, \varepsilon)y = y(\psi,\varepsilon)$. Як і при доведенні оцінки (16), легко встановити, що

$$\|M_2(\psi,\varepsilon)\| \leq c_5\varepsilon^{\frac{1}{l}-1} + c_6\varepsilon^{\frac{1}{l}}\|\psi\| \tag{18}$$

для всіх $(\psi,\varepsilon) \in R^m \times (0,\varepsilon_0]$, де

$$c_5 = \left(c_1 + \int_0^L \|\omega(\tau)\|d\tau\right)c_6 + c_1 L\|U^{-1}\|\left(\sigma + \frac{c_6}{\|U^{-1}\|} + 2(1+c_1 L)\right),$$

$$c_6 = c_1 L\|U^{-1}\|(\sigma + nc_4 e^{c_1 L}).$$

На підставі нерівності (18) робимо висновок, що $M_2(\psi,\varepsilon)$ відображає множину $K_2 = \{\psi : \psi \in R^m, \|\psi\| \leq 2c_5\varepsilon^{\frac{1}{l}-1}\}$ в себе для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при $\varepsilon_0 \leq (2c_6)^{-l}$. Крім того, відображення $M_2(\psi,\varepsilon)$ неперервне по ψ, тому, згідно з теоремою Брауера [8], існує розв'язок $\psi = \psi(\varepsilon) \in K_2$ рівняння (17), тобто існує розв'язок

$$x(\tau,\varepsilon) = x(\tau,x^0+y(\psi(\varepsilon),\varepsilon),\varphi^0+\psi(\varepsilon),\varepsilon),$$

$$\varphi(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau,x^0+y(\psi(\varepsilon),\varepsilon),\varphi^0+\psi(\varepsilon),\varepsilon)$$

крайової задачі (1), (2.1), (2.2), для якого

$$\|y(\psi(\varepsilon),\varepsilon)\| \leq c_4\varepsilon^{\frac{1}{l}}, \quad \|\psi(\varepsilon)\| \leq 2c_5\varepsilon^{\frac{1}{l}-1} \quad \forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]. \tag{19}$$

Легко бачити, що нерівності (11) із сталими $c_2 = 2\sigma + nc_4e^{c_1L}(1 + c_1L)$ і $c_2' = 2c_5$ випливають із нерівностей

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,x^0)\| \le \|x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,x^0 + y(\psi(\varepsilon),\varepsilon))\| + \|\bar{x}(\tau,x^0 + y(\psi(\varepsilon),\varepsilon)) - \bar{x}(\tau,x^0)\|,$$

$$\|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,x^0,\varphi_0,\varepsilon)\| \le \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,x^0 + y(\psi(\varepsilon),\varepsilon),$$

$$\varphi^0 + \psi(\varepsilon),\varepsilon)\| + \left\| \int\limits_0^\tau [\bar{b}(\bar{x}(\tau,x^0 + y(\psi(\varepsilon),\varepsilon),\tau) - \bar{b}(\bar{x}(\tau,x^0),\tau)]d\tau \right\|$$

і оцінок (14), (19).

На завершення доведення теореми накладемо обмеження $c_2\varepsilon_0^{\frac{1}{l}} \le \frac{1}{2}\rho_1$, в якому додатна стала ρ_1 визначається умовою, що крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau,\ x^0)$ належить D разом із своїм ρ_1-околом при $\tau \in [0,L]$. Це обмеження гарантує, що розв'язок $(x(\tau,\varepsilon),\ \varphi(\tau,\ \varepsilon))$ крайової задачі визначений для всіх $\tau \in [0,L]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ і не виходить для вказаних τ, ε із $D \times R^m$. Теорему доведено.

Зазначимо, що відсутність властивості стиску неперервного відображення M_2 визначає лише існування розв'язку задачі (1), (2.1), (2.2), але не його єдиність. Крім того, аналіз нерівностей (11) в теоремі 1 вказує на ефективну оцінку відхилення тільки повільних компонент розв'язків вихідної та усередненої задач: $\|x - \bar{x}\| \le c_2\varepsilon^{\frac{1}{l}}$. Для швидких компонент ця оцінка з урахуванням обмеження на $\psi(\varepsilon)$ набуває вигляду $\|\varphi - \bar{\varphi}\| \le$ $\le \bar{c}_2\varepsilon^{\frac{1}{l}-1} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, в зв'язку з чим виникає потреба вводити поправку $\psi(\varepsilon)$. Виявляється, що цього можна уникнути для крайової задачі, в якій матриця $A(x,\tau)$ не залежить від x, тобто $A(x,\ \tau) \equiv A(\tau)$.

