УДК 517.938

ПРО РЕГУЛЯРНІ ЛІНІЙНІ РОЗШИРЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

А.М. Самойленко

Ін-т математики НАН України,
Україна, 252601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: imath2@mail.kar.net

І.М. Грод

Терноп. пед. ун-т,
Україна, 282009, Тернопіль, вул. Винниченка, 10

Linear extensions of dynamical systems on the torus are considered. By means of sign-changing Lyapunov functions, new structures of regular and weakly regular systems on the torus are found.

Розглядається система лінійних розширень динамічних систем на торі. Використовуючи апарат знакозмінних функцій Ляпунова, знайдено нові структури регулярних і слабко регулярних систем на торі.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

$\varphi \in \mathrm{T}_m$ — m-вимірний тор, $x \in R^n$, $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{T}_m)$, $A(\varphi) \in C^0(\mathrm{T}_m)$, яку ще називають лінійним розширенням динамічної системи на торі. Через $\varphi_t(\varphi)$ позначають розв'язок системи $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$ з початковою умовою $\varphi_t(\varphi)|_{t=0} = \varphi$, а через $\Omega^t_\tau(\varphi)$ — матрицант лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x, \tag{2}$$

нормований у точці $t = \tau$: $\Omega^\tau_\tau = I_n$ — n-вимірна одинична матриця. Нагадаємо [1], що система (1) має функцію Гріна $G_0(\tau,\varphi)$, якщо існує неперервна $n \times n$-вимірна матрична функція $C(\varphi)$, 2π-періодична по кожній змінній φ_j, $j = \overline{1,m}$, тобто $C(\varphi) \in C^0(\mathrm{T}_m)$ така, що функція

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0; \\ \Omega^0_\tau(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n], & \tau > 0; \end{cases} \tag{3}$$

задовольняє оцінку

$$\|G_0(\tau,\varphi)\| \le Ke^{-\gamma|\tau|} \tag{4}$$

з додатними сталими K, γ, незалежними від $\varphi \in \mathrm{T}_m$ і $\tau \in R$. При цьому будемо дотримуватись таких позначень: під нормою $\|G\|$ матриці G розуміємо операторну норму

$\|G\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Gx\|$, $\|y\|^2 = \langle y, y\rangle$, $\langle y, x\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ — звичайний скалярний добуток в R^n, $\|S\|_0 = \max\limits_{\varphi\in \mathrm{T}_m} \|S(\varphi)\|$. Відмітимо, що виконання оцінки (3) еквівалентне виконанню таких оцінок:

$$\begin{aligned} &\|\Omega_0^t(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi))\| \leq Ke^{-\gamma|t|}, && t \geq 0, \\ &\|\Omega_0^t(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n]\,\| \leq Ke^{\gamma|t|}, && t \leq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Будемо говорити, що система (1) регулярна, якщо вона має єдину функцію Гріна (3) з оцінкою (4). Якщо відомо, що система (1) має хоча б одну функцію Гріна (3) з оцінкою (4), то кажуть, що вона слабко регулярна. У випадку, коли система (1) має не менше двох різних функцій Гріна (3) з оцінкою (4), її називають строго слабко регулярною.

Як відомо [2], для того, щоб система (1) була слабко регулярною, необхідно і досить, щоб існувала квадратична форма

$$V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)y, y\rangle \tag{6}$$

з неперервно диференційовною матрицею коефіцієнтів $S(\varphi) \in C^1(\mathrm{T}_m)$, похідна якої додатно визначена вздовж розв'язків спряженої системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = -A^*(\varphi)y, \tag{7}$$

тобто

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial \varphi}a(\varphi) - S(\varphi)A^*(\varphi) - A(\varphi)S(\varphi)x, x\right\rangle \geq \|x\|^2.$$

При цьому система (1) буде регулярною в тому і тільки в тому випадку, коли $\det S(\varphi) \neq 0$, а строго слабко регулярною — коли при деякому значенні $\varphi = \varphi_0$ $\det S(\varphi_0) = 0$.