Теорема 2. *Якщо $A(x,\tau) \equiv A(\tau)$ і виконуються умови теореми 1, то для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ (ε_0 — досить мале) існує єдиний розв'язок $(x(\tau,\varepsilon),\ \varphi(\tau,\varepsilon))$ задачі (1), (2.1), (2.2), який справджує нерівність*

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,x^0)\| + \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)\| \le c_7\varepsilon^{\frac{1}{l}} \tag{20}$$

для всіх $\tau \in [0,L]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, де стала c_7 не залежить від ε.

Доведення. Розглянемо єдиний розв'язок $y = y(\psi,\varepsilon) \in K_1$ рівняння (12), який можна визначити методом послідовних наближень:

$$y(\psi,\varepsilon) = \lim_{j\to\infty} y_j(\psi,\varepsilon), y_{j+1}(\psi,\varepsilon) = M_1(y_j(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon), \quad j \ge 0; \quad y_0(\psi,\varepsilon) \equiv 0.$$

На підставі рівності (12) обчислимо частинні похідні функції $y_{j+1} = y_{j+1}(\psi,\ \varepsilon)$ по змінних ψ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_{j+1}}{\partial\psi} &= -S^{-1}\Big\{ \int\limits_0^L \Big[\frac{\partial f}{\partial x}\Big(\frac{\partial(x - \bar{x})}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial\psi} + \frac{\partial(x - \bar{x})}{\partial\psi}\Big) + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\Big(\frac{\partial(\varphi - \bar{\varphi})}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial\psi} + \\
&+ \frac{\partial(\varphi - \bar{\varphi})}{\partial\psi}\Big)\Big]d\tau + \int\limits_0^L \Big[\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial\psi} + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial\psi}\Big]d\tau + \\
&+ \int\limits_0^L \Big[\frac{\partial\bar{f}(\bar{x},\tau)}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x^0} - \frac{\partial\bar{f}(\bar{x}(\tau,x^0),\tau)}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}(\tau,x^0)}{\partial x^0}\Big]d\tau\frac{\partial y_j}{\partial\psi} +
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^L \left[\frac{\partial \bar f(x,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial \bar f(\bar x,\tau)}{\partial x}\right]\frac{\partial \bar x}{\partial x^0} d\tau \frac{\partial y_j}{\partial \psi}\Big\}.$$

Тут $f = f(x,\varphi,\tau)$, $\widetilde{f} = f - \bar f(x,\tau)$, $x = x(\tau, x^0 + y_j,\ \varphi^0 + \psi, \varepsilon)$, $\bar x = \bar x(\tau,\ x^0 + y_j)$, $\varphi =$ $= \varphi(\tau,\ x^0 + y_j,\ \varphi^0 + \psi, \varepsilon)$, $\bar\varphi = \bar\varphi(\tau,\ x^0 + y_j,\ \varphi^0 + \psi, \varepsilon)$, $y_j = y_j(\psi,\varepsilon)$. З урахуванням нерівностей (3), (5), (14) дістанемо оцінку

$$\left\|\frac{\partial y_{j+1}}{\partial \psi}\right\| \le c_8 \varepsilon^{\frac{1}{l}} \left\|\frac{\partial y_j}{\partial \psi}\right\| + c_9 \varepsilon^{\frac{1}{l}} \quad \forall (\psi,\varepsilon) \in R^m \times (0,\varepsilon_0], \ \ j \ge 0, \tag{21}$$

в якій

$$c_8 = \|S^{-1}\| [2L\sigma + \sigma_0 c_1 (1 + c_1)(1 + L) n e^{c_1 L} + 2L\sigma n^2 e^{c_1 L} + c_1 c_4 L^2 n^2 e^{3 c_1 L}] c_1,$$

$$c_9 = \|S^{-1}\| [2L\sigma + \sigma_0 c_1 (1 + c_1)].$$

Нерівності (21) досить [9], щоб гранична функція $y(\psi,\varepsilon)$ задовольняла умову Ліпшіца

$$\|y(\widetilde{\psi},\varepsilon) - y(\underset{\sim}{\psi},\varepsilon)\| \le 2 c_9 \varepsilon^{\frac{1}{l}} \|\widetilde{\psi} - \underset{\sim}{\psi}\| \tag{22}$$

для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, де $\widetilde{\psi}$ і $\underset{\sim}{\psi}$ — довільні точки простору R^m, а додатне ε_0 справджує нерівність $c_8 \varepsilon_0^{\frac{1}{l}} \le \dfrac{1}{2}$.

У випадку $A(x,\tau) \equiv A(\tau)$ рівняння (17) набуває вигляду

$$\psi = -\Big(\int_0^L A(\tau) d\tau\Big)^{-1} \Big\{ \int_0^L A(\tau) [\varphi(\tau, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \varepsilon) - \bar\varphi(\tau, x^0,\ \varphi^0 + \psi, \varepsilon)] d\tau +$$

$$+ \int_0^L [g(x,\varphi,\tau) - \bar g(\bar x,\tau)] d\tau \Big\} \equiv M_3(\psi,\varepsilon), \tag{23}$$

з якого випливає нерівність $\|M_3(\psi,\varepsilon)\| \le c_{10} \varepsilon^{\frac{1}{l}}$ для всіх $\psi \in R^m$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ зі сталою

$$c_{10} = \left\|\Big(\int_0^L A(\tau) d\tau\Big)^{-1}\right\| \Big[(\sigma + L c_1 c_4) \int_0^L \|A(\tau)\| d\tau + \sigma_0 c_1 (1 + c_1) + L n c_1 c_4 e^{c_1 L}\Big].$$

Таким чином, для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ M_3 відображає множину $K_3 = \{\psi\colon\ \psi \in R^m,\ \|\psi\| \le$ $\le c_{10} \varepsilon^{\frac{1}{l}}\}$ в себе. Доведемо тепер властивість стиску відображення M_3. Маємо

$$\left\|M_3(\widetilde{\psi},\varepsilon) - M_3(\underset{\sim}{\psi},\varepsilon)\right\| \le \left\|\Big(\int_0^L A(\tau) d\tau\Big)^{-1}\right\| \Big[\Big\| \int_0^L A(\tau) [(\widetilde{\varphi} - \underset{\sim}{\varphi}) - (\widetilde{\psi} - \underset{\sim}{\psi})] d\tau \Big\| +$$

$$+ \Big\| \int_0^L [g(\widetilde{x},\widetilde{\varphi},\tau) - g(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\psi},\tau)] d\tau \Big\|\Big], \tag{24}$$

де $\widetilde{x} = x(\tau, x^0 + \widetilde{y}, \varphi^0 + \widetilde{\psi}, \varepsilon)$, $\widetilde{\varphi} = \varphi(\tau, x^0 + \widetilde{y}, \varphi^0 + \widetilde{\psi}, \varepsilon)$, $\widetilde{y} = y(\widetilde{\psi}, \varepsilon)$, $\underset{\sim}{x} = x(\tau, x^0 + \underset{\sim}{y}, \varphi^0 + \underset{\sim}{\psi}, \varepsilon)$, $\underset{\sim}{\varphi} = \varphi(\tau, x^0 + \underset{\sim}{y}, \varphi^0 + \underset{\sim}{\psi}, \varepsilon)$, $\underset{\sim}{y} = y(\underset{\sim}{\psi}, \varepsilon)$. Оскільки

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{x} - \underset{\sim}{x}\| &\leq \left(\sup\left\|\frac{\partial}{\partial y}(x - \bar{x})\right\| + \sup\left\|\frac{\partial \bar{x}}{\partial y}\right\|\right)\|\widetilde{y} - \underset{\sim}{y}\| + \sup\left\|\frac{\partial x}{\partial \psi}\right\|\|\widetilde{\psi} - \underset{\sim}{\psi}\| \leq \\
&\leq (\sigma\varepsilon^{\frac{1}{l}} + ne^{c_1 L})\|\widetilde{y} - \underset{\sim}{y}\| + \sigma\varepsilon^{\frac{1}{l}}\|\widetilde{\psi} - \underset{\sim}{\psi}\|
\end{aligned}$$

і виконується нерівність (22), то

$$\|\widetilde{x} - \underset{\sim}{x}\| \leq c_{11}\varepsilon^{\frac{1}{l}}\|\widetilde{\psi} - \underset{\sim}{\psi}\| \quad \forall\widetilde{\psi},\ \underset{\sim}{\psi} \in R^m,\ \tau \in [0, L],\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{25}$$

де $c_{11}(\sigma + ne^{c_1 L})2c_9 + \sigma$.