Відомо також, що кожну слабко регулярну систему (1) завжди можна доповнити до регулярної наступним чином:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \quad \frac{dy}{dt} = x - A^*(\varphi)y, \tag{8}$$

оскільки похідна невиродженої квадратичної форми

$$V(\varphi, x) = \langle x, y\rangle + \langle S(\varphi)y, y\rangle$$

вздовж розв'язків цієї системи додатна. Це наводить на думку, що існують інші матриці $P(\varphi)$, більш загальної структури, такі, що система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x \tag{9}$$

є регулярною.

Мета запропонованої роботи — знайти нові структури регулярних і слабко регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі. Для цього розглянемо квадратичну форму

$$V_{\alpha,\beta}(x_1, x_2, x_3) = \alpha\left(\|x_1\|^2 - \|x_2\|^2 - \|x_3\|^2\right) + 2\beta\left(\langle x_1, x_2\rangle + \langle x_2, x_3\rangle + \langle x_1, x_3\rangle\right), \tag{10}$$

де $x_i \in R^n$, $i = \overline{1,3}$, α, β — додатні сталі.

Розглянемо випадок, коли α і β відмінні від нуля. Не обмежуючи загальності у виборі структур, можна припустити, що $\alpha = 1$, $\beta = 1$, тобто

$$V_{1,1}(x_1,x_2,x_3) = \left(\|x_1\|^2 - \|x_2\|^2 - \|x_3\|^2\right) + 2\left(\langle x_1,x_2\rangle + \langle x_2,x_3\rangle + \langle x_1,x_3\rangle\right) = \langle Jx, x\rangle, \quad (11)$$

де

$$J = \begin{pmatrix} I_n & I_n & I_n \\ I_n & -I_n & I_n \\ I_n & I_n & -I_n \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Обчисливши похідну від (11) вздовж розв'язків системи (9), одержимо

$$\dot{V}_{1,1}(x_1,x_2,x_3) = \langle JP(\varphi)x, x\rangle + \langle Jx, P(\varphi)x\rangle = \langle JP(\varphi) + P^*(\varphi)Jx, P(\varphi)x\rangle. \quad (13)$$

За припущенням ця квадратична форма повинна бути знаковизначеною, а тому прирівняємо її до наперед заданої форми $2\langle B(\varphi)x, x\rangle$ з заданою симетричною матрицею

$$B(\varphi) = \operatorname{diag}\{B_1(\varphi), B_2(\varphi), B_3(\varphi)\}, \quad (14)$$

де $B_i(\varphi)$ — додатно визначені матриці. В результаті отримаємо рівність

$$JP(\varphi) + P^*(\varphi)J = 2B(\varphi), \quad (15)$$

звідки випливає

$$JP(\varphi) = M(\varphi) + B(\varphi), \quad (16)$$

де $3n \times 3n$-вимірна матриця $M(\varphi)$ має властивість

$$M^*(\varphi) = -M(\varphi) \quad \forall\varphi \in \mathrm{T}_m. \quad (17)$$

Отже,

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -A_{12}^*(\varphi) & -A_{13}^*(\varphi) \\ A_{12}(\varphi) & 0 & -A_{23}^*(\varphi) \\ A_{13}(\varphi) & A_{23}(\varphi) & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Тут $A_{ij}(\varphi) \in C^0(\mathrm{T}_m)$ — довільні $n \times n$-вимірні матриці.

Далі, знайшовши обернену матрицю J^{-1} до матриці (12):

$$J^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & I_n & I_n \\ I_n & -I_n & 0 \\ I_n & 0 & -I_n \end{pmatrix}, \quad (19)$$

з урахуванням вигляду матриць із рівностей (14) і (18) дістанемо

$$P(\varphi) = J^{-1}(M(\varphi) + B(\varphi)) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & I_n & I_n \\ I_n & -I_n & 0 \\ I_n & 0 & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1(\varphi) & -A_{12}^*(\varphi) & -A_{13}^*(\varphi) \\ A_{12}(\varphi) & B_2(\varphi) & -A_{23}^*(\varphi) \\ A_{13}(\varphi) & A_{23}(\varphi) & B_3(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