Аналогічно доводиться оцінка

$$\|\widetilde{\varphi} - \underset{\sim}{\varphi}\| \leq c_{12}\|\widetilde{\psi} - \underset{\sim}{\psi}\|, \quad c_{12} = \sigma + n + (\sigma + Lnc_1e^{c_1 L}). \tag{26}$$

Із нерівності (25) випливає

$$\left\|\int_0^L [g(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}, \tau) - g(\underset{\sim}{x}, \widetilde{\varphi}, \tau)]d\tau\right\| \leq Lc_1c_{11}\varepsilon^{\frac{1}{l}}\|\widetilde{\psi} - \underset{\sim}{\psi}\|. \tag{27}$$

Позначимо далі

$$\widetilde{\theta} = \widetilde{\varphi} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega(\tau)d\tau, \quad \underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{\varphi} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega(\tau)d\tau.$$

На підставі нерівностей (25), (26) і

$$\left|e^{i(k,\widetilde{\theta})} - e^{i(k,\underset{\sim}{\theta})}\right| \leq \|k\|\|\widetilde{\theta} - \underset{\sim}{\theta}\| = \|k\|\|\widetilde{\varphi} - \underset{\sim}{\varphi}\|,$$

$$\begin{aligned}
\left|\left(k, \frac{d\widetilde{\theta}}{d\tau}\right)e^{i(k,\underset{\sim}{\theta})} - \left(k, \frac{d\underset{\sim}{\theta}}{d\tau}\right)e^{i(k,\underset{\sim}{\theta})}\right| &\leq \|k\|\|b(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}, \tau) - b(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\varphi}, \tau)\| + \\
+\|k\|^2c_1\|\widetilde{\varphi} - \underset{\sim}{\varphi}\| &\leq \|k\|^2 2c_1(\|\widetilde{x} - \underset{\sim}{x}\| + \|\widetilde{\varphi} - \underset{\sim}{\varphi}\|
\end{aligned}$$

з оцінки (5) осциляційного інтеграла одержимо

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^L [g(\underset{\sim}{x}, \widetilde{\varphi}, \tau) - g(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\varphi}, \tau)]d\tau\right\| &\leq \sum_{k\neq 0}\left\|\int_0^L g_k(\underset{\sim}{x}, \tau)[e^{i(k,\widetilde{\theta})} - \right. \\
&\left. - e^{i(k,\underset{\sim}{\theta})}]e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau (k,\omega(\tau))d\tau}d\tau\right\| \leq c_{13}\varepsilon^{\frac{1}{l}}\|\widetilde{\psi} - \underset{\sim}{\psi}\|,
\end{aligned} \tag{28}$$

де $c_{13} = c_1(1+2c_1)\sigma_0(c_{11}+c_{12})$. Враховуючи нерівності (3), (5) і (25), із рівнянь для швидких змінних легко отримати оцінку

$$\|(\widetilde{\varphi} - \underset{\sim}{\varphi}) - (\widetilde{\psi} - \underset{\sim}{\psi})\| \le c_1 \int\limits_0^L \|\widetilde{x} - \underset{\sim}{x}\| d\tau + \sum_{k\neq 0} \left\| \int\limits_0^\tau b_k(\underset{\sim}{x}, \tau) \left[e^{i(k,\widetilde{\theta})} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - e^{i(k,\underset{\sim}{\theta})} \right] e^{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau r(k,\omega(\tau))d\tau} d\tau \right\| \le (Lc_1c_{11} + c_{13})\varepsilon^{\frac{1}{l}} \|\widetilde{\psi} - \underset{\sim}{\psi}\|.$$

Із останньої оцінки з урахуванням (24), (27) і (28) одержуємо

$$\left\| M_3(\widetilde{\psi}, \varepsilon) - M_3(\underset{\sim}{\psi}, \varepsilon) \right\| \le \left\| \Big(\int\limits_0^L A(\tau) d\tau \Big)^{-1} \right\| \Big(\int\limits_0^L \|A(\tau)\| d\tau + 1 \Big) (Lc_1c_{11} + c_{13}) \times$$

$$\times \varepsilon^{\frac{1}{l}} \left\| \widetilde{\psi} - \underset{\sim}{\psi} \right\| \le \frac{1}{2} \left\| \widetilde{\psi} - \underset{\sim}{\psi} \right\| \qquad \forall \widetilde{\psi}, \underset{\sim}{\psi} \in R^m, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

при досить малому $\varepsilon_0 > 0$. Отже, існує єдиний розв'язок $\psi = \psi(\varepsilon) \in K_3$ рівняння (23), тобто єдиний розв'язок

$$x(\tau,\varepsilon) = x(\tau, x^0 + y(\psi(\varepsilon),\varepsilon), \varphi^0 + \psi(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$\varphi(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau, x^0 + y(\psi(\varepsilon),\varepsilon), \varphi^0 + \psi(\varepsilon), \varepsilon)$$

крайової задачі (1), (2.1), (2.2) з $A(x,\tau) \equiv A(\tau)$, для якого

$$\|y(\psi(\varepsilon),\varepsilon)\| \le c_4 \varepsilon^{\frac{1}{l}}, \quad \|y(\varepsilon)\| \le c_{10}\varepsilon^{\frac{1}{l}} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{29}$$

Оцінка (20) зі сталою $c_7 = 2\sigma + c_{10} + (Lc_1 + 1)ne^{c_1 L}c_4$ випливає із нерівностей (14) і (29). Теорему доведено.

Розглянемо частинний випадок усередненої задачі (6.1), (6.2), коли

$$\bar{a}(\bar{x},\tau) = P_1(\tau)\bar{x} + r_1(\tau), \quad \bar{f}(\bar{x},\tau) = P_2(\tau)\bar{x} + r_2(\tau), \quad A(\bar{x},\tau) \equiv A(\tau), \tag{30}$$

причому P_1, P_2, r_1 і r_2 — неперервні на відрізку $[0, L]$.

Позначимо через $Q(\tau,t)$ нормальну фундаментальну матрицю розв'язків лінійної системи $\dfrac{dx}{d\tau} = P_1(\tau)z$. Легко бачити, що в цьому випадку розв'язок задачі (6.1) задається формулою

$$\bar{x}(\tau, x^0) = Q(\tau,0)x^0 + \int\limits_0^\tau Q(\tau,t)r_1(t)dt, \tag{31}$$

де

$$x^0 = \Big(\int\limits_0^L P_2(\tau)Q(\tau,0)dr \Big)^{-1} \Big\{ d_2 - \int\limits_0^L \Big[P_2(\tau) \int\limits_0^\tau Q(\tau,t)r_1(t)dt + r_2(\tau) \Big] d\tau \Big\}, \tag{32}$$

а розв'язок задачі (6.2) — формулою (9), в якій φ^0 визначається рівністю (10) при

$$U = \int_0^L A(\tau) d\tau.$$

Отже, стосовно припущення (30) теорему 2 можна переформулювати таким чином.

Теорема 3. *Нехай:*

1) *виконуються умови (3), (4) і нерівності*

$$\det \int_0^L P_2(\tau) Q(\tau, 0) d\tau \neq 0, \quad \det \int_0^L A(\tau) d\tau \neq 0;$$

2) *крива (31), (32) належить D $\forall \tau \in [0, L]$.*

Тоді можна вказати такі сталі $\varepsilon^* > 0$ і $c_{14} > 0$, що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \leq \varepsilon^*$ крайова задача (1), (2.1), (2.2) має єдиний розв'язок $(x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon))$, який задовольняє оцінку

$$\|x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, x^0)\| + \|\varphi(\tau, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)\| \leq c_{14} \varepsilon^{\frac{1}{l}} \quad \forall (\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0],$$

де $\bar{x}(\tau, x^0)$ і $\bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)$ визначаються формулами відповідно (31), (32) і (9), (10).

Задамо тепер для рівнянь (1) крайові умови

$$\int_0^L f(x, \varphi, \tau, \mu) d\tau = d_1, \quad \underset{\sim}{x}|_{\tau=0} = x^0, \tag{33}$$

$$\int_0^L [A(\tau)\varphi + g(x, \varphi, \tau, \mu)] d\tau = d_2, \tag{34}$$

де $\underset{\sim}{x} = (x_{n-r+1}, \ldots, x_n)$ — вектор, координатами якого є r останніх координат x-компоненти розв'язку (x, φ) системи (1), $\underset{\sim}{x}^0 = (x^0_{n-r+1}, \ldots, x^0_n)$ — заданий вектор, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ — невідомі параметри, $\mu \in G \subset R^r$ (G — обмежена область). Згідно з прийнятою термінологією [2, 3], задача (1), (33), (34) називається крайовою задачею з параметрами і розв'язати її — означає знайти такий розв'язок (x, φ) системи (1) і параметри $\mu_1, \ldots, \mu_r$, які справджують умови (33), (34). Для розв'язання цієї задачі також використаємо метод усереднення по всіх швидких змінних φ. Усереднена задача має вигляд

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}(\bar{x}, \tau), \quad \int_0^L f(\bar{x}, \tau, \mu) d\tau = d_1, \quad \underset{\sim}{\bar{x}}|_{\tau=0} = \underset{\sim}{x}^0, \tag{35}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \bar{b}(\bar{x}, \tau), \quad \int_0^L [A(\tau)\bar{\varphi} + \bar{g}(\bar{x}, \tau, \mu)] d\tau = d_2, \tag{36}$$

де $\bar{f}(x, \tau, \mu)$ і $\bar{g}(x, \tau, \mu)$ — середні значення функцій $f(x, \varphi, \tau, \mu)$ і $g(x, \varphi, \tau, \mu)$ в кубі періодів $0 \leq \varphi_\nu \leq 2\pi$, $\nu = \overline{1, m}$, які визначаються формулою (7).