а

$$P(\varphi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_{12}(\varphi) + A_{13}(\varphi) & B_2(\varphi) + A_{23}(\varphi) & -A_{23}^*(\varphi) + B_3(\varphi) \\ B_1(\varphi) - A_{12}(\varphi) & -A_{12}^*(\varphi) - B_2(\varphi) & -A_{13}^*(\varphi) + A_{23}^*(\varphi) \\ B_1(\varphi) - A_{13}(\varphi) & -A_{12}^*(\varphi) - A_{23}(\varphi) & -A_{13}^*(\varphi) - B_3(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Отже, якщо матриця $P(\varphi)$ в системі (9) буде мати вигляд (21), то похідна квадратичної форми (11) вздовж розв'язків системи (9)

$$\dot{V}_{11}(\varphi, x_1, x_2, x_3) = 2\sum_{i=1}^{3}\langle B_i(\varphi)x_i, x_i\rangle. \tag{22}$$

Враховуючи наведені вище міркування, можна сформулювати наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай система (9) така, що матриця $P(\varphi)$ має вигляд (21), де три симетричні матриці $B_i(\varphi) \in C^0(\mathrm{T}_m)$ додатно визначені, тобто*

$$\langle B_i(\varphi)x, x\rangle \geq \beta_i\|x\|^2 \qquad \forall x \in R^n, \quad \beta_i > 0, \quad i = \overline{1,3}, \tag{23}$$

а $A_{ij}(\varphi)$ — довільні матриці з простору $C^0(\mathrm{T}_m)$. Тоді система (9) має єдину функцію Гріна - Самойленка задачі про інваріантні тори (буде регулярною).

Зауваження. Теорема справедлива і тоді, коли $P(\varphi)$ має вигляд

$$P(\varphi) = \begin{pmatrix} B_1(\varphi) & -A_{12}^*(\varphi) & -A_{13}^*(\varphi) \\ -A_{12}(\varphi) & -B_2(\varphi) & A_{23}^*(\varphi) \\ -A_{13}(\varphi) & -A_{23}(\varphi) & -B_3(\varphi) \end{pmatrix}.$$

В цьому можна переконатись, якщо розглянути квадратичну форму $V_{0,1}(x_1,\ x_2,\ x_3)$ і повторити міркування, наведені при доведенні теореми 1.

Теорема 2. *Нехай у структурі (21) матриці $P(\varphi)$ симетричні матриці $B_1(\varphi)$, $B_3(\varphi)$ — додатно визначені, тобто виконана нерівність (23) при $i = 1, 2$, а симетрична матриця $B_2(\varphi)$ така, що $\langle B_2(\varphi)x, x\rangle \geq 0$, тобто може бути і нульовою. Крім цього припустимо також, що система*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(A_{12}(\varphi) + B_2(\varphi))x \tag{24}$$

є слабко регулярною. Тоді система (9) буде регулярною.

Доведення. Оскільки властивість слабкої регулярності еквівалентна існуванню $n \times n$-вимірної матриці $S(\varphi) \in C^1(\mathrm{T}_m)$ такої, що

$$\left\langle \left[\frac{\partial S}{\partial \varphi}a(\varphi) - \frac{1}{2}S(-A_{12} - B_2^*) - \frac{1}{2}(-A_{12}^* - B_2)S\right]x, x\right\rangle \geq \|x\|^2, \tag{25}$$

розглянемо квадратичну форму

$$V_p(\varphi, x_1, x_2, x_3) = p\left[2\left(\langle x_1, x_2\rangle + \langle x_2, x_3\rangle + \langle x_1, x_3\rangle\right) + \|x_1\|^2 - \|x_2\|^2 - \|x_3\|^2\right] +$$

$$+\langle S(\varphi)x_2, x_2\rangle = pV_{1,1}(x_1, x_2, x_3) + \langle S(\varphi)x, x\rangle = p\langle Jx, x\rangle + \langle S(\varphi)x, x\rangle \tag{26}$$