Позначимо через D_0 множину тих точок y, для яких крива $x = \bar{x}(\tau, y)$ належить D для всіх $\tau \in [0, L]$. Нехай $D_0 \neq \emptyset$.

Лема 2. *Якщо існує єдиний розв'язок* $(\tilde{x}^0, \mu^0)$ *рівняння*

$$\int_0^L \bar{f}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau, \mu^0) d\tau = d_1,$$

для якого $x^0 = (\tilde{x}^0, \underset{\sim}{x}^0) \in D_0$, $\mu^0 \in G$, *і матриця*

$$U = \int_0^L A(\tau) d\tau$$

невироджена, то крайова задача (35), (36) має єдиний розв'язок $(\overline{x}(\tau, x^0), \overline{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon), \mu^0)$.

Доведення. Очевидно, що $(\bar{x}\ (\tau,\ x^0),\ \mu^0)$ є розв'язком задачі (35), тому досить побудувати $\bar{\varphi}$-компоненту усередненої задачі. Із (36) легко встановити, що $(\bar{\varphi}\ (\tau,\ x^0,\ \varphi^0,\ \varepsilon)$ визначається формулою (9), в якій

$$\varphi^0 = U^{-1}\Big\{d_2 - \int_0^L \bar{f}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau, \mu^0) d\tau - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^L A(\tau)\int_0^\tau [\omega(\tau) + \varepsilon \bar{b}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau] d\tau\, d\tau\Big\}.$$

Лему доведено.

Припустимо, що функція $\widetilde{F}(x, \varphi, \tau, \mu) = (a(x, \varphi, \tau),\ b(x,\ \varphi,\ \tau),\ f(x,\ \varphi,\ \tau,\ \mu),\ g(x,\ \varphi,\ \tau,\ \mu))$ двічі неперервно диференційовна в $D \times R^m \times [0, L] \times G$, 2π-періодична по φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, а її коефіцієнти Фур'є $\widetilde{F}_k = \widetilde{F}_k(p)$, $p = (x, \tau, \mu) = (p_1, ..., p_{n+r+1})$ справджують оцінку

$$\begin{aligned}\sup\|\widetilde{F}_0\| \;&+\; \sup\left\|\frac{\partial \widetilde{F}_0}{\partial p}\right\| + \sum_{j=1}^{n+r+1}\sup\left\|\frac{\partial^2 \widetilde{F}_0}{\partial p \partial p_j}\right\| + \sum_{k\neq 0}\Big[\|k\|\sup\|\widetilde{F}_k\| + \\ &+\; \sup\left\|\frac{\partial \widetilde{F}_k}{\partial p}\right\| + \frac{1}{\|k\|}\sum_{j=1}^{n+r+1}\sup\left\|\frac{\partial^2 \widetilde{F}_k}{\partial p \partial p_j}\right\|\Big] \le c_1,\end{aligned} \tag{37}$$

в якій супремум береться по $p \in D \times [0, L] \times G$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови леми 2, нерівність (37) і матриця*

$$S_1 = \int_0^L \left(\frac{\partial \bar{f}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau, \mu^0)}{\partial x}\,\frac{\partial \bar{x}(\tau, x^0)}{\partial \widetilde{x}^0},\ \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau, \mu^0)}{\partial \mu^0}\right) d\tau$$

невироджена. Тоді існують такі сталі $\varepsilon_1 > 0$ *і* $c_{15} > 0$, *що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \le \varepsilon_1$, *крайова задача (1), (34), (35) має єдиний розв'язок* $(x(\tau,\varepsilon),\ \varphi(\tau,\varepsilon),\ \mu(\varepsilon))$, *який для будь-яких* $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$ *задовольняє нерівність*

$$\|x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, x^0)\| + \|\varphi(\tau, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)\| + \|\mu(\varepsilon) - \mu^0\| \le c_{15}\varepsilon^{\frac{1}{l}}. \tag{38}$$

Доведення. Позначимо

$$S_2 = \int\limits_0^L \left(A(\tau) \int\limits_o^\tau \frac{\partial \bar{b}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau)}{\partial x} \frac{\partial \bar{x}(\tau, x^0)}{\partial \tilde{x}^0} d\tau + \frac{\partial \bar{g}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau, \mu^0)}{\partial x} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial \bar{x}(\tau, x^0)}{\partial \tilde{x}^0}, \frac{\partial \bar{g}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau, \mu^0)}{\partial \mu^0} \right) d\tau, \quad Q = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ S_2 & U \end{pmatrix},$$

де 0 — нуль-матриця. При зроблених припущеннях

$$\det Q = \det S_1 \det U \neq 0.$$

Скористаємось далі схемою доведення теореми 1. Невідомі параметри $y = (\tilde{y},\ 0) \in R^n$, $\tilde{y} \in R^{n-r}$, $\psi \in R^m$, $h \in R^r$ розв'язку

$$(x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon), \mu(\varepsilon)) = (x(\tau, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \varepsilon), \varphi(\tau, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \varepsilon), \mu^0 + h) \tag{39}$$

крайової задачі (1), (33), (34) визначаємо із крайових умов (33), (34). Якщо позначити $(\tilde{y},h) = z$, $(z,\psi) = v$, то одержимо рівняння

$$v = -Q^{-1}\mathrm{col}\left\{ \int\limits_0^L [\bar{f}(\bar{x}(\tau, x^0 + y) + \Delta x, \tau, \mu^0 + h) - \bar{f}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau, \mu^0)] d\tau + \right.$$

$$+ \int\limits_0^L \tilde{f}(x, \varphi, \tau, \mu) d\tau - S_1 z, \quad \int\limits_0^L A(\tau) \Delta\varphi d\tau + \int\limits_0^L A(\tau) \int\limits_0^\tau [\bar{b}(\bar{x}(\tau, x^0 + y), \tau) -$$

$$- \bar{b}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau)] d\tau d\tau + \int\limits_0^L [\bar{g}(\bar{x}(\tau, x^0 + y) + \Delta x, \tau, \mu^0 + h) -$$

$$\left. - \bar{g}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau, \mu^0)] d\tau + \int\limits_0^L \tilde{g}(x, \varphi, \tau, \mu) d\tau - S_2 z \right\} \equiv M_4(v, \varepsilon), \tag{40}$$

в якому $x = x(\tau, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau, \varepsilon)$, $\mu = \mu(\varepsilon)$, а Δx і $\Delta\varphi$ мають той же зміст, що і у формулі (14). На підставі нерівностей (5), (14) і (37) із (40) для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ отримуємо оцінку

$$\|M_4(v, \varepsilon)\| \leq c_{16} \|v\|^2 + c_{17} \varepsilon^{\frac{1}{l}},$$

де

$$C_{16} = \|Q^{-1}\| c_1 n^2 e^{2c_1 L} \left(\frac{1}{2} + c_1 L e^{c_1 L} \right) \left(2 + \int\limits_0^L \tau \|A(\tau)\| d\tau \right),$$

$$C_{17} = 2\|Q^{-1}\| \left[c_1 \sigma L + (1 + c_1) c_1 \sigma_0 + \sigma \int\limits_0^L \|A(\tau)\| d\tau \right].$$

Звідси випливає, що M_4 відображає множину $K_4 = \{v : v \in R^{n+m}, \ \|v\| \leq 2c_{17}\varepsilon^{\frac{1}{l}}\}$ в себе при

$$\varepsilon_0 \leq (4c_{16}c_{17})^{-l}.$$

Крім того, використовуючи (40), легко встановити, що

$$\frac{\partial M_4(v,\varepsilon)}{\partial v} = -Q^{-1}\mathrm{col}\Bigg\{\int\limits_0^L \Bigg(\frac{\partial \bar f(x,\tau,\mu)}{\partial x}\frac{\partial \bar x(\tau,x^0+y)}{\partial \tilde x^0}, \frac{\partial \bar f(x,\tau,\mu)}{\partial h}, 0\Bigg)d\tau - (S_1, 0),$$

$$\int\limits_0^L \Bigg(A(\tau)\int\limits_0^\tau \frac{\partial \bar b(\bar x(\tau,x^0+y),\tau)}{\partial x}\frac{\partial \bar x(\tau,x^0+y)}{\partial \tilde x^0}d\tau + \frac{\partial \bar g(x,\tau,\mu)}{\partial x}\frac{\partial \bar x(\tau,x^0+y)}{\partial \tilde x^0},$$

$$\frac{\partial \bar g(x,\tau,\mu)}{\partial h}, 0\Bigg)d\tau - (S_2, 0)\Bigg\} - Q^{-1}\mathrm{col}\Bigg\{\int\limits_0^L \Bigg(\frac{\partial f(x,\varphi,\tau,\mu)}{\partial x}\frac{\partial \Delta x}{\partial \tilde y} + \frac{\partial \tilde f(x,\varphi,\tau,\mu)}{\partial x} \times$$