і покажемо, що похідна її вздовж розв'язків системи (9) при достатньо великих додатних значеннях параметра $p \gg 0$ буде додатно визначеною. Для цього введемо наступні позначення:

$$W[S] = \frac{\partial S}{\partial \varphi}a(\varphi) + S(\varphi)P(\varphi) + P^*(\varphi)S(\varphi), \tag{27}$$

$P_3 = \operatorname{diag}\{0, I_n, 0\}$ — $3n \times 3n$-вимірна матриця проектування,

$$I_{3n} - P_3 = P_2, \quad \overline{S} = \operatorname{diag}\{0, S(\varphi), 0\}, \quad \beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}. \tag{28}$$

Тоді нерівність (25) набирає вигляду

$$\langle W[\overline{S}]P_3x, P_3x\rangle \geq \|P_3x\|^2, \tag{29}$$

а похідну квадратичної форми (26) вздовж розв'язків системи (9) записуємо так:

$$\dot{V}_p(\varphi, x) = \langle W[pJ + \overline{S}(\varphi)]x, x\rangle = p\langle W[J]x, x\rangle + \langle W[\overline{S}]x, x\rangle,$$

а

$$\dot{V}_p(\varphi, x) = 2p\left(\sum_{i=1}^{3}\langle B(\varphi)_i x_i, x_i\rangle\right) + \langle W[\overline{S}](P_2 + P_3)x, (P_2 + P_3)x\rangle. \tag{30}$$

Звідси, враховуючи (23), (29), маємо

$$\dot{V}_p(\varphi, x) \geq 2p\beta\|P_2x\|^2 - \|W[\overline{S}]\|_0\|P_2x\|^2 - 2\|W[\overline{S}]\|_0\|P_2x\|\,\|P_3x\| + \|P_3x\|^2 =$$

$$= \left(2p\beta - \|W[\overline{S}]\|_0\right)\|P_2x\|^2 - 2\|W[\overline{S}]\|_0\|P_2x\|\,\|P_3x\| + \|P_3x\|^2. \tag{31}$$

Далі, зауваживши, що останній вираз можна розглядати як квадратичну форму

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = (2p\beta - \|W\|_0)\,\sigma_1^2 - 2\|W\|_0\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2, \tag{32}$$

де $\sigma_1 = \|P_2x\|$, $\sigma_2 = \|P_3x\|$, переконуємось, що для отриманої квадратичної форми справедлива оцінка

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) \geq \left(2p\beta - \|W\|_0 - 2\|W\|_0^2\right)(2p\beta - \|W\|_0 + 1)^{-1}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2). \tag{33}$$

Тому, враховуючи (31), маємо

$$\dot{V}_p(\varphi, x_1, x_2, x_3) = \langle W[pJ + \overline{S}]x, x\rangle \geq \gamma(p)\left(\|P_2x\|^2 + \|P_3x\|^2\right) \geq \frac{\gamma(p)}{2}\|x\|^2,$$

де $\gamma(p) = \left(2p\beta - \|W\|_0 - 2\|W\|_0^2\right)(2p\beta - \|W\|_0 + 1)^{-1}$.

А це дозволяє стверджувати справедливість теореми 2.

У випадку, коли дві матриці $B_1(\varphi)$, $B_2(\varphi)$ можуть перетворюватися в нульові, тобто виконується тільки одна строга нерівність

$$\langle B_1(\varphi)x, x\rangle \geq \beta_1\|x\|^2, \qquad \beta_1 > 0, \tag{34}$$

$$\langle B_1(\varphi)x, x\rangle \geq 0, \qquad i = 1, 2, \quad \forall x \in R^n, \tag{34'}$$

справедливе наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай три симетричні матриці* $B_i(\varphi) \in C^0(\mathrm{T}_m)$, $i = 1, 2, 3$, *задовольняють умови (34), (34′) і система рівнянь*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{2}\left[(A_{12}(\varphi) + B_2^*(\varphi))\, x_2 + (A_{13}(\varphi) - A_{23}(\varphi))\, x_3\right], \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{2}\left[(A_{12}(\varphi) + A_{23}^*(\varphi))\, x_2 + (A_{13}(\varphi) + B_3(\varphi))\, x_3\right], \end{aligned} \tag{35}$$

$\tilde{x} = (x_2, x_3) \in R^{2n}$, *є слабко регулярною. Тоді система (9) буде регулярною.*

Доведення. Оскільки система (35) слабко регулярна, то існує квадратична форма $V(\varphi, x_2, x_3) = \langle \widetilde{S}(\varphi)\, \tilde{x}, \tilde{x}\rangle$ з неперервно диференційовною $2n \times 2n$-вимірною симетричною матрицею коефіцієнтів, яка має додатно визначену похідну вздовж розв'язків системи, спряженої до системи (35), тобто виконується нерівність

$$\left\langle \left[\left(\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \varphi} a(\varphi) - \widetilde{S}\widetilde{A}^* - \widetilde{A}\widetilde{S}\right)\right] \tilde{x}, \tilde{x}\right\rangle \geq \|\tilde{x}\|^2 \tag{36}$$

при всіх $x = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^{2n}$. Матриця $\widetilde{A}(\varphi)$ розміру $2n \times 2n$ відповідає системі (35), тобто

$$\widetilde{A}(\varphi) = \begin{pmatrix} A_{12}(\varphi) + B_2^*(\varphi) & A_{13}(\varphi) - A_{23}(\varphi) \\ A_{12}(\varphi) + A_{23}^*(\varphi) & A_{13}(\varphi) + B_3(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $-\widetilde{A}^*(\varphi)$ є блоком матриці $P(\varphi)$ вигляду (21) (нагадаємо, що матриці B_i, $i = \overline{1, 3}$, — симетричні за попереднім припущенням). Тому, використовуючи позначення (27), (28), умову (36) запишемо у вигляді

$$\left\langle W\left[\widetilde{\widetilde{S}}\right] \widetilde{P}x, \widetilde{P}x\right\rangle \geq \|\widetilde{P}x\|^2,$$

$$\widetilde{P} = \mathrm{diag}\,\{0, I_n, I_n\}, x = \mathrm{colon}\,\{x_1, x_2, x_3\},$$

$$\widetilde{\widetilde{S}} = \mathrm{diag}\,\{0, \widetilde{S}\}.$$

Тепер, як і при доведенні теореми 3, переконуємось, що похідна квадратичної форми

$$V_p(\varphi, x_1, x_2, x_3) = p\left[2\left(\langle x_1, x_2\rangle + \langle x_2, x_3\rangle + \langle x_1, x_3\rangle\right) + \|x_1\|^2 - \right.$$
$$\left. - \|x_2\|^2 - \|x_3\|^2\right] + \langle S(\varphi)x_2, x_2\rangle$$

вздовж розв'язків системи (9) при досить великих параметрах $p > 0$ буде додатно визначеною, а тому регулярною.

Продемонструємо одержані результати на прикладі системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = (\mu\sin m\varphi + \lambda_1\cos\varphi)x_1 + (1+\lambda_2\cos\varphi)x_2 + (\lambda_2\cos\varphi + 1)x_3,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (1-\mu\sin m\varphi)x_1 + (-\mu\sin m\varphi - 1)x_2 + (-\lambda_1\cos\varphi - \lambda_2\cos\varphi)x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = (1-\lambda_1\cos\varphi)x_1 - (\lambda_2\cos\varphi + \mu\sin m\varphi) + (-\lambda_1\cos\varphi)x_3.$$

Ця система має єдину функцію Гріна [1] за умови $\lambda_1 < 0$ і при будь-яких фіксованих значеннях $\mu \in R$, $m \in Z$. Оскільки для неї виконуються всі умови теореми 2, то

$$V = p(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - (\cos\varphi)x_3^2.$$

Розглянемо багатовимірний випадок. Для цього матрицю J запишемо у вигляді

$$J = \begin{pmatrix} I_n & I_n & I_n & \cdots & I_n \\ I_n & -I_n & I_n & \cdots & I_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ I_n & I_n & I_n & \cdots & -I_n \end{pmatrix}. \tag{37}$$