$$\times \frac{\partial \bar x(\tau,x^0+y)}{\partial \tilde y} + \frac{\partial f(x,\varphi,\tau,\mu)}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde y}, \frac{\partial \tilde f(x,\varphi,\tau,\mu)}{\partial h}, \frac{\partial f(x,\varphi,\tau,\mu)}{\partial x}\frac{\partial \Delta x}{\partial \psi} +$$

$$+ \frac{\partial f(x,\varphi,\tau,\mu)}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \psi}\Bigg)d\tau, \int\limits_0^L \Bigg(A(\tau)\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial \tilde y} + \frac{\partial g(x,\varphi,\tau,\mu)}{\partial x}\frac{\partial \Delta x}{\partial \tilde y} +$$

$$+ \frac{\partial \tilde g(x,\varphi,\tau,\mu)}{\partial x}\frac{\partial \bar x(\tau,x^0+y)}{\partial \tilde y} + \frac{\partial g(x,\varphi,\tau,\mu)}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde y}, \frac{\partial \tilde g(x,\varphi,\tau,\mu)}{\partial h},$$

$$A(\tau)\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial \psi} + \frac{\partial g(x,\varphi,\tau,\mu)}{\partial x}\frac{\partial \Delta x}{\partial \psi} + \frac{\partial g(x,\varphi,\tau,\mu)}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \psi}\Bigg)d\tau\Bigg\}, \tag{41}$$

де $v = (\tilde y, h, \psi)$, 0 — нуль-матриця. Згідно із зробленими припущеннями, перший доданок у правій частині (41) оцінюється зверху величиною $c_{18}\|v\| + c_{19}\varepsilon^{\frac{1}{l}}$, де

$$c_{18} = Lc_1 n^2 e^{2c_1 L}(3 + Lc_1 e^{c_1 L})\|Q^{-1}\|\Bigg(1 + \int\limits_0^L \|A(\tau)\| d\tau\Bigg),$$

$$c_{19} = 2Lc_1\sigma(1 + ne^{c_1 L})\|Q^{-1}\|,$$

а другий — величиною $c_{20}\varepsilon^{\frac{1}{l}}$, де

$$c_{20} = \sigma_0(1 + c_1)[2 + ne^{c_1 L}(1 + c_1 + c_1 L)]\|Q^{-1}\|.$$

Отже,

$$\left\|\frac{\partial M_4(v,\varepsilon)}{\partial v}\right\| \leq c_{18}\|v\| + (c_{19} + c_{20})e^{\frac{1}{l}},$$

звідки з урахуванням умови $\|v\| \leq 2c_{17}\varepsilon^{\frac{1}{l}}$ одержуємо нерівність

$$\left\| \frac{\partial M_4(v,\varepsilon)}{\partial v} \right\| \leq (2c_{17}c_{18} + c_{19} + c_{20})e_0^{\frac{1}{l}} \leq \frac{1}{2}$$

для всіх $v \in K_4$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при досить малому $\varepsilon_0 > 0$. Тому існує єдиний розв'язок $v = v(\varepsilon) = (\tilde{y}(\varepsilon),\ h(\varepsilon),\ \psi(\varepsilon)) \in K_4$ рівняння (40), а значить, і єдиний розв'язок (39) крайової задачі (1), (33), (34), для якого

$$\|y(\varepsilon)\| + \|h(\varepsilon)\| + \|\psi(\varepsilon)\| \leq 2c_{17}e^{\frac{1}{l}}, \quad y(\varepsilon) = (\tilde{y}(\varepsilon), 0). \tag{42}$$

Оцінка (38) зі сталою

$$c_{15} = 2[\sigma + c_{17} + c_{17}ne^{c_1 L}(1 + c_1 L)]$$

випливає із нерівностей (14), (42). Нарешті, накладемо обмеження

$$c_{15}\varepsilon_0^{\frac{1}{l}} \leq \frac{1}{2} \min\{\rho_1, \rho_2\},$$

в якому стала ρ_1 означена при доведенні теореми 1, а ρ_2 — відстань від точки μ^0 до межі області G.

1. *Митропольский Ю.А.* Нелинейная механика. Асимптотические методы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 396 с.
2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
3. *Лучка А.Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 315 с.
4. *Самойленко А.М., Петришин Я.Р.* Метод усереднення в багатоточкових задачах теорії нелінійних коливань //Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 8. – С. 1036–1043.
5. *Самойленко А.М., Петришин Я.Р.* Крайові задачі з параметрами для багаточастотної коливної системи //Там же. – 1997. – **49**, № 4. – С. 581–589.
6. *Петришин Р.І.* Дослідження коливних систем з повільно змінними частотами за допомогою методу усереднення: Дис.... д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 1995. – 248 с.
7. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
8. *Рейссинг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 320 с.
9. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

Одержано 25.04.98