При цьому обернена матриця

$$J^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (2-k)I_n & I_n & I_n & \cdots & I_n \\ I_n & -I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ I_n & 0 & 0 & \cdots & -I_n \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Аналогічно викладеному вище матриці $B(\varphi)$ і $M(\varphi)$ подаємо у вигляді

$$B(\varphi) = \operatorname{diag}\{B_1(\varphi), B_2(\varphi), \ldots, B_{k+1}(\varphi)\}, \tag{39}$$

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -A_{11}^*(\varphi) & -A_{12}^*(\varphi) & \cdots & -A_{1k}^*(\varphi) \\ A_{11}(\varphi) & 0 & -A_{21}^T(t) & \cdots & -A_{2k-1}^*(\varphi) \\ A_{12}(\varphi) & A_{21}(\varphi) & 0 & \cdots & -A_{3k-2}^*(\varphi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1k}(\varphi) & A_{2k-1}(\varphi) & A_{3k-2}(\varphi) & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

а матрицю $P(\varphi)$ розміру $(k+1)n \times (k+1)$ визначаємо так:

$$P(\varphi) = J^{-1}\left(B(\varphi) + M(\varphi)\right),$$

де матриці J^{-1}, $B(\varphi)$, $M(\varphi)$ визначені згідно з (38) - (40). Отже,

$$P(\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (2-k)B_1 - \sum\limits_{j=2}^{k+1} A_{1j} & C_1(\varphi) & C_2(\varphi) & \cdots & C_k(\varphi) \\ B_1(\varphi) - A_{11}(\varphi) & -A^*_{11}(\varphi) - B_2(\varphi) & -A^*_{12}(\varphi) + A^*_{21}(\varphi) & \cdots & -A^*_{1k}(\varphi) + A^*_{2k-1}(\varphi) \\ B_1(\varphi) - A_{12}(\varphi) & -A^*_{11}(\varphi) - A_{21}(\varphi) & -A^*_{12}(\varphi) - B_3(\varphi) & \cdots & -A^*_{1k}(\varphi) + A^*_{3k-2}(\varphi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ B_1(\varphi) - A_{1k}(\varphi) & -A^*_{11}(\varphi) - A_{2k-1}(\varphi) & -A^*_{12}(\varphi) - A_{3k-2}(\varphi) & \cdots & -A^*_{1k}(\varphi) - B_{k+1}(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{41}$$

$$C_i(\varphi) = (2-k)A_{1i}(\varphi) + B_i(\varphi) - \sum_{j=2}^{i} A^*_{ji-(j-1)}(\varphi) + \sum_{j=1}^{k-i} A_{i+1j}(\varphi), \quad i = \overline{2,k}.$$

По аналогії з доведенням теорем 1 і 2 неважко довести наступні твердження.

Теорема 4. *Нехай у системі (9) матриця $P(\varphi)$ має вигляд (41), де всі матриці $B_i(\varphi) \in C^0(\mathrm{T}_m)$ додатно визначені, тобто*

$$\langle B_i(t)x, x\rangle \geq \beta_i \|x\|^2 \qquad \forall x \in R^n, \quad i = \overline{1, k+1}, \quad \beta_i \, - \mathrm{const} > 0,$$

а довільні матричні функції $A_{ij}(\varphi) \in C^0(\mathrm{T}_m)$. Тоді система рівнянь вигляду (9), $x \in R^{n(k+1)}$, з матрицею (41) буде регулярною.

Теорема 5. *Нехай k матриць $B_i(\varphi)$ є додатно визначеними, тобто*

$$\langle B_i(\varphi)x, x\rangle \geq \beta_i \|x\|^2 \qquad \forall x \in R^n, \quad \beta_i > 0, \quad i = \overline{1,k},$$

а $B_{k+1}(\varphi)$ така, що $\langle B_{k+1}(\varphi)x, x\rangle \geq 0$, тобто може бути і нульовою. Крім цього припустимо також, що наступна система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(A_{1k}(\varphi) + B_k(\varphi)\right)x$$

є слабко регулярною. Тоді система (9), де $P(\varphi)$ має вигляд (41), буде регулярною.

1. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.

2. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.

Одержано 15.05.